

考虑保鲜努力水平的生鲜食品供应链库存控制微分对策

陈务远¹, 张少峰², 胡小丽¹, 张力派^{1,3}

(1. 中国科学技术大学管理学院, 安徽合肥 230026; 2. 南京大学管理学院, 江苏南京 210093;
3. 上海外国语大学国际工商管理学院, 上海 201620)

摘要: 由于生鲜食品具有易腐性、时鲜性、损耗性等特点, 其供应链库存问题成为管理的难点. 考虑了生鲜食品供应商和零售商的保鲜努力水平, 对基本变质库存模型进行了改进, 构建了生鲜食品价格和新鲜度因素影响下的时变需求率; 考虑收益共享比例和成本共担比例两个合作参数, 并在连续时间背景下采用变分法建立了联合库存控制和分散库存控制两种模式下的供应链库存控制微分对策模型, 通过求解发现当约束方程组有解时 Nash 均衡存在. 最后通过数值仿真, 比较了两种库存控制模式下供应商和零售商的保鲜努力水平、库存水平以及供应链总利润变化情况, 并给出了相应的建议.

关键词: 生鲜食品供应链; 微分对策; 库存控制; 保鲜努力

中图分类号: F272 **文献标识码:** A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2019.06.009

引用格式: 陈务远, 张少峰, 胡小丽, 等. 考虑保鲜努力水平的生鲜食品供应链库存控制微分对策[J]. 中国科学技术大学学报, 2019, 49(6): 494-505.

CHEN Wuyuan, ZHANG Shaofeng, HU Xiaoli, et al. Inventory control of fresh food supply chain and its differential game considering fresh-keeping effort [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2019, 49(6): 494-505.

Inventory control of fresh food supply chain and its differential game considering fresh-keeping effort

CHEN Wuyuan¹, ZHANG Shaofeng², HU Xiaoli¹, ZHANG Lipai^{1,3}

(1. School of Business and University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;
2. School of Management, Nanjing University, Nanjing 210093, China;
3. School of Business and Management, Shanghai International Studies University, Shanghai 201620, China)

Abstract: Due to the perishable, fresh, deteriorating characteristics of fresh food, the inventory control of the fresh food supply chain is a strain for management. The fundamental metamorphic inventory model was improved, considering the preservation efforts of supplier and retailer, and prices and freshness factors affecting time-varying demand rate was built. Revenue sharing parameters and cost sharing parameters were considered, and the variational method was used to set up differential game models including jointly managed inventory (JMI) and decentralized inventory management (DIM) under the background of continuous time. Nash equilibrium's existence of constraint equations was proved and corresponding optimal inventory differential strategies were proposed. Finally, by numerical simulation, preservation efforts, inventory changes and total supply chain profits were explored under the two models and corresponding suggestions were given.

Key words: fresh food supply chain; differential game; inventory control; fresh-keeping effort

收稿日期: 2019-05-10; 修回日期: 2019-05-31

作者简介: 陈务远, 男, 1994年生, 硕士. 研究方向: 科技政策与管理. E-mail: cwy@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 胡小丽, 博士. E-mail: huxl94@mail.ustc.edu.cn

0 引言

生鲜食品是一类特殊的易腐品. 由于生鲜食品具有易腐性、时鲜性、损耗性等特点以及消费者对生鲜食品质量和饮食健康的关注, 其库存控制成为库存研究中最具动态性和复杂性的问题之一^[1-2].

近年来, 国内外学者对于生鲜食品库存控制的研究主要集中在保质期约束、需求特征、变质率特点、优化算法等层面. Duan 和 Liao^[3]建立了一种在货架期约束下基于旧库存比率的一个供应商和多个买方构成的库存控制模型, 在集中控制模式下可以降低废弃率; Lee 和 Dye^[4]在允许短缺和部分积压情形下, 构建了库存需求率和可控变质率影响下的易逝品库存管理模型, 并给出了寻找最优保鲜技术成本和补货计划的算法; Taleizadeh 等^[5]假设市场需求是确定性和价格敏感的, 研究了一个供应商和多个非竞争的零售商组成的二级易腐品供应链, 通过 Stackelberg 博弈方法建立了供应商管理库存 (vendor managed inventory, VMI) 模型; Qin 等^[6]在生鲜食品数量和质量相似衰变率情形下, 构建了受库存、质量和价格影响的需求函数和定价库存联合模型; Majumder 等^[7]考虑延期支付、信贷期限因素, 研究了一个集成的供应商和零售商拥有两个仓库的库存模型, 通过广义简约梯度法 (generalized reduced gradient, GRG) 求得最优集成成本; 张思和张庆^[8]考虑服务水平影响, 提出了需求影响系数的概念, 研究了分散库存模式和集中库存控制模式, 建立了包含需求影响系数的电商渠道以及传统渠道库存管理模型; Soysal 等^[9]在环境和需求因素的不确定性下, 建立了易腐品库存路径问题 (inventory routing problem, IRP), 认为集成的库存模型可以节约总成本; Coelho 和 Laporte^[10]运用分支切割算法, 研究了易腐品库存管理, 提出旧货先卖和新货先卖两种策略.

另外, 一些学者围绕生鲜食品供应链库存的补货及降损策略^[11-12], 在考虑了库存种类多寡^[13-15]、仓库及供应链级数差异^[16-17]、资金时间价值或延期付款^[18-19]等因素的库存管理策略方面也有较多研究. 但以上研究大多是基于静态博弈的视角, 较少运用动态博弈的方法来分析. 动态博弈方法能够体现生鲜食品供应链库存变动持续性和过程动态性的特点, 而微分对策是一种动态博弈, 能够从连续时间动态角度进行分析, 是处理双方或多方连续动态冲突、

竞争或合作问题的有效方法, 目前其较多地被应用于广告合作^[20-21]、企业声誉^[22]、质量控制^[23-24]、供应链回收^[25]及协调^[33]等方面的研究, 而应用于生鲜食品供应链库存控制的研究则很少见. 生鲜电商通常的保鲜努力主要有采用射频识别技术 (RFID)、时温指示器 (TTI)、温度和湿度管理、冷链协同运输、新鲜度信号传递等方式, 技术层面较多结合了生化中的阿伦尼乌斯方程 (Arrhenius equation), 管理层面上, 通过协同管理生鲜质量进而影响企业声誉, 不管是技术还是管理, 均对生鲜企业的效益带来明显提高, 不仅影响市场需求也影响着库存变化. 本文考虑生鲜食品供应商和零售商的保鲜努力水平, 对基本变质库存模型进行改进, 构建生鲜食品价格和新鲜度因素影响下的时变需求率, 并引入收益共享比例与成本共担比例的合作参数, 在连续时间背景下采用变分法建立了联合库存控制 (jointly managed inventory, JMI) 和分散库存控制 (decentralized inventory management, DIM) 两种模式下生鲜食品供应链库存控制的微分对策模型, 并提出了相关策略, 为生鲜食品供应链库存控制问题提供了新的思路和方法.

