

一类具有脉冲接种与脉冲剔除的 SIQR 模型

马艳丽¹, 张仲华², 刘家保³, 丁健¹

(1.安徽新华学院通识教育部,安徽合肥 230088;2.西安科技大学理学院,陕西西安 710049;
3.安徽建筑大学理学院,安徽合肥 230601)

摘要:同时考虑了脉冲接种、脉冲剔除和隔离策略,建立了一个 SIQR 传染病模型,从理论分析和数值模拟方面研究了 SIQR 传染病模型的动力学性质.首先,得到了模型的无病周期 T 解的存在性和基本再生数 R_0 ;其次,应用 Floquet 定理证明了无病周期 T 解的局部渐近稳定性和利用脉冲微分不等式证明了其全局渐近稳定性;接着,进行了计算机数值模拟来进一步验证理论结果的正确性.最后,通过对基本再生数 R_0 及其偏导数,分析了脉冲接种、脉冲剔除和隔离这些预防和控制策略对传染病流行的影响.

关键词:传染病模型;基本再生数;全局渐近稳定性;脉冲微分方程;脉冲接种;脉冲剔除

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.0253-2778.2018.02.004

2010 Mathematics Subject Classification: 92D25

引用格式: 马艳丽,张仲华,刘家保,等.一类具有脉冲接种与脉冲剔除的 SIQR 模型[J].中国科学技术大学学报,2018,48(2):111-117.

MA Yanli, ZHANG Zhonghua, LIU Jiabao, et al. An SIQR mode with impulsive vaccination and impulsive elimination[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018,2(2):111-117.

An SIQR mode with impulsive vaccination and impulsive elimination

MA Yanli¹, ZHANG Zhonghua², LIU Jiabao³, DING Jian¹

(1. General Education Department, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China;

2. School of Sciences, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710049, China;

3. School of Sciences, Anhui Jianzhu University, Hefei 230601, China)

Abstract: Impulsive vaccination, impulsive elimination and quarantine strategies were considered in an SIQR epidemic model. The dynamical behavior of an SIQR epidemic model was discussed both theoretically and numerically. Firstly, the disease-free T periodic solution and the basic reproductive number R_0 were obtained. Secondly, the local asymptotic stability of the disease-free T periodic solution with Floquet theorem was proved and the global asymptotic stability of the disease-free T periodic solution was also proved by impulsive differential equation. Thirdly, numerical simulation was conducted to illustrate the theoretical analysis. Finally, the influence of impulsive vaccination, impulsive elimination and quarantine strategies for epidemics was analyzed by the expression of the basic reproductive number R_0 and its partial derivative.

Key words: epidemic model; basic reproductive number; global stability; impulsive differential equation; impulsive vaccination; impulsive elimination

收稿日期: 2016-03-16; **修回日期:** 2017-04-25

基金项目: 安徽省高校优秀青年人才支持计划项目(gxyq2017125),安徽省高校自然科学基金重点项目(KJ2016A310),安徽省教学研究项目(2016JYXM0481),安徽新华学院校级自然科学重点研究项目(2016zr003)资助.

作者简介: 马艳丽(通讯作者),女,1983年生,硕士/讲师.研究方向:生物数学.E-mail: linda-mayanli@163.com

0 引言

传染病和新出现的疫病严重危害人类健康与社会经济发展,控制传染病一直是当今世界的一个重大问题.为了有效地控制和降低传染病的传播,通常采取相应的控制措施,最直接的措施就是对染病人群进行隔离.几个世纪以来,对传染病患者进行隔离的措施在控制传染病传播中应用广泛且具有实效性,如被广泛应用于麻风、鼠疫等人类传染病和牛瘟、狂犬病等动物传染病,因此研究带有隔离项的传染病模型非常重要.对于一些由动物引发或者在动物中蔓延的疾病,控制其流行的主要环节是消灭传染源和保护易感种群.剔除^[1,2]是消灭传染源的重要措施,剔除就是发现染病个体后对其进行捕杀,从而阻断与易感种群的接触,例如人畜共患的传染病禽流感、结核病和轮状病毒感染等都可以采取剔除的方法加以控制.免疫接种也是防止易感种群受染的有效途径.

在传染病的预防和控制策略研究中,同样的预防方式可以用不同的方法来实现,比如脉冲方式与连续方式,具体有脉冲接种与连续接种,脉冲剔除与连续剔除,脉冲隔离与连续隔离等.文献[3]研究了不同接种方式对传染病流行性态的影响,证明了脉冲接种是优于连续接种策略的.文献[4,5]给出了关于使用脉冲接种与连续接种方式的比较,得到了脉冲接种方式优于连续接种方式的结论.这些说明了有些传染病模型用具有脉冲的微分方程描述更符合实际.脉冲现象在传染病的传播过程中普遍存在.文献[6-9]分析了脉冲接种对传染病控制的影响.文献[10-11]考虑了隔离措施,并分析了脉冲接种对具有垂直感染的传染病模型的影响.文献[1,12]讨论了一类不同步进行脉冲接种和脉冲剔除的 SIR 模型的动力学性态.本文在上述文章的基础上,考虑了脉冲接种和脉冲剔除同时进行,并考虑了隔离措施,建立了一类 SIQR 传染病模型,从理论分析和数值模拟两方面讨论了无病周期解的存在性以及稳定性.

