第49卷第5期 中国科学技术大学学报 Vol. 49, No. 5
2019年5月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA May 2019

文章编号:0253-2778(2019)05-0390-07

基于精细大偏差下$\mathscr{D}$族随机变量的随机和及其最大值的封闭性

郭 多,杭 敏,汪世界

(安徽大学数学科学学院,安徽合肥 230601)

摘要:令$X=\{X_1,X_2,\cdots\}$是一列独立但不同分布的随机变量序列,η是另一整数值计数随机变量,且独立于X.研究了随机和$S_\eta=\sum_{k=1}^{\eta}X_k$和随机和的最大值$S_{(\eta)}=\max\{S_0,\cdots,S_\eta\}$.假设对任意的$k\geqslant 1$,$X_k$为$\mathscr{D}$族随机变量,利用$\mathscr{D}$族随机变量精细大偏差的结果,在一些条件下,证明了$S_\eta$和$S_{(\eta)}$仍属于$\mathscr{D}$族.这拓展了前人研究的相关结果.

关键词:随机和;最大值;精细大偏差;封闭性

中图分类号:O211.4 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2019.05.006

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 60E05; Secondary 62E10

引用格式:郭多,杭敏,汪世界. 基于精细大偏差下$\mathscr{D}$族随机变量的随机和及其最大值的封闭性[J]. 中国科学技术大学学报,2019,49(5):390-396.

GUO Duo, HANG Min, WANG Shijie. Closure property of random sum and its maximum of random variables from class $\mathscr{D}$ based on precise large deviation principles[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2019,49(5):390-396.

Closure property of random sum and its maximum of random variables from class $\mathscr{D}$ based on precise large deviation principles

GUO Duo, HANG Min, WANG Shijie

(*School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei* 230601, *China*)

Abstract: Let $X=\{X_1,X_2,\cdots\}$ be a sequence of independent but not necessarily identically distributed random variables, and let η be an integer-valued counting random variable independent of X. Random sum $S_\eta=\sum_{k=1}^{\eta}X_k$ and its maximum $S_{(\eta)}=\max\{S_0,\cdots,S_\eta\}$ were studied. Assuming that each X_k belongs to the class of $\mathscr{D}$, by using the result of the precise large deviation principles on class $\mathscr{D}$, it was proven that the distributions of S_η and $S_{(\eta)}$ belong to the same class under some conditions. The obtained results expand the related ones of previous studies.

Key words: random sum; random maximum; precise large deviation; closure property

收稿日期:2018-05-31;**修回日期**:2019-06-03

基金项目:安徽省自然科学基金(1808085MA16),安徽大学科研训练计划项目(KYXL2016005)资助.

作者简介:郭多,女,1992年生,硕士.研究方向:保险精算.E-mail:1095062147@qq.com

通讯作者:汪世界,博士/副教授.E-mail:ahuwsj@126.com

0　引言

令 $X=\{X_1,X_2,\cdots\}$ 是一列独立的随机变量序列，分布函数分别为 $\{F_1,F_2,\cdots\}$. η 是另一整数值计数随机变量，非退化到 0，独立于 X. 定义 $S_0=0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，$S_{(n)}=\max\{S_0,S_1,\cdots,S_n\}$，$n\geqslant 1$. 再定义随机和

$$S_\eta=\sum_{k=1}^{\eta}X_k,$$

以及随机和的最大值

$$S_{(\eta)}=\max\{S_0,S_1,\cdots,S_\eta\},$$

记 $S_n,S_{(n)},S_\eta,S_{(\eta)}$ 的分布函数分别为 $F_{S_n},F_{S_{(n)}},F_{S_\eta},F_{S_{(\eta)}}$，易得

$$\overline{F_{S_\eta}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(S_n>x)P(\eta=n),$$

$$\overline{F_{S_{(\eta)}}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(S_{(n)}>x)P(\eta=n),$$

其中，对于任意的分布函数 F，它的尾记为 $\overline{F}(x)=1-F(x)$.