由此可见, 针对生鲜食品具有易腐性、时鲜性、损耗性等特点, 本论文将以供应链视角, 研究基于保鲜努力和生鲜质量易逝特征的供应商和零售商库存保鲜努力策略以及相应的库存策略. 因此, 本研究的主要研究对象是生鲜供应链主体企业, 主要问题是生鲜供应商企业和零售商企业如何针对不同保鲜努力水平进行库存策略制定以及合作协调机制设计.

1 问题描述与基本假设

1.1 问题描述

本文所考虑的供应链是由一个供应商 S 和一个零售商 R 组成的二级生鲜食品供应链, 其供应链库存控制模式分为分散库存控制模式 (图 1) 和联合库存控制模式 (图 2), 前者是供应商和零售商各自单独管理库存并承担其库存和保鲜成本, 后者是由供应商和零售商在收益共享和成本共担机制下协同管理库存. 本论文所研究的是保鲜努力水平以及生鲜产品质量变化对于不同库存控制模式的决策.

由于联合库存控制可以降低供应链体系中的牛鞭效应, 减少库存周转从而保证生鲜食品质量, 因此在联合库存控制模式下, 为激励生鲜零售商与供应商长期合作, 供应商与零售商进行收益共享, 供应商

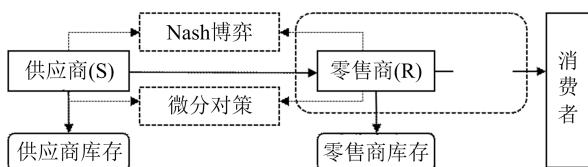


图 1 生鲜食品供应链分散库存控制模式

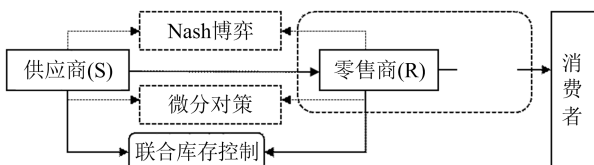
Fig. 1 Decentralized inventory management(DIM)
in fresh food supply chain

图 2 生鲜食品供应链联合库存控制模式

Fig. 2 Jointly managed inventory(JMI)
in fresh food supply chain

的收益分享比例占 $1 - \omega$, $\omega \in (0, 1)$, 并且零售商对联合库存和保鲜成本的共担比例为 $1 - \lambda$, $\lambda \in (0, 1)$. 收益共享是由上游供应商将其利润部分进行分成, 在上游供应商利润分成激励中, 下游的零售商需要分担联合库存和保鲜成本. 收益共享契约的决策主体是供应商, 成本共担决策的主体是零售商. 联合库存控制中收益共享和成本共担, 这在生鲜供应链上较为常见, 也是供应链纵向一体化的需求, 有利于企业提高库存的水平以及生鲜产品的时效性要求得到满足, 减少了由于双方分散决策带来的双重边际效益.

1.2 基本假设

① 生鲜食品为单一品种, 生鲜供应商和零售商有着相同且大于零的资金贴现率 ρ , 生鲜食品的交易过程在保质期内进行, 假定市场类型为垄断竞争市场, 并且生鲜食品供应商和零售商都是理性人, 决策依据自身利润最大化原则进行, 双方风险偏好为中性.

② 假设生鲜食品在流通过程中的价值损失体现在生鲜食品新鲜度变化上, 新鲜度的衰减由人为损耗和自然损耗所造成, 人为损耗指顾客拣选、挑剔过程的损耗, 自然损耗主要指温度和湿度影响的腐败变质, 借鉴文献[26-28]的研究, 假设生鲜食品的新鲜度变化函数为 $\theta(t) = \theta_0 e^{-\eta t}$, η 为腐败变质率.

③ 借鉴文献[29-30]的思想, 假设生鲜食品供应链的需求函数为 $D(t) = [c - \delta P(t)]\theta_0 e^{-\eta t}$, 本文将基本变质库存模型进行改进, 具体微分方程表示

如下:

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= -D(t) - \eta I(t) + \alpha S(t) + \beta R(t) = \\ &\alpha S(t) + \beta R(t) + [\delta P(t) - c]\theta_0 e^{-\eta t} - \eta I(t), \\ I(0) &= I_0. \end{aligned}$$

其中, α 为供应商的保鲜努力水平对生鲜食品联合库存的影响系数; β 为零售商的保鲜努力水平对生鲜食品联合库存的影响系数; δ 为零售市场销售价格对需求率的影响系数; c 为市场潜在需求常数; I_0 为初始库存; $S(t)$ 为供应商的保鲜努力水平; $R(t)$ 为零售商的保鲜努力水平; $P(t)$ 为零售市场销售价格.

④ 借鉴文献[31]对库存竞争性产品的研究, 本文假设渠道销售期望收益是关于库存的严格凹函数, 为方便研究, 本文将生鲜食品供应链的收益关于库存的函数表示为

$$\pi_{SR}(t) = \pi(I(t)) = aI(t) - bI(t)^2,$$

其中, a 和 b 为常数.

⑤ 供应商和零售商的保鲜努力成本函数为凸函数, 保鲜努力水平越高, 则继续提高的成本越高. 因此, 假设供应商和零售商的保鲜努力成本函数为

$$C_S(t) = \frac{1}{2}k_1 S^2(t), C_R(t) = \frac{1}{2}k_2 R^2(t).$$

其中, k_1 和 k_2 分别为供应商和零售商保鲜努力的成本系数.

本文其他符号含义如下: t 为时间变量; T 为生鲜食品保质期; h 为单位库存持有成本; $W(t)$ 为供应商给零售商的批发价格; $\pi_{SR}(t)$ 为 DIM 模式下生鲜食品供应链在时刻 t 的总收益; $\pi_C(t)$ 为 JMI 模式下生鲜食品供应链在时刻 t 的总收益; $J_S(t)$ 为生鲜食品供应商在销售期结束时的期望收益; $J_R(t)$ 为生鲜食品零售商在销售期结束时的期望收益; $S^*(t)$ 为供应商最优保鲜努力水平; $R^*(t)$ 为零售商的最优保鲜努力水平; $V_S(I(t), t)$ 为供应商从时刻 t 之后的库存状态最优值函数; $V_R(I(t), t)$ 为零售商从时刻 t 之后的库存状态最优值函数.