1 基本假设与模型建立

模型假设:将种群分为四类:易感者类,记为 $S(t)$,它表示 t 时刻时易感者数量;染病者类,记为 $I(t)$,它表示 t 时刻时染病者的数量;隔离者类,记为 $Q(t)$,它表示 t 时刻时隔离者的数量;恢复者类,

记为 $R(t)$,它表示 t 时刻时恢复者的数量. Λ 表示单位时间内因出生和迁入而进入易感者的数量,简称为输入率,并假设均为易感者; β 表示感染率; μ 为自然死亡率; α_1 和 α_2 分别表示染病者和隔离者因病死亡率; γ 表示染病者的恢复率; δ 表示染病者的隔离率; ϵ 表示隔离者的恢复率; p 表示比例接种比例系数; q 表示染病者的剔除系数;同时 $\Lambda, \beta, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \gamma, \delta, \epsilon$ 的值均大于零.根据流行病动力学仓室建模思想得到如下的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \alpha_1 + \gamma + \delta) I, \\ \frac{dQ}{dt} = \delta I - (\mu + \epsilon + \alpha_2) Q, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + \epsilon Q - \mu R, \\ t \neq nT, n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \begin{cases} S(nT^+) = (1-p)S(nT), \\ I(nT^+) = (1-q)I(nT), \\ Q(nT^+) = Q(nT), \\ R(nT^+) = R(nT) + pS(nT), \\ t = nT, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $f(nT^+) = \lim_{t \rightarrow nT^+} f(t)$, $f(nT) = \lim_{t \rightarrow nT^-} f(t)$, nT 代表预防接种和剔除的时间, T 是两次接种的时间间隔周期,是一个正的常数.

2 模型分析

首先,讨论无病周期 T 解的存在性.

无病周期 T 解存在的充分必要条件为 $I(t) \equiv 0$, $Q(t) \equiv 0$, 显然易感者种群 $S(t)$ 是与脉冲周期相同的周期函数.当 $I(t) \equiv 0$ 时,在 $t_0 = nT \leq t \leq (n+1)T$ 内, $S(t)$ 满足方程

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S, t \neq nT; \\ S(nT^+) = (1-p)S(nT), t = nT \end{cases} \quad (3)$$

解方程可得

$$S(t) = \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 + \left(\tilde{S} - \frac{\Lambda}{\mu} \right) \right) e^{-\mu(t-t_0)} \quad (4)$$

式中, \tilde{S} 是易感者经过第 n 次脉冲接种后的数量,记初始条件 $S(nT^+) = S_n$, 结合式(3)可得

$$S_{n+1} = F(S_n) = (1-p) \left(\frac{\Lambda}{\mu} \left(1 + \left(\tilde{S} - \frac{\Lambda}{\mu} \right) \right) e^{-\mu T} \right) \quad (5)$$

式中, F 表示为闪频映射, 映射有唯一的不动点

$$S^* = F(S^*) = \frac{(1-p)(e^{\mu T} - 1)}{p - 1 + e^{\mu T}} \quad (6)$$

不动点 S^* 是易感者 $S(t)$ 在 $t = nT$ 处以 T 为周期的初始值, 在 $I(t) \equiv 0$ 的条件下, 不动点 S^* 是局部渐近稳定的, 因为

$$\left| \frac{dF(S)}{dS} \right|_{S_n=S^*} = (1-p)e^{-\mu T} < 1,$$

故由脉冲预防接种导出的数列 S_n 必然收敛于 S^* . 因此, 易感者 $S(t)$ 必收敛于一个无病周期 T 解 $(S^*(t), 0, 0, R^*(t))$, 这里

$$S^*(t) = \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p e^{\mu(t-t_0)}}{e^{\mu T} - 1 + p} \right),$$

$$R^*(t) = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{p e^{\mu T}}{e^{\mu T} - 1 + p} e^{-\mu(t-t_0)},$$

$$t_0 = nT \leq t \leq (n+1)T.$$

接着, 讨论无病周期 T 解的稳定性.

无病周期 T 解的局部稳定性可以通过系统的线性化方法来证明, 对方程(1)做如下变换:

$$\begin{cases} S(t) = S^*(t) + x(t), \\ I(t) = I^*(t) + y(t), \\ Q(t) = Q^*(t) + z(t), \\ R(t) = R^*(t) + h(t). \end{cases}$$

式中, $(x(t), y(t), z(t), h(t))$ 是在无病周期 T 解的一个微小的扰动. 可以得到原系统关于无病周期 T 解 $(S^*(t), 0, 0, R^*(t))$ 的线性近似系统

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta\tilde{S} & 0 & 0 \\ 0 & \beta\tilde{S} - (\mu + \gamma + \alpha_1 + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(\mu + \varepsilon + \alpha_2) & 0 \\ 0 & \gamma & \varepsilon & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{pmatrix}.$$