本文主要研究 S_η 和 $S_{(\eta)}$ 关于某重尾分布族的封闭性问题，即假设 $X_k,k\geqslant 1$，属于某重尾分布族，在何种条件下，仍有 S_η 以及 $S_{(\eta)}$ 属于同一的重尾分布族. 按照文献[1]中的说法，此即研究随机变量的随机卷积以及随机卷积最大值的封闭性问题，简称随机-最大(random-max)闭性质. 经典的研究参见文献[2-3]，最近的研究可参见文献[1，4-11]等.

需要指出的是，文献[1，4]给出了如下的随机卷积和随机卷积最大值关于 $\mathscr{D}$ 族封闭性结论.

定理 0.1　令 $X=\{X_1,X_2,\cdots\}$ 是一列独立实值的随机变量序列，分布函数分别为 $\{F_1,F_2,\cdots\}$. η 是另一整数值计数随机变量独立于 X. 如果

(a) 存在 $\mathscr{H}\in \operatorname{supp}(\eta):=\{n\in\mathbb{N}_0:\mathbb{P}(\eta=n)>0\}$ 使得 $F_{\mathscr{H}}\in\mathscr{D}$；

(b) $\limsup\limits_{x\to\infty}\ \sup\limits_{n\geqslant\mathscr{H}}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\overline{F_k}(x)}{\overline{F_{\mathscr{H}}}(x)}<\infty$；

(c) 存在 $p>J^+_{F_{\mathscr{H}}^+}$，使得 $E\eta^{p+1}<\infty$；

则 $F_{S_\eta},F_{S_{(\eta)}}$ 都属于 $\mathscr{D}$ 族，其中 $J^+_{F_{\mathscr{H}}^+}$ 为分布函数 F_k 的上 M 指数(具体见下文定义 1.2).

显然，定理 0.1 是判断分布函数 F_{S_η} 以及 $F_{S_{(\eta)}}$ 是否属于 $\mathscr{D}$ 族的非常重要的工具，但其中条件(c)要求计数随机变量 η 具有相对高阶的矩. 如果 η 是轻尾随机变量，则条件(c)显然满足；但如果 η 是重尾的，甚至有时 η 的数学期望都不存在，则此时定理 0.1 失效.

受此启发，本文将继续研究 S_η 以及 $S_{(\eta)}$ 关于 $\mathscr{D}$ 族的封闭性问题，利用 $\mathscr{D}$ 族随机变量精细大偏差的结果，在一些条件下，证明 S_η 和 $S_{(\eta)}$ 仍属于 $\mathscr{D}$ 族. 同时，该结果还放宽了定理 0.1 中(c)关于 η 的矩条件要求，是对文献[1，4]中相关结果的重要补充.

1　定义及引理

在下文中，除非另有说明，所有的极限关系都是 $x\to\infty$. 对于两个正值函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$，有

$$a=\liminf\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\limsup\frac{f(x)}{g(x)}=b,$$

若 $a=b=1$，记作 $f(x)\sim g(x)$；若 $b=0$，记作 $f(x)=o(g(x))$；若 $0<a\leqslant b<\infty$，记作 $f(x)\asymp g(x)$；若 $b\leqslant 1$，记作 $f(x)\lesssim g(x)$；若 $a\geqslant 1$，记为 $f(x)\gtrsim g(x)$. 对于任意随机变量 Y，记 $Y^+=\max\{Y,0\}$，$Y^-=\max\{-Y,0\}$. I_A 表示事件 A 的示性函数. 对任意的两实数 c 和 d，记 $c\vee d=\max(c,d)$，$c\wedge d=\min(c,d)$.

定义 1.1[12]　取值于 $\mathbb{R}$ 的随机变量 Y(或其分布函数 V)属于 $\mathscr{D}$ 族，记作 $Y\in\mathscr{D}$(或 $V\in\mathscr{D}$)，如果存在(或等价于对任意的) $0<y<1$，有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)}<\infty.$$

定义 1.2　对于分布函数 V，定义

$$J_V^+=\inf\left\{-\frac{\ln\overline{V}_*(y)}{\ln y}:y>1\right\},$$

其中，

$$\overline{V}_*(y)=\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)},$$

采用文献[13]中的说法，J_V^+ 称为分布函数 V 的上 M 指数(upper Matuszewska index).