2 分散库存控制模式的微分对策模型

分散库存控制是一个由多个仓库组成的基于协调中心的库存控制模式, 各个仓库在地理位置上可以位于同一个地点, 也可以分布在不同地点, 但大多将库存建立在市场所在地区附近, 便于对市场需求

变化做出快速反应. 生鲜食品供应商和零售商各自单独管理库存时, 供应商和零售商承担各自的保鲜努力成本以及库存持有成本, 供应商库存和零售商库存初始库存量相互独立, 在该模式下供应商的保鲜努力水平会影响到零售商的库存, 而零售商的保鲜努力水平不会影响到供应商的库存, 易知供应商和零售商的库存微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_s(t) &= \alpha S(t) + [\delta W(t) - c]\theta_0 e^{-\eta} - \eta I_s(t), \\ \dot{I}_r(t) &= \alpha S(t) + \beta R(t) + \\ &\quad [\delta P(t) - c]\theta_0 e^{-\eta} - \eta I_r(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

根据上文假设, 可得生鲜食品供应商和零售商在生鲜食品保质期内的期望收益分别为

$$\left. \begin{aligned} J_S &= \int_0^T e^{-\alpha t} \{aI_s(t) - bI_s(t)^2 - [C_S(t) + hI_s(t)]\} dt, \\ J_R &= \int_0^T e^{-\alpha t} \{aI_r(t) - bI_r(t)^2 - [C_R(t) + hI_r(t)]\} dt \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

因此, 供应商和零售商的决策目标如下:

$$V_S(I_s(t), t) = \max_{S(t)} J_S(S(t)) = \max_{S(t)} \int_0^T e^{-\alpha t} \{aI_s(t) - bI_s(t)^2 - [C_S(t) + hI_s(t)]\} dt \quad (3)$$

$$V_R(I_r(t), t) = \max_{R(t)} J_R(R(t)) = \max_{R(t)} \int_0^T e^{-\alpha t} \{aI_r(t) - bI_r(t)^2 - [C_R(t) + hI_r(t)]\} dt \quad (4)$$

为方便论述, 下文将时间变量 t 符号省略, 记:

$$F_S(S(t), I_s(t), t) = aI_s - bI_s^2 - (C_S + hI_s),$$

$$F_R(R(t), I_r(t), t) = aI_r - bI_r^2 - (C_R + hI_r).$$

命题 2.1 生鲜食品供应链分散库存控制模式下的微分对策问题, 满足如下 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程^[32]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_S}{\partial t} &= -\max_{S(t)} \left\{ F_S(S(t), I_s(t), t) e^{-\alpha t} + \frac{\partial V_S}{\partial I_s} [\alpha S + (\delta W - c)\theta_0 e^{-\eta} - \eta I_s] \right\}, \\ \frac{\partial V_R}{\partial t} &= -\max_{R(t)} \left\{ F_R(R(t), I_r(t), t) e^{-\alpha t} + \frac{\partial V_S}{\partial I_r} [\alpha S + \beta R + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta} - \eta I_r] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由命题 2.1 易知, 供应商和零售商决策目标满足的 HJB 方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho V_S &= \max_{S(t)} \left\{ aI_s - bI_s^2 - [C_S + hI_s] + \frac{\partial V_S}{\partial I_s} [\alpha S + (\delta W - c)\theta_0 e^{-\eta} - \eta I_s] \right\} \\ \rho V_R &= \max_{R(t)} \left\{ aI_r - bI_r^2 - [C_R + hI_r] + \frac{\partial V_R}{\partial I_r} [\alpha S + \beta R + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta} - \eta I_r] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由式(6)对 S, R 求一阶条件, 可得

$$S = \frac{\alpha V'_S}{k_1}, R = \frac{\beta V'_R}{k_2} \quad (7)$$

命题 2.2 ①生鲜食品供应链分散库存控制模式下, 其最优的库存微分对策为

$$\begin{aligned} I_s(t) &= (I_0 + \frac{C_2}{A_1 + \eta} + \frac{B_1}{A_1}) e^{A_1 t} - \frac{B_1}{A_1} - \frac{C_2 e^{-\eta}}{A_1 + \eta}, \\ I_r(t) &= e^{A_2 t} - \frac{C_1 e^{-\eta}}{A_2 + \eta} - \frac{E}{A_2} + B_2 \left[\left(\frac{I_0}{A_2} + \frac{C_2}{(A_1 + \eta)A_2} + \frac{B_1}{A_2 A_1} \right) e^{A_1 t} - \frac{B_1}{A_2 A_1} - \frac{C_2 e^{-\eta}}{(A_1 + \eta)A_2} \right]. \end{aligned}$$

其中, $A_1 = \frac{2\alpha^2 l_1^*}{k_1} - \eta$, $A_2 = \frac{2\beta^2 l_2^*}{k_2} - \eta$, $B_1 = \frac{\alpha^2 m_1^*}{k_1}$, $B_2 = \frac{2\alpha^2 l_1^*}{k_1}$, $C_1 = (\delta P - c)\theta_0$, $C_2 = (\delta W - c)\theta_0$,

$$E = \frac{\alpha^2 m_1^*}{k_1} + \frac{\beta^2 m_2^*}{k_2}.$$

②供应商和零售商具有 Nash 均衡解 $S^*(t)$ 和 $R^*(t)$ 的必要条件是下列关于未知参数 l_1, l_2, m_1, m_2 ,

n_1, n_2 的方程组有解 $(l_1^*, l_2^*, m_1^*, m_2^*, n_1^*, n_2^*)$.

$$\begin{cases} \rho l_1 = -b + \frac{2\alpha^2 l_1^2}{k_1} - 2l_1 \eta, \\ \rho m_1 = a - h - \eta m_1 + \frac{2\alpha^2 l_1 m_1}{k_1} + 2l_1(\delta W - c)\theta_0 e^{-\eta}, \\ \rho n_1 = \frac{\alpha^2 m_1^2}{2k_1} + m_1(\delta W - c)\theta_0 e^{-\eta}, \\ \rho l_2 = -b - 2l_2 \eta + \frac{2\alpha^2 l_1^2}{k_1} + \frac{2\beta^2 l_2^2}{k_2}, \\ \rho m_2 = a - h - \eta m_2 + \frac{2\alpha^2 l_1 m_1}{k_1} + \frac{2\beta^2 l_2 m_2}{k_2} + 2l_2(\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta}, \\ \rho n_2 = \frac{\alpha^2 m_1^2}{2k_1} + \frac{\beta^2 m_2^2}{2k_2} + m_2(\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta}. \end{cases}$$

因此可知,在分散库存控制模式下生鲜食品供应链的总利润为

$$\begin{aligned} \pi_{SR}(t) = & a[I_s(t) + I_r(t)] - bI_s(t)^2 - bI_r(t)^2 = \\ & (aI_0 + \frac{aC_2}{B_1} + \frac{aB_1}{A_1})e^{A_1 t} - \frac{aB_1}{A_1} - \frac{aC_2 e^{-\eta}}{B_1} + a e^{A_2 t} + \frac{aC_1 e^{-\eta}}{A_2 + \eta} - \\ & \frac{aE}{A_2} + B_2[\frac{aI_0}{A_2} + \frac{aC_2}{B_1 A_2} + \frac{aB_1}{A_2 A_1}]e^{A_1 t} - \frac{aB_1}{A_2 A_1} - \frac{aC_2 e^{-\eta}}{B_1 A_2}] - b[(I_0 + \frac{C_2}{B_1} + \frac{B_1}{A_1})e^{A_1 t} - \frac{B_1}{A_1} - \frac{C_2 e^{-\eta}}{B_1}]^2 - \\ & b\left\{e^{A_2 t} + \frac{C_1 e^{-\eta}}{A_2 + \eta} - \frac{E}{A_2} + B_2[\frac{I_0}{A_2} + \frac{C_2}{B_1 A_2} + \frac{B_1}{A_2 A_1}]e^{A_1 t} - \frac{B_1}{A_2 A_1} - \frac{C_2 e^{-\eta}}{B_1 A_2}\right\}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

命题 2.1 和 2.2 的证明见附录.