不难求得其基解矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-\mu t} & \varphi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{32} & \varphi_{33} & 0 \\ 0 & \varphi_{42} & \varphi_{43} & e^{-\mu t} \end{pmatrix},$$

且有 $\Phi(0) = E, E$ 为单位阵, 其中,

$$\varphi_{22}(t) = \exp\left(\int_0^t [\beta\tilde{S}(\tau) - (\mu + \gamma + \delta + \alpha_1)] d\tau\right),$$

$$\varphi_{12}(t) = -\beta \exp(-\mu t) \int_0^t \tilde{S}(\tau) \varphi_{22}(\tau) d\tau,$$

$$\varphi_{32}(t) = \delta \exp(-(\mu + \varepsilon + \alpha_2)t),$$

$$\varphi_{42} = \gamma \exp(-\mu t) \int_0^t \varphi_{22}(\tau) d\tau,$$

$$\varphi_{43}(t) = \varepsilon \exp(-\mu t) \int_0^t (\varphi_{32} + \exp((\mu + \varepsilon + \alpha_2)\tau)) d\tau.$$

由脉冲方程组(2)可得

$$\begin{pmatrix} x(nT^+) \\ y(nT^+) \\ z(nT^+) \\ h(nT^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(nT) \\ y(nT) \\ z(nT) \\ h(nT) \end{pmatrix},$$

应用 Floquet 定理得

$$M = \begin{pmatrix} (1-p)e^{-\mu T} & (1-p)\varphi_{12}(T) & 0 & 0 \\ 0 & (1-q)\varphi_{22}(T) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{32}(T) & e^{-(\varepsilon+\mu+\alpha_2)T} & 0 \\ p e^{-\mu T} & p\varphi_{12}(T) + \varphi_{42}(T) & \varphi_{43}(T) & e^{-\mu T} \end{pmatrix},$$

易知矩阵 M 的 4 个特征值为

$$\lambda_1 = (1-p)\exp(-\mu T),$$

$$\lambda_2 = (1-q)\exp\left(\int_0^T [\beta\tilde{S}(\tau) - (\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)] d\tau\right),$$

$$\lambda_3 = \exp(-(\varepsilon + \mu + \alpha_2)T),$$

$$\lambda_4 = \exp(-\mu T).$$

若无病周期 T 解局部渐近稳定时, 由 Floquet 定理知, 要求所有的特征值的模小于 1, 于是有 $\lambda_2 < 1$, 则下列不等式需满足

$$(1-q)\exp\left(\int_0^T (\beta S^*(\tau) - (\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)) d\tau\right) < 1 \tag{7}$$

而式(7)作如下的变形:

$$(1-q)\exp\left(\int_0^T (\beta S^*(\tau) - (\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)) d\tau\right) = \exp\left(\ln(1-q) + \int_0^T (\beta S^*(\tau) - (\mu + \delta + \gamma + \alpha_1))\right) \leq 1.$$

对不等式两边取对数,则有

$$\ln(1-q) + \int_0^T (\beta S^*(\tau) - (\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)) d\tau = \ln(1-q) + \int_0^T \beta S^*(\tau) d\tau - (\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)T < 0.$$

整理上式可得

$$\frac{\ln(1-q) + \int_0^T \beta S^*(\tau) d\tau}{(\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)T} < 1.$$

因此,取基本再生数

$$R_0 = \frac{\ln(1-q) + \int_0^T \beta S^*(\tau) d\tau}{(\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)T} = \frac{\ln(1-q) + \beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p(e^{\mu T} - 1)}{\mu(e^{\mu T} - 1 + p)}\right)}{(\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)T}.$$

从以上推导过程可以得到定理 1.1.为简化证明,先引入如下引理.

引理 1.1 设 $f(t), g(t) \in C^1[0, +\infty)$, 且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(f(t)) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \Lambda (\Lambda \neq 0), \\ g(t) > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0,$$

则有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(f(t)) \int_0^t \exp(-f(s)) g(s) ds = 0.$

定理 1.1 当 $R_0 < 1$ 时,系统(1)和(2)的无病周期 T 解是局部渐近稳定的.

定理 1.2 当 $R_0 < 1$ 时,系统(1)和(2)的任一解 $(S(t), I(t), Q(t), R(t))$ 都最终趋向于无病周期 T 解 $(S^*(t), 0, 0, R^*(t))$.

证明 由方程(1)和(2)的第一式,可得如下的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S \leq \mu - \mu S, t \neq nT; \\ S(nT^+) = (1-p)S(nT), t = nT \end{cases} \tag{8}$$

对式(8)应用脉冲微分不等式可得

$$S(t) \leq S(0^+) \prod_{0 < nT < t} (1-p)e^{-\mu t} + \int_0^t \prod_{s < nT < t} (1-p)\Lambda \exp(-\mu(t-s)) ds \leq$$

$$e^{-\mu t} (S(0^+) (1-p) \left[\frac{t}{T}\right] - \frac{\Lambda}{\mu} (e^{\mu T} - 1) (1-p) \left