定义 1.3[14]　对于任意的重尾分布 V，定义

$$\rho_V(y)=\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{V}(x+y)}{\overline{V}(x)},y\geqslant 0,$$

以及

$$L_V=\lim_{y\downarrow 1}\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)}.$$

注 1.1　由文献[12]可知 $V\in\mathscr{D}\Leftrightarrow L_V>0$.

为了给出下文需要用到的引理，首先给出几个基本假设.

令 $X=\{X_1,X_2,\cdots\}$ 是一列独立实值的随机变量序列,分布函数分别为 $\{F_1,F_2,\cdots\}$,$F_i\in\mathscr{D}$,$i\geqslant 1$,且存在某分布函数 $F\in\mathscr{D}$,期望 $EX=\mu<\infty$,使得

假设 1.1 存在 $T>0$,使得对所有的 $x\geqslant T$ 一致地有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{F_i}(x)}{\overline{F}(x)}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i(-x)}{F(-x)}=1.$$

假设 1.2 对任意的 $\varepsilon>0$,存在与 i 无关的常数 $\omega_0=\omega_0(\varepsilon)>1$ 和 $x_0=x_0(\varepsilon)>1$,使得对所有的 $1\leqslant\omega\leqslant\omega_0$ 和 $x\geqslant x_0$,有

$$\frac{\overline{F_i}(\omega x)}{\overline{F_i}(x)}\geqslant L_{F_i}-\varepsilon.$$

假设 1.3 对任意的 $i\geqslant 1$,$F_i(-x)=o(\overline{F_i}(x))$,且

$$0<R:=\inf_{i\geqslant 1}\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F_i}(x)}{\overline{F}(x)}\leqslant$$

$$\sup_{i\geqslant 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_i}(x)}{\overline{F}(x)}=:S<\infty.$$

引理 1.1 在假设 1.1 和 1.2 条件下,如果 $EX_i:=\mu_i<\infty$,$i\geqslant 1$,$F(-x)=o(\overline{F}(x))$,且存在 $r>1$,使得 $E(X_i^-)^r<\infty$,$i\geqslant 1$,$E(X^-)^r<\infty$,则对任意的 $\gamma>0$,当 $n\to\infty$ 时,对 $x\geqslant\gamma n$ 一致地有

$$\sum_{i=1}^{n}N_{F_i,\mu_i}L_{F_i}\overline{F_i}(x)\lesssim P\left(S_n-\sum_{i=1}^{n}\mu_i>x\right)\lesssim$$

$$\sum_{i=1}^{n}M_{F_i,\mu_i}L_{F_i}^{-1}\overline{F_i}(x) \tag{1}$$

式中,$N_{F_i,\mu_i}:=I_{\{\mu_i=0\}}+\rho_{F_i}(|\mu_i|)I_{\{\mu_i\neq 0\}}$,$M_{F_i,\mu_i}:=I_{\{\mu_i\geqslant 0\}}+\rho_{F_i}^{-2}(|\mu_i|)I_{\{\mu_i<0\}}$.

证明 若 $\mu_i=0$,$i\geqslant 1$,引理 1.1 即为文献[15,定理 2.1]的结论.下面只证存在某 $i\geqslant 1$,使得 $\mu_i\neq 0$ 的情形.为此,定义新的随机变量序列 $\widetilde{X_i}=X_i-\mu_i$,则 $E\widetilde{X_i}=0$,$i\geqslant 1$.易见 $\widetilde{X_i}$ 的分布函数为 $F_i(x+\mu_i)$,记作 $G_i(x)$.

当 $\mu_i>0$ 时,利用文献[15]的结论,可得

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>x\right)\gtrsim\sum_{i=1}^{n}L_{G_i}\overline{G_i}(x)\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}L_{F_i}\overline{F_i}(x+\mu_i)\gtrsim\sum_{i=1}^{n}L_{F_i}\rho_{F_i}(|\mu_i|)\overline{F_i}(x),$$

其中,第二步利用了文献[14,引理 3].

另一方面,同理有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>x\right)\lesssim\sum_{i=1}^{n}L_{G_i}^{-1}\overline{G_i}(x)\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}L_{F_i}^{-1}\overline{F_i}(x+\mu_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}L_{F_i}^{-1}\overline{F_i}(x).$$

综合可得式(1).