3 联合库存控制模式微分对策模型

联合库存控制模式是一种在 VMI 的基础上发展起来的上下游企业权力责任平衡和风险共担的库存管理模式. 联合库存管理强调供应链中各个节点同时参与,共同制定库存计划. 由于生鲜食品的易腐性、时鲜性、损耗性等特点,其在生产加工、运输配送、销售存储等过程中价值损失较大,而联合库存控制是一种基于协调中心的库存控制方法,可以解决供应链体系中的牛鞭效应并降低库存成本. 在联合库存控制模式下,根据上文假设,可得生鲜食品供应商和零售商在生鲜食品保质期内的期望收益分别为

$$J_S(S(t)) = \int_0^T e^{-\alpha t} \{[(1 - \omega)\pi_C(t)] - \lambda[C_S(t) + hI(t)]\} dt \quad (9)$$

$$J_R(R(t)) = \int_0^T e^{-\alpha t} \{[\omega\pi_C(t)] - (1 - \lambda)[C_S(t) + hI(t)]\} dt \quad (10)$$

因此供应商和零售商的决策目标如下:

$$V_S(I(t), t) = \max_{S(t)} J_S(S(t)) = \max_{S(t)} \int_0^T e^{-\alpha t} \{[(1 - \omega)\pi_C(t)] - \lambda[C_S(t) + hI(t)]\} dt \quad (11)$$

$$V_R(I(t), t) = \max_{R(t)} J_R(R(t)) = \max_{R(t)} \int_0^T e^{-\alpha t} \{[\omega\pi_C(t)] - (1 - \lambda)[C_S(t) + hI(t)]\} dt \quad (12)$$

命题 3.1 ① 生鲜食品供应链联合库存控制模式下,其最优的库存微分对策为

$$I^*(t) = (I_0 + \frac{C_1}{A_3 + \eta} + \frac{B_3}{A_3})e^{A_3 t} - \frac{B_3}{A_3} - \frac{C_1 e^{-\eta}}{A_3 + \eta},$$

其中, $A_3 = \frac{2\alpha^2 l_3^*}{\lambda k_1} - \eta$, $B_3 = \frac{\alpha^2 m_3^*}{\lambda k_1}$.

② 联合库存控制模式下有 Nash 均衡解 $S^*(t)$ 的必要条件是下列关于未知参数 $l_3, l_4, m_3, m_4, n_3, n_4$ 的

方程组有解 $(l_3^*, l_4^*, m_3^*, m_4^*, n_3^*, n_4^*)$.

$$\begin{cases} \rho l_3 = -b(1-\omega) + \frac{2\alpha^2 l_3^2}{\lambda k_1} - 2l_3 \eta, \\ \rho m_3 = a(1-\omega) + \frac{2\alpha^2 l_3 m_3}{\lambda k_1} + 2l_3(\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta} - \lambda h - m_3 \eta, \\ \rho n_3 = \frac{\alpha^2 m_3^2}{2\lambda k_1} + m_3(\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta}, \\ \rho l_4 = -b\omega - \frac{2(1-\lambda)\alpha^2 l_3^2}{\lambda^2 k_1} + \frac{4\alpha^2 l_3 l_4}{\lambda k_1} - 2l_4 \eta, \\ \rho m_4 = a\omega - \frac{2(1-\lambda)\alpha^2 l_3 m_3}{\lambda^2 k_1} + \frac{2\alpha^2(l_3 m_4 + l_4 m_3)}{\lambda k_1} + 2l_4(\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta} - (1-\lambda)h - m_4 \eta, \\ \rho n_4 = -\frac{(1-\lambda)\alpha^2 m_3^2}{2\lambda k_1} + \frac{\alpha^2 m_3 m_4}{\lambda k_1} + m_4(\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta}. \end{cases}$$

因此可知,在联合库存控制模式下生鲜食品供应链的总利润为

$$\pi_C(t) = (aI_0 + \frac{aC_1}{A_3 + \eta} + \frac{aB_3}{A_3})e^{A_3 t} - \frac{aB_3}{A_3} - \frac{aC_1 e^{-\eta}}{A_3 + \eta} - b[(I_0 + \frac{C_1}{A_3 + \eta} + \frac{B_3}{A_3})e^{A_3 t} - \frac{B_3}{A_3} - \frac{C_1 e^{-\eta}}{A_3 + \eta}]^2 \tag{13}$$

命题 3.1 的证明见附录.

由上述可知,在分散库存控制模式和联合库存控制模式下,生鲜食品供应商和零售商的库存和保鲜努力水平的最优对策会随着时间而改变,这体现了生鲜食品供应商和零售商双方博弈关系的时间关联,由于博弈与时间密切相关,某一时刻的最优库存和最优保鲜努力水平可能在下一时刻不能带来最大收益,因此动态的、随时间变化的库存和保鲜努力策略才具有实际应用价值. 由式(8)和(13)可知,分散库存控制模式和联合库存控制模式下生鲜食品供应链的总利润是关于时间不断变化的,考虑到本文模型结果的形式相对复杂,为比较分散库存控制模式和联合库存控制模式下生鲜食品供应商和零售商的最优保鲜努力水平差异、库存变化以及供应链的总利润均衡变化情况,下文将进行算例仿真来进一步分析.

4 数值算例

本节对上文模型进行数值算例分析,借助 MATLAB 求得约束方程组的解析解,并在软件 Origin 9 上进行数据绘图. 为方便计算说明,算例部分不考虑量纲影响,模型所设参数具体取值如下: $\rho = 0.05; \eta = 0.02; \alpha = 0.6; \beta = 0.4; \delta = 0.5; c = 25; \theta_0 = 1; W = -0.04t^2 + 0.9t + 9; I_0 = 1000; k_1 = 0.6;$

$k_2 = 0.4; a = 8; b = 0.0017; h = 6; T = 30; P = -0.05t^2 + t + 15; \lambda = 0.75; \omega = 0.25.$

将以上参数代入命题 2.2②和 3.1②中的约束方程组,求得部分解的结果如下:

$$\begin{aligned} l_1 &\approx -0.0156; l_2 \approx -0.0139; \\ l_3 &\approx -0.0117; l_4 \approx -0.0039. \end{aligned}$$

由图 3 可知,一个销售周期内,在分散库存控制模式下,生鲜食品供应商的最优保鲜努力水平逐渐提高,而零售商的最优保鲜努力水平先降低后提高,并且不难发现,生鲜食品销售初期和接近保质期时零售商的最优保鲜努力水平高于供应商的,销售中期时供应商的最优保鲜努力水平高于零售商的;在联合库存控制模式下,供应商的最优保鲜努力水平不断提高,且在销售中期高于分散库存控制模式下的供应商的最优保鲜努力水平.