而当 $\mu_i<0$ 时,类似的有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>x\right)\gtrsim\sum_{i=1}^{n}L_{G_i}\overline{G_i}(x)\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_{F_i}(-\mu_i)L_{F_i}\overline{F_i}(x+\mu_i)\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}L_{F_i}\rho_{F_i}(|\mu_i|)\overline{F_i}(x).$$

另一方面,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>x\right)\lesssim\sum_{i=1}^{n}L_{G_i}^{-1}\overline{G_i}(x)\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}L_{F_i}^{-1}\rho_{F_i}^{-1}(-\mu_i)\overline{F_i}(x+\mu_i)\lesssim$$

$$\sum_{i=1}^{n}L_{F_i}^{-1}\rho_{F_i}^{-2}(|\mu_i|)\overline{F_i}(x).$$

结合可得式(1),证毕.

引理 1.2 在假设 1.3 下,对于所有的 n,当 $x\to\infty$ 时,有

$$L\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}(x)\lesssim P(S_n>x)\leqslant$$

$$P(S_{(n)}>x)\lesssim L^{-1}\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}(x) \tag{2}$$

式中,$L=\bigwedge_{i\geqslant 1}L_{F_i}$.

证明 在文献[16,定理 1]中取 $\theta_i\equiv 1$,$i\geqslant 1$,即得引理 1.2.

2 主要结论及其证明

定理 2.1 $X=\{X_1,X_2,\cdots\}$ 是一列独立实值的随机变量序列,分布函数分别为 $\{F_1,F_2,\cdots\}$,$EX_i=\mu_i<\infty$.η 是另一整数值计数随机变量独立于 X,如果假设 1.1~1.3 成立,同时存在 $r>1$,使得 $E(X_i^-)^r<\infty$,$i\geqslant 1$,$E(X^-)^r<\infty$,且存在 $\mathscr{H}\geqslant 1$,使得 $P(\eta=\mathscr{H})>0$,$P(\eta>x)=o(\overline{F_{\mathscr{H}}}(x))$,则 $F_{S_\eta}\in\mathscr{D}$.

定理 2.2 在定理 2.1 的条件下,进一步还有当 $n\to\infty$ 时,$P(\eta>n)=o(\min_{1\leqslant k\leqslant n}P(\eta=k))$,则 $F_{S_{(\eta)}}\in\mathscr{D}$.

定理 2.1 的证明 由引理 1.1 可知对任意的

$\varepsilon>0$ 和 $\gamma>0$,存在充分大的 $N_1=N_1(\varepsilon,\gamma)$,使得对所有的 $n>N_1$,

$$1-\varepsilon\leqslant\inf_{\frac{x}{2}\geqslant\gamma n}\frac{P(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>\frac{x}{2})}{\sum_{i=1}^{n}N_{F_i,\mu_i}L_{F_i}\overline{F_i}(\frac{x}{2})}\leqslant$$

$$\sup_{\frac{x}{2}\geqslant\gamma n}\frac{P(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>\frac{x}{2})}{\sum_{i=1}^{n}M_{F_i,\mu_i}L_{F_i}^{-1}\overline{F_i}(\frac{x}{2})}\leqslant 1+\varepsilon \quad (3)$$

由 $\frac{x}{2}\geqslant\gamma n$ 可知 $x\geqslant\gamma n$,则对所有的 $n>N_1$,

$$1-\varepsilon\leqslant\inf_{x\geqslant\gamma n}\frac{P(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>x)}{\sum_{i=1}^{n}N_{F_i,\mu_i}L_{F_i}\overline{F_i}(x)}\leqslant$$

$$\sup_{x\geqslant\gamma n}\frac{P(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>x)}{\sum_{i=1}^{n}M_{F_i,\mu_i}L_{F_i}^{-1}\overline{F_i}(x)}\leqslant 1+\varepsilon \quad (4)$$

任取充分大的 K_1,使得 $K_1>N_1$,则对任意的 $n>K_1$,式(3)和(4)同时成立.对充分大的 x,有

$$\overline{F_{S_\eta}}(x)=$$

$$\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant K_1}+\sum_{K_1<n\leqslant x/\gamma}+\sum_{n>x/\gamma}\Big)P(S_n>x)P(\eta=n)=:$$

$$p_1(x)+p_2(x)+p_3(x).$$

易见,

$$\frac{\overline{F_{S_\eta}}(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_\eta}}(x)}\leqslant\max\left\{\frac{p_1(\frac{x}{2})}{p_1(x)},\frac{p_2(\frac{x}{2})}{p_2(x)}\right\}+\frac{p_3(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_\eta}}(x)} \quad (5)$$

由引理 1.2 以及 $F_i\in\mathscr{D}$ 知,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{p_1(\frac{x}{2})}{p_1(x)}=$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum_{1\leqslant n\leqslant K_1}P(S_n>\frac{x}{2})P(\eta=n)}{\sum_{1\leqslant n\leqslant K_1}P(S_n>x)P(\eta=n)}\leqslant$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum_{1\leqslant n\leqslant K_1}L^{-1}\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}(\frac{x}{2})P(\eta=n)}{\sum_{1\leqslant n\leqslant K_1}L\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}(x)P(\eta=n)}\leqslant$$

$$L^{-2}\bigvee_{n=1}^{K_1}\bigvee_{i=1}^{n}\cdot\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_i}(\frac{x}{2})}{\overline{F_i}(x)}<\infty \quad (6)$$

由文献[15,引理 2.1]知,$|\mu_i|\leqslant|\mu|$,则可得 $\overline{F_i}(x+|\mu_i|)\geqslant\overline{F_i}(x+|\mu|)$.于是,对 N_{F_i,μ_i} 有

$$\rho_{F_i}(|\mu_i|)=\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F_i}(x+|\mu_i|)}{\overline{F_i}(x)}\geqslant$$

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F_i}(x+|\mu|)}{\overline{F_i}(x)},$$

由假设 1.3 可知,对充分大的 x 有,$R\overline{F}(x)\leqslant\overline{F_i}(x)\leqslant S\overline{F}(x)$,则

$$\rho_{F_i}(|\mu_i|)\geqslant\liminf_{x\to\infty}\frac{R\overline{F}(x+|\mu|)}{S\overline{F}(x)}=\frac{R}{S}\cdot\rho_F(|\mu|),$$

故

$$N_{F_i,\mu_i}\geqslant\rho_{F_i}(|\mu_i|)\geqslant\frac{R}{S}\cdot\rho_F(|\mu|) \quad (7)$$

同理,对于 M_{F_i,μ_i} 可得

$$M_{F_i,\mu_i}\leqslant\rho_{F_i}^{-2}(|\mu_i|)\leqslant\left(\frac{R}{S}\right)^{-2}\cdot\rho_F^{-2}(|\mu|) \quad (8)$$

再由式(2)和(3),对充分大的 x,有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{p_2(\frac{x}{2})}{p_2(x)}=\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum_{K_1<n\leqslant\frac{x}{2\gamma}}P(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>\frac{x}{2})P(\eta=n)}{\sum_{K_1<n\leqslant\frac{x}{\gamma}}P(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>x)P(\eta=n)}\leqslant$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum_{K_1<n\leqslant\frac{x}{2\gamma}}\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}(\frac{x}{2})L_{F_i}^{-1}M_{F_i,\mu_i}P(\eta=n)}{\sum_{K_1<n\leqslant\frac{x}{\gamma}}\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}(x)L_{F_i}N_{F_i,\mu_i}P(\eta=n)}\leqslant$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{K_1<n\leqslant\frac{x}{2\gamma}} n\overline{F}(\frac{x}{2})L^{-1}\left(\frac{R}{S}\right)^{-2}\rho_F^{-2}(|\mu|)P(\eta=n)}{\sum\limits_{K_1<n\leqslant\frac{x}{\gamma}} n\overline{F}(x)L\left(\frac{R}{S}\right)\rho_F(|\mu|)P(\eta=n)}\leqslant$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}L^{-2}\cdot\left(\frac{S}{R}\right)^3\cdot\rho_F^{-3}(|\mu|)\cdot\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(\frac{x}{2})}{\overline{F}(x)}<\infty \tag{9}$$

式中,第三步将式(7),(8)代入即得.