由图 4 可知,生鲜食品供应链在分散库存控制模式下,供应商的库存随着时间呈下降趋势,零售商的库存随着时间先有增加后有逐渐下降趋势;在联合库存控制模式下,供应链的总库存随着时间呈下降趋势,并且该模式下,产品销售的前期和接近保质期时,供应链的总库存要高于分散库存控制模式下的,而销售中期时则低于分散库存控制模式下的. 由此可见,对于生鲜食品供应链企业而言,做好库存管

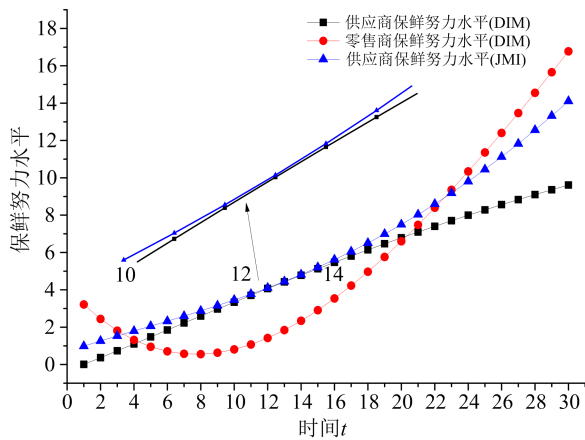


图 3 DIM 模式和 JMI 模式下生鲜食品供应商和零售商的保鲜努力水平变化

Fig. 3 Convergent level of fresh food preservation efforts of supplier and retailer under DIM and JMI

理的关键在于在生鲜食品的销售初期做好库存的预警和有效周转,以防仓库爆满,并且在生鲜食品的货架期来临之际,供应商应积极做好宣传促销,因为在生鲜食品保质期到来前,供应商的库存水平比较稳定,容易造成生鲜食品长期积压,难以销售。

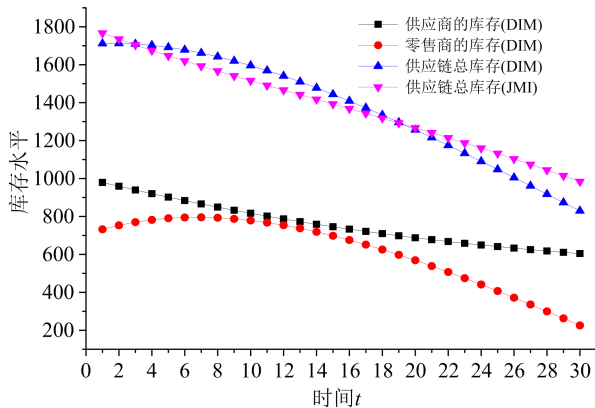


图 4 DIM 模式和 JMI 模式下生鲜食品供应链库存随时间变化情况

Fig. 4 Convergent level of inventory of fresh food supply chain under DIM and JMI

由图 5 可知,在分散和联合库存控制模式下,随着生鲜食品保质期的临近,其供应链总利润都呈下降趋势,并且在生鲜食品销售的前中期,分散库存控制模式下的供应链总利润高于联合库存控制模式下的,而临近生鲜食品保质期时则正好相反。另外,对于供应商而言,联合库存模式比分散控制模式能获得更多的利润,而对于零售商而言,在生鲜食品保质期临近时,联合库存控制模式较优。由此可见,对于生鲜食品供应链企业来说,在产品的销售中期和末

期寻求合作机制,建立库存联合控制中心是有助于供应链整体和主体企业利润增加的。

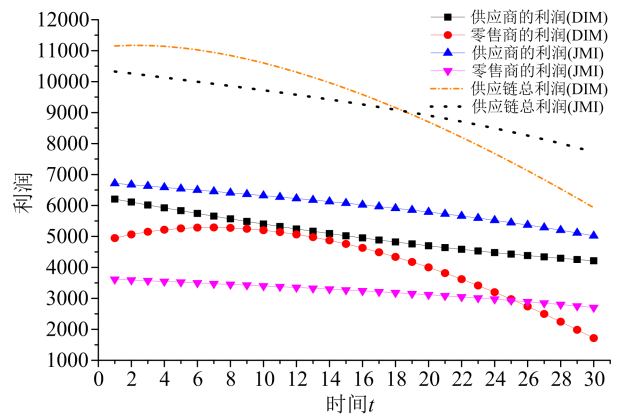


图 5 DIM 模式和 JMI 模式下生鲜食品供应链总利润随时间变化情况

Fig. 5 Convergent level of total profit of fresh food supply chain under DIM and JMI

5 结论

本文对生鲜食品供应链库存控制问题进行了研究,在库存建模中,考虑了生鲜食品供应商和零售商保鲜努力水平、生鲜食品价格、新鲜度因素对生鲜食品时变需求率的影响,将基本变质库存模型进行了改进,考虑收益共享参数和成本共担参数,并在连续时间背景下采用变分法建立了联合库存控制和分散库存控制两种模式下的供应链库存控制的微分对策模型。通过算例仿真,不难发现通过收益共享和成本共担契约的合理设计,可以一定程度上提高供应链的总利润以及增加企业利润。由于在库存微分对策求解过程中,关于泛函的变分问题是否有解、是否具有解析解严格依赖于关于库存泛函的微分方程具体结构,因此在非退化情形下结合实践中参数差异进行求解仍是一个难点。同时,考虑生鲜食品双渠道情形、库存缺货或交付延迟等情况也将是本文后续的研究方向。

参考文献(References)

- [1] BAKKER M, RIEZEBOS J, TEUNTER R H. Review of inventory systems with deterioration since 2001[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 221: 275-284.
- [2] GIRI B C, SHARMA S. An integrated inventory model for a deteriorating item with allowable shortages and credit linked wholesale price [J]. Optimization Letters, 2015, 9: 1149-1175.
- [3] DUAN Q, LIAO T W. A new age-based