最后,对于足够大的 x ,由引理 1.2 得,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{p_3(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_\eta}}(x)}\leqslant$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P(\eta>x/(2\gamma))}{P(S_{\mathscr{H}}>x)P(\eta=\mathscr{H})}\leqslant$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P(\eta>x/(2\gamma))}{P(\eta=\mathscr{H})L\sum\limits_{j=1}^{\mathscr{H}}\overline{F_j}(x)}\leqslant$$

$$\frac{1}{P(\eta=\mathscr{H})L}\cdot\frac{P(\eta>x/(2\gamma))}{\overline{F_{\mathscr{H}}}(x/(2\gamma))}\cdot$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_{\mathscr{H}}}(x/(2\gamma))}{\overline{F_{\mathscr{H}}}(x)}=0 \tag{10}$$

其中用到 $P(\eta=\mathscr{H})>0, L>0, P(\eta>x)=o(\overline{F_k}(x))$ 以及 $\overline{F_{\mathscr{H}}}(x)\in\mathscr{D}$. 将(6),(9)和(10)代回(5)即得 $F_{S_\eta}\in\mathscr{D}$,证毕.

定理 2.2 的证明 类似于定理 2.1 的证明,显然式(3)和(4)仍然成立. 对充分大的 x ,

$$\overline{F_{S_{(\eta)}}}(x)=$$

$$\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant K_1}+\sum_{K_1<n\leqslant x/\gamma}+\sum_{n>x/\gamma}\Big)P(S_{(n)}>x)P(\eta=n)=:$$

$$r_1(x)+r_2(x)+r_3(x).$$

对 $r_2(x)$ 交换求和顺序,

$$r_2(x)\leqslant\sum_{K_1<n\leqslant x/\gamma}\sum_{k=1}^{n}P(S_k>x)P(\eta=n)=$$

$$P\left(K_1<\eta\leqslant\frac{x}{\gamma}\right)\sum_{1\leqslant k\leqslant K_1}P(S_k>x)+$$

$$\sum_{K_1<k\leqslant x/\gamma}P(S_k>x)P\left(K_1\leqslant\eta\leqslant\frac{x}{\gamma}\right)\leqslant$$

$$P(\eta>K_1)\sum_{1\leqslant k\leqslant K_1}P(S_k>x)+$$

$$\sum_{K_1<k\leqslant x/\gamma}P(S_k>x)P\left(K_1\leqslant\eta\leqslant\frac{x}{\gamma}\right)=:$$

$$r_{21}(x)+r_{22}(x) \tag{11}$$

另一方面,有

$$\overline{F_{S_{(\eta)}}}(x)\geqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant K_1}P(S_{(n)}>x)P(\eta=n)+$$

$$\sum_{K_1<n\leqslant x/\gamma}P(S_n>x)P(\eta=n)=:r_1(x)+\widehat{r_2}(x).$$

易见,

$$\frac{\overline{F_{S_{(\eta)}}}(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_{(\eta)}}}(x)}\leqslant\max\left\{\frac{r_1(\frac{x}{2})}{r_1(x)},\frac{r_{22}(\frac{x}{2})}{\widehat{r_2}(x)}\right\}+$$

$$\frac{r_{21}(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_{(\eta)}}}(x)}+\frac{r_3(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_{(\eta)}}}(x)} \tag{12}$$

由引理 1.2 以及 $F_i\in\mathscr{D}$ 知,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{r_1(\frac{x}{2})}{r_1(x)}\leqslant$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant K_1}L^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F_i}(\frac{x}{2})P(\eta=n)}{\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant K_1}L\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F_i}(x)P(\eta=n)}\leqslant$$

$$L^{-2}\bigvee_{n=1}^{K_1}\bigvee_{i=1}^{n}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_i}(\frac{x}{2})}{\overline{F_i}(x)}<\infty \tag{13}$$

类似于式(9),对充分大的 x ,有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{r_{22}(\frac{x}{2})}{\widehat{r_2}(x)}=\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{K_1<n\leqslant x/(2\gamma)}P(\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>\frac{x}{2})P\left(n\leqslant\eta\leqslant\frac{x}{(2\gamma)}\right)}{\sum\limits_{K_1<n\leqslant x/\gamma}P(\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)>x)P(\eta=n)}\leqslant$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{K_1<n\leqslant x/(2\gamma)}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F_i}(\frac{x}{2})L_{F_i}^{-1}M_{F_i,\mu_i}P\left(n\leqslant\eta\leqslant\frac{x}{2\gamma}\right)}{\sum\limits_{K_1<n\leqslant x/\gamma}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F_i}(x)L_{F_i}N_{F_i,\mu_i}P(\eta=n)}\leqslant$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{K_1<n\leqslant x/(2\gamma)}n\overline{F}(\frac{x}{2})L^{-1}\left(\frac{R}{S}\right)^{-2}\rho_F^{-2}(|\mu|)P\left(n\leqslant\eta\leqslant\frac{x}{2\gamma}\right)}{\sum\limits_{K_1<n\leqslant x/\gamma}n\overline{F}(x)L\left(\frac{R}{S}\right)\rho_F(|\mu|)P(\eta=n)}\leqslant$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot L^{-2}\cdot\left(\frac{S}{R}\right)^3\cdot\rho_F^{-3}(|\mu|)\cdot\sup_{n>K_1}\frac{P(\eta\geqslant n)}{P(\eta=n)}\cdot\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(\frac{x}{2})}{\overline{F}(x)},$$

令 $K_1\uparrow\infty$，以及由

$$P(\eta>n)=o(\min_{1\leqslant k\leqslant n}P(\eta=k))$$

可得

$$1\leqslant\lim_{K_1\to\infty}\sup_{n>K_1}\frac{P(\eta\geqslant n)}{P(\eta=n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{P(\eta\geqslant n)}{P(\eta=n)}\leqslant 1+\lim_{n\to\infty}\frac{P(\eta>n)}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}P(\eta=k)}=1,$$

则，

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{r_{22}(\frac{x}{2})}{\widehat{r_2}(x)}\leqslant\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot L^{-2}\cdot\left(\frac{S}{R}\right)^3\cdot\rho_F^{-3}(|\mu|)\cdot\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(\frac{x}{2})}{\overline{F}(x)}<\infty\tag{14}$$

结合式(5)和

$$P(\eta>n)=o(\min_{1\leqslant k\leqslant n}P(\eta=k))$$

可得

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{r_{21}(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_{(\eta)}}}(x)}\leqslant P(\eta>K_1)\limsup_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{1<n\leqslant K_1}P(S_n>\frac{x}{2})}{\sum\limits_{1<n\leqslant K_1}P(S_n>x)P(\eta=n)}\leqslant$$

$$\frac{P(\eta>K_1)}{\min\limits_{1\leqslant n\leqslant K_1}P(\eta=n)}\cdot\max_{1<n\leqslant K_1}\left\{\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_{S_n}}(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_n}}(x)}\right\}=\frac{P(\eta>K_1)}{\min\limits_{1\leqslant n\leqslant K_1}P(\eta=n)}=0\tag{15}$$

最后，对于足够大的 x，由引理 1.2 得

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{r_3(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_{(\eta)}}}(x)}\leqslant\limsup_{x\to\infty}\frac{P(\eta>x/(2\gamma))}{P(\eta=\mathscr{H})L\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F_{\mathscr{H}}}(x)}\leqslant$$

$$\frac{1}{P(\eta=\mathscr{H})L}\cdot\frac{P(\eta>x/(2\gamma))}{\overline{F_{\mathscr{H}}}(x/(2\gamma))}\cdot\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_{\mathscr{H}}}(x/(2\gamma))}{\overline{F_{\mathscr{H}}}(x)}=0\tag{16}$$

其中用到 $P(\eta=\mathscr{H})>0$，$L>0$，$P(\eta>x)=o(\overline{F_k}(x))$ 以及 $\overline{F_{\mathscr{H}}}(x)\in\mathscr{D}$. 将(13)～(16)代回(12)，即得 $F_{S_{(\eta)}}\in\mathscr{D}$，证毕.