- replenishment policy for supply chain inventory optimization of highly perishable products[J]. *Int J Production Economics*, 2013, 145: 658-671.
- [4] LEE Y P, DYE C Y. An inventory model for deteriorating items under stock-dependent demand and controllable deterioration rate [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 63: 474-482.
- [5] TALEIZADEH A A, NOORI-DARYAN M, CÁRDENAS-BARRÓN L E. Joint optimization of price, replenishment frequency, replenishment cycle and production rate in vendor managed inventory system with deteriorating items[J]. *Int J Production Economics*, 2015, 159: 285-295.
- [6] QIN Yiyan, WANG Jianjun, WEI Caimin. Joint pricing and inventory control for fresh produce and foods with quality and physical quantity deteriorating simultaneously [J]. *Int J Production Economics*, 2014, 152: 42-48.
- [7] MAJUMDER P, BERA U K, MAITI M. An EPQ model for two-warehouse in unremitting release pattern with two-level trade credit period concerning both supplier and retailer [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 274: 430-458.
- [8] 张思, 张庆. 考虑服务水平影响的双渠道分散库存控制策略研究[J]. *工业工程*, 2013, 16(6): 107-112.
- ZHANG Si, ZHANG Qing. Decentralized inventory control strategy in dual-channel supply chain with service level influence [J]. *Industrial Engineering Journal*, 2013, 16(6): 107-112.
- [9] SOYSAL M, BLOEMHOF-RUWAARD J M, HAIJEMA R. Modeling an inventory routing problem for perishable products with environmental considerations and demand uncertainty [J]. *Int J Production Economics*, 2015, 164: 118-133.
- [10] COELHO L C, LAPORTE G. Optimal joint replenishment, delivery and inventory management policies for perishable products [J]. *Computers & Operations Research*, 2014, 47: 42-52.
- [11] OLSSON F, TYDESJÖ P. Inventory problems with perishable items; Fixed lifetimes and backlogging[J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 202(1): 131-137.
- [12] PANG Z. Optimal dynamic pricing and inventory control with stock deterioration and partial backordering[J]. *Operations Research Letters*, 2011, 39(5): 375-379.
- [13] SARACOGLU I, TOPALOGLU S, KESKINTURK T. A genetic algorithm approach for multi-product multi-period continuous review inventory models[J]. *Expert Systems with Applications*, 2014, 41: 8189-8202.
- [14] SAINATHAN A. Pricing and replenishment of competing perishable product variants under dynamic demand substitution [J]. *Production and Operations Management*, 2013, 22(5): 1157-1181.
- [15] KOUKI C, JEMAI Z, MINNER S. A lost sales (r, Q) inventory control model for perishables with fixed lifetime and lead time[J]. *International Journal of Production Economics*, 2015, 168: 143-157.
- [16] JAGGI C K, KHANNA A, VERMA P. Two-warehouse partial backlogging inventory model for deteriorating items with linear trend in demand under inflationary conditions [J]. *International Journal of Systems Science*, 2011, 42(7): 1185-1196.
- [17] JIA J, HU Q. Dynamic ordering and pricing for a perishable goods supply chain [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2011, 60(2): 302-309.
- [18] MUSA A, SANI B. Inventory ordering policies of delayed deteriorating items under permissible delay in payments [J]. *International Journal of Production Economics*, 2012, 136(1): 75-83.
- [19] JAGGI C K, KHANNA A, NIDHI N. Effects of inflation and time value of money on an inventory system with deteriorating items and partially backlogged shortages [J]. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 2016, 7: 267-282.
- [20] JORGENSEN S, ZACCOUR G. Channel coordination over time: Incentive equilibria and credibility [J]. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 2003, 27(5): 801-822.
- [21] 熊中楷, 聂佳佳, 熊榆. 零售商竞争下纵向合作广告的微分对策模型[J]. *管理科学学报*, 2010, 13(6): 11-22.
- XIONG Zhongkai, NIE Jiajia, XIONG Yu. Vertical cooperative advertising model with competing retailers in supply chains with stochastic differential game[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(6): 11-22.
- [22] 张建军, 赵晋, 张艳霞. 基于连续时间动态博弈的供应链声誉及其微分对策研究[J]. *管理工程学报*, 2012, 26(1): 143-149.
- ZHANG Jianjun, ZHAO Jin, ZHANG Yanxia. Supply chain reputation and its differential game based on dynamic game in continuous time [J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2012, 26(1): 143-149.
- [23] 夏兆敏, 孙世民. 基于微分博弈的二级猪肉供应链质量行为协调机制研究 [J]. *运筹与管理*, 2014, 23(2): 198-205.
- XIA Zhaomin, SUN Shimin. Coordination mechanism

- of quality behavior in two-echelon pork supply chain based on differential game[J]. *Operations Research and Management Science*, 2014, 23(2): 198-205.
- [24] 洪江涛, 黄沛. 两级供应链上质量控制的动态协调机制研究[J]. *管理工程学报*, 2011, 25(2): 62-65.
HONG Jiangtao, HUANG Pei. Dynamic coordination mechanisms of quality control in two-echelon supply chains [J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2011, 25(2): 62-65.
- [25] 黄宗盛, 王罕, 代云珍. 零售商竞争下基于微分对策的制造商回收控制策略[J]. *系统工程*, 2015, 33(8): 24-32.
HUANG Zongsheng, WANG Han, DAI Yunzhen. Differential game model of manufacturer collecting closed-loop supply chain with competing retailers[J]. *Systems Engineering*, 2015, 33(8): 24-32.
- [26] BLACKBURN J, SCUDDER G. Supply chain strategies for perishable products: The case of fresh produce[J]. *Production and Operations Management Society*, 2009, 18(2): 129-137.
- [27] CAI Xiaoqiang, CHEN Jian, XIAO Yongbo, et al. Optimization and coordination of fresh product supply chains with freshness-keeping effort [J]. *Production and Operations Management Society*, 2010, 19(3): 261-278.
- [28] 王磊, 但斌. 考虑消费者效用的生鲜农产品供应链保鲜激励机制研究[J]. *管理工程学报*, 2015, 29(1): 200-205.
WANG Lei, DAN Bin. The incentive mechanism for preservation in fresh agricultural supply chain considering consumer utility[J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2015, 29(1): 200-205.
- [29] JORGENSEN S, TABOUBI S, ZACCOUR G. Cooperative advertising in a marketing channel [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2001, 110(1): 145-158.
- [30] GHARE P M, SCHRADER G P. A model for an exponentially decaying inventory [J]. *Journal of Industrial Engineering*, 1963, 14(5): 238-243.
- [31] 杨建功, 王国庆. 库存竞争性产品的 VMI 收益分享合同模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2009, 29(6): 47-58.
YANG Jianguo, WANG Guoqing. Inventory competitive products' revenue-sharing contract under VMI[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2009, 29(6): 47-58.
- [32] DOCKNER E, JORGENSEN N, VAN L, et al. Differential games in economics and management science[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 97-103.
- [33] 唐润, 彭洋洋. 基于微分对策的生鲜食品供应链双渠道协调机制[J]. *计算机集成制造系统*, 2018, 24(4): 1034-1045.
TANG Run, PENG Yangyang. Coordination mechanism of dual channels of fresh food supply chain based on differential game[J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2018, 24(4): 1034-1045.

附录

命题 2.1, 2.2 和 3.1 的证明如下.

命题 2.1 证明 由动态规划最优性原理知, 若 $S^*(s) (t \leq s)$ 是供应商从 t 时刻供应商库存 $I_s(t)$ 开始的最优保鲜努力水平, 则 $S^*(s) (t \leq s)$ 一定是从 $t + \Delta t$ 时刻供应商库存 $I_s(t + \Delta t)$ 开始的最优保鲜努力水平, 由式(3)知:

$$V_S(I_s(t + \Delta t), t + \Delta t) = \max_{S(t)} \int_{t+\Delta t}^T F_S(S(s), I_s(s), s) e^{-\rho s} ds,$$

又:

$$\begin{aligned} V_S(I_s(t), t) &= \max_{S(t)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} F_S(S(s), I_s(s), s) e^{-\rho s} ds + \int_{t+\Delta t}^T F_S(S(s), I_s(s), s) e^{-\rho s} ds \right\} = \\ &= \max_{S(t)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} F_S(S(s), I_s(s), s) e^{-\rho s} ds + V_S(I_s(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\} \end{aligned} \quad (A1)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$, 则有

$$\int_t^{t+\Delta t} F_S(S(s), I_s(s), s) e^{-\rho s} ds \approx F_S(S(s), I_s(s), s) e^{-\rho s} \cdot \Delta t \quad (A2)$$

并且 $I_s(t + \Delta t) \approx I_s(t) + I'_s(t)\Delta t$, $\therefore V_S(I_s(t + \Delta t), t + \Delta t) \approx V_S(I_s(t) + I'_s(t)\Delta t, t + \Delta t)$.

将 $V_S(I_s(t) + I'_s(t)\Delta t, t + \Delta t)$ 对 Δt 进行 Taylor 展开, 有

$$V_S(I_s(t) + \Delta t, t + \Delta t) \approx V_S(I_s(t), t) + \frac{\partial V_S}{\partial I_s(t)} I'_s(t)\Delta t + \frac{\partial V_S}{\partial t} \Delta t \tag{A3}$$

将式(A2)和(A3)代入到式(A1), 有

$$V_S(I_s(t), t) \approx \max_{S(t)} \left\{ F_S(S(s), I_s(s), s) e^{-\rho s} \cdot \Delta t + V_S(I_s(t), t) + \frac{\partial V_S}{\partial I_s(t)} I'_s(t)\Delta t + \frac{\partial V_S}{\partial t} \Delta t \right\} \Rightarrow$$

$$0 = \max_{S(t)} \left\{ F_S(S(s), I_s(s), s) e^{-\rho s} \cdot \Delta t + \frac{\partial V_S}{\partial I_s(t)} I'_s(t)\Delta t + \frac{\partial V_S}{\partial t} \Delta t \right\}.$$

即得到式(A3)所示决策目标的 HJB 方程:

$$\frac{\partial V_S}{\partial t} = -\max_{S(t)} \left\{ F_S(S(t), I_s(t), t) e^{-\rho t} + \frac{\partial V_S}{\partial I_s} [\alpha S + (\delta W - c)\theta_0 e^{-\eta} - \eta I_s] \right\}.$$

同理可证零售商决策目标的 HJB 方程, 因此命题 2.1 得证.

命题 2.2 证明 将式(10)代入到式(9), 整理得

$$\left. \begin{aligned} \rho V_S &= -bI_s^2 + (a - h - \eta V'_S)I_s + \frac{\alpha^2 V_S'^2}{2k_1} + V'_S(\delta W - c)\theta_0 e^{-\eta}, \\ \rho V_R &= -bI_r^2 + (a - h - \eta V'_R)I_r + \left(\frac{\alpha^2 V_S'^2}{2k_1} + \frac{\beta^2 V_R'^2}{2k_2}\right) + V'_R(\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta} \end{aligned} \right\} \tag{A4}$$

由式(A4)易知其存在关于 I_s 和 I_r 的二次多项式的解, 因此不妨设分散库存控制模式下供应商和零售商的最优值函数具有如下表达式:

$$V_S = l_1 I_s^2 + m_1 I_s + n_1, \quad V_R = l_2 I_r^2 + m_2 I_r + n_2 \tag{A5}$$

式中, $l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2$ 为待定的未知系数, 将式(A5)和 $V'_S = 2l_1 I_s + m_1, V'_R = 2l_2 I_r + m_2$ 代入到式(A4), 整理得

$$\left. \begin{aligned} \rho l_1 &= -b + \frac{2\alpha^2 l_1^2}{k_1} - 2l_1 \eta, \\ \rho m_1 &= a - h - \eta m_1 + \frac{2\alpha^2 l_1 m_1}{k_1} + 2l_1(\delta W - c)\theta_0 e^{-\eta}, \\ \rho n_1 &= \frac{\alpha^2 m_1^2}{2k_1} + m_1(\delta W - c)\theta_0 e^{-\eta}, \\ \rho l_2 &= -b - 2l_2 \eta + \frac{2\alpha^2 l_1^2}{k_1} + \frac{2\beta^2 l_2^2}{k_2}, \\ \rho m_2 &= a - h - \eta m_2 + \frac{2\alpha^2 l_1 m_1}{k_1} + \frac{2\beta^2 l_2 m_2}{k_2} + 2l_2(\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta}, \\ \rho n_2 &= \frac{\alpha^2 m_1^2}{2k_1} + \frac{\beta^2 m_2^2}{2k_2} + m_2(\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta}. \end{aligned} \right\} \tag{A6}$$

求得在分散库存控制模式下, 供应商和零售商的最优保鲜努力水平为

$$S^* = \frac{2\alpha l_1^* I_s + \alpha m_1^*}{k_1}, \quad R^* = \frac{2\beta l_2^* I_r + \beta m_2^*}{k_2} \tag{A7}$$

将式(A7)代入到式(A1)整理得

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_s(t) &= \left[\frac{2\alpha^2 l_1^*}{k_1} - \eta \right] I_s + \frac{\alpha^2 m_1^*}{k_1} + (\delta W - c)\theta_0 e^{-\eta}, \\ \dot{I}_r(t) &= \frac{2\alpha^2 l_1^*}{k_1} I_s + \left(\frac{2\beta^2 l_2^*}{k_2} - \eta \right) I_r + \frac{\alpha^2 m_1^*}{k_1} + \frac{\beta^2 m_2^*}{k_2} + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta} \end{aligned} \right\} \tag{A8}$$

记 $A_1 = \frac{2\alpha^2 l_1^*}{k_1} - \eta, A_2 = \frac{2\beta^2 l_2^*}{k_2} - \eta, B_1 = \frac{\alpha^2 m_1^*}{k_1}, B_2 = \frac{2\alpha^2 l_1^*}{k_1}, C_1 = (\delta P - c)\theta_0, C_2 = (\delta W - c)\theta_0, E = \frac{\alpha^2 m_1^*}{k_1} +$

$\frac{\beta^2 m_2^*}{k_2}$, 借助 Matlab 软件 dsolve 函数, 求得满足边界条件 $I_s(0) = I_0$ 的特解为

$$\left. \begin{aligned} I_s(t) &= (I_0 + \frac{C_2}{B_1} + \frac{B_1}{A_1})e^{A_1 t} - \frac{B_1}{A_1} - \frac{C_2 e^{-\eta t}}{B_1}, \\ I_r(t) &= e^{A_2 t} - \frac{C_1 e^{-\eta t}}{A_2 + \eta} - \frac{E}{A_2} + B_2 \left[(\frac{I_0}{A_2} + \frac{C_2}{B_1 A_2} + \frac{B_1}{A_2 A_1})e^{A_1 t} - \frac{B_1}{A_2 A_1} - \frac{C_2 e^{-\eta t}}{B_1 A_2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A9})$$

所以, 命题 2.2 得证.