本文最后给出一个应用定理 2.1 的实例. 设 $X_1,X_2,\cdots$ 为一列独立同分布非负的 Pareto 型分布，其尾分布为

$$\overline{F_{X_1}}(x)=I_{(-\infty,0)}(x)+\frac{1}{(x+1)^2}I_{[0,\infty)}(x);$$

设随机变量 η 服从参数为 4 的 zeta 分布，且与 $X_1,X_2,\cdots$ 独立，即

$$P(\eta=n)=\frac{1}{\zeta(4)}\cdot\frac{1}{(1+n)^4},\ n=0,1,\cdots,$$

其中 ζ 为黎曼 zeta 函数. 易算得，$F_{X_1}\in\mathscr{D}$，$J_{F_{X_1}}^{+}=2$，$E\eta^3=\infty$. 因此，此时定理 0.1 不能使用. 但由于 $X_1,X_2,\cdots$ 独立同分布，非负，$EX_1<\infty$，则定理 2.1 中假设 1.1～1.3 均成立，且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(\eta>x)}{\overline{F_{X_1}}(x)}=\lim_{x\to\infty}(x+1)^2\sum_{n>x}\frac{1}{\zeta(4)}\cdot\frac{1}{(1+n)^4}\leqslant\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{\zeta(4)}\int_{\lfloor x\rfloor+1}^{\infty}\frac{1}{t^4}\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{3\zeta(4)(\lfloor x\rfloor+1)^3}=0,$$

其中，$\lfloor x \rfloor$ 表示实数 x 的取整. 此表明，定理 2.1 的条件全部满足，从而有 $S_\eta = \sum_{k=1}^{\eta} X_k \in \mathscr{D}$.

参考文献(References)

[1] LEIPUS R, ŠIAUSLYS J. On the random max-closure for heavy-tailed random variables [J]. Lithuanian Mathematical Journal, 2017, 57(2): 1-14.

[2] CLINE D B H. Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 1987, 43(3): 347-365.

[3] EMBRECHTS P, GOLDIE C M. On convolution tails [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1982, 13(3): 263-278.

[4] DANILENKO S, ŠIAULYS J. Randomly stopped sums of not identically distributed heavy tailed random variables [J]. Statistics and Probability Letters, 2016, 113: 84-93.

[5] ALBIN J M P. A note on the closure of convolution power mixtures (random sums) of exponential distributions [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2008, 84: 1-7.

[6] WATANABE T, YAMAMURO K J. Ratio of the tail of an infinitely divisible distribution on the line to that of its Lévy measure [J]. Electronic Journal of Probability, 2010, 15: 44-75.

[7] LEIPUS R, ŠIAULYS J. Closure of some heavy-tailed distribution classes under random convolution [J]. Lithuanian Mathematical Journal, 2012, 52(3): 249-258.

[8] XU H, FOSS S G, WANG Y B. Convolution and convolution-root properties of long-tailed distributions [J]. Extremes, 2015, 18(4): 605-628.

[9] DANILENKO S, PAŠKAUSKAITĖ S, ŠIAULYS J. Random convolution of inhomogeneous distributions with O exponential tail [J]. Modern Stochastics: Theory and Applications, 2016, 3: 79-94.

[10] KIZINEVIČ E, SPRINDYS J, ŠIAULYS J. Randomly stopped sums with consistently varying distributions [J]. Modern Stochastics: Theory and Applications, 2016, 3: 165-179.

[11] ANDRULYTĖ I M, MANSTAVIČIUS M, SIAULYS J. Randomly stopped maximum and maximum of sums with consistently varying distributions [J]. Modern Stochastics: Theory and Applications, 2017, 4(1): 65-78.

[12] EMBRECHTS P, KLÜPPELBERG C, MIKOSCH T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance [M]. Berlin: Spring, 1997.

[13] TANG Q H, TSITSIASHVILI G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2003, 108(2): 299-325.

[14] WANG S J, WANG X J, WANG W S. Precise large deviations of aggregate claims with dominated variation in dependent multi-risk models [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014: 972029.

[15] YANG Y, WANG K Y. Precise large deviations for dependent random variables with applications to the compound renewal risk model [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2013, 43(4): 1395-1414.

[16] YI L, CHEN Y, SU C. Approximation of the tail probability of randomly weighted sums of dependent random variables with dominated variation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 376(1): 365-372.