命题 3.1 证明 由 HJB 方程的等价形式, 可得下式成立:

$$\left. \begin{aligned} \rho V_S &= \max_{S(t)} \left\{ F_S(S(t), I(t), t) + \frac{\partial V_S}{\partial I} [\alpha S + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} - \eta I] \right\}, \\ \rho V_R &= \max_{R(t)} \left\{ F_R(S(t), I(t), t) + \frac{\partial V_R}{\partial I} [\alpha S + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} - \eta I] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A10})$$

由式(A10)对 S 求一阶条件可得

$$S = \frac{\alpha V'_S}{\lambda k_1} \quad (\text{A11})$$

将式(A11)代入到式(A10), 整理得

$$\left. \begin{aligned} \rho V_S &= (1 - \omega)(aI - bI^2) - \lambda \left(\frac{\alpha^2 V_S'^2}{2\lambda^2 k_1} + hI \right) + V_S' \left[\frac{\alpha^2 V_S'}{\lambda k_1} + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} - \eta I \right], \\ \rho V_R &= \omega(aI - bI^2) - (1 - \lambda) \left(\frac{\alpha^2 V_S'^2}{2\lambda^2 k_1} + hI \right) + V_R' \left[\frac{\alpha^2 V_S'}{\lambda k_1} + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} - \eta I \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A12})$$

由式(A12)微分方程组的阶数, 易知 V_S 和 V_R 存在关于 I 的二次多项式解, 因此不妨设供应商和零售商的最优值函数具有以下表达式:

$$\left. \begin{aligned} V_S &= l_3 I^2 + m_3 I + n_3, \\ V_R &= l_4 I^2 + m_4 I + n_4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A13})$$

式中, $l_3, l_4, m_3, m_4, n_3, n_4$ 为待定未知系数, 将式(A13)代入(A12), 得

$$\left. \begin{aligned} \rho l_3 I^2 + \rho m_3 I + \rho n_3 &= (1 - \omega)(aI - bI^2) - \lambda \left(\frac{\alpha^2 V_S'^2}{2\lambda^2 k_1} + hI \right) + V_S' \left[\frac{\alpha^2 V_S'}{\lambda k_1} + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} - \eta I \right], \\ \rho l_4 I^2 + \rho m_4 I + \rho n_4 &= \omega(aI - bI^2) - (1 - \lambda) \left(\frac{\alpha^2 V_S'^2}{2\lambda^2 k_1} + hI \right) + V_R' \left[\frac{\alpha^2 V_S'}{\lambda k_1} + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} - \eta I \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A14})$$

将 $V_S' = 2l_3 I + m_3$ 和 $V_R' = 2l_4 I + m_4$ 代入式(A14), 整理得

$$\left. \begin{aligned} \rho l_3 &= -b(1 - \omega) + \frac{2\alpha^2 l_3^2}{\lambda k_1} - 2l_3 \eta, \\ \rho m_3 &= a(1 - \omega) + \frac{2\alpha^2 l_3 m_3}{\lambda k_1} + 2l_3 (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} - \lambda h - m_3 \eta, \\ \rho n_3 &= \frac{\alpha^2 m_3^2}{2\lambda k_1} + m_3 (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t}, \\ \rho l_4 &= -b\omega - \frac{2(1 - \lambda)\alpha^2 l_3^2}{\lambda^2 k_1} + \frac{4\alpha^2 l_3 l_4}{\lambda k_1} - 2l_4 \eta, \\ \rho m_4 &= a\omega - \frac{2(1 - \lambda)\alpha^2 l_3 m_3}{\lambda^2 k_1} + \frac{2\alpha^2 (l_3 m_4 + l_4 m_3)}{\lambda k_1} + \\ &\quad 2l_4 (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} - (1 - \lambda)h - m_4 \eta, \\ \rho n_4 &= -\frac{(1 - \lambda)\alpha^2 m_3^2}{2\lambda k_1} + \frac{\alpha^2 m_3 m_4}{\lambda k_1} + m_4 (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A15})$$

因此,若方程组(A15)有解 $(l_3^*, l_4^*, m_3^*, m_4^*, n_3^*, n_4^*)$,则式(A12)可以表示为

$$\left. \begin{aligned} V_S &= l_3^* I^2 + m_3^* I + n_3^* \\ V_R &= l_4^* I^2 + m_4^* I + n_4^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_S' &= 2l_3^* I + m_3^* \\ V_R' &= 2l_4^* I + m_4^* \end{aligned} \right\} \quad (\text{A16})$$

将式(A16)代入式(A11),求得联合库存控制模式下的最优保鲜努力水平为

$$S^* = \frac{2\alpha l_3^* I + \alpha m_3^*}{\lambda k_1} \quad (\text{A17})$$

将式(A17)代入到联合库存控制模式下的生鲜食品库存微分方程,即:

$$\dot{I}(t) = \alpha S(t) + [\delta P(t) - c]\theta_0 e^{-\eta t} - \eta I(t),$$

通过整理得到

$$\dot{I}(t) = \frac{2\alpha^2 l_3^* I + \alpha^2 m_3^*}{\lambda k_1} + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} - \eta I = \left[\frac{2\alpha^2 l_3^*}{\lambda k_1} - \eta \right] I + \frac{\alpha^2 m_3^*}{\lambda k_1} + (\delta P - c)\theta_0 e^{-\eta t} \quad (\text{A18})$$

记 $A_3 = \frac{2\alpha^2 l_3^*}{\lambda k_1} - \eta$, $B_3 = \frac{\alpha^2 m_3^*}{\lambda k_1}$, 则一阶非齐次线性微分方程 $\dot{I}(t) = A_3 I + B_3 + C_1 e^{-\eta t}$ 具有通解 $I(t) = e^{\int A_3 dt} \left(\int [B_3 + C_1 e^{-\eta t}] e^{-\int A_3 dt} dt + D \right)$, D 为任意常数. 借助 Matlab 软件 dsolve 函数,求得满足边界条件 $I(0) = I_0$ 的特解为

$$I(t) = \left(I_0 + \frac{C_1}{A_3 + \eta} + \frac{B_3}{A_3} \right) e^{A_3 t} - \frac{B_3}{A_3} - \frac{C_1 e^{-\eta t}}{A_3 + \eta} \quad (\text{A19})$$

命题 3.1 得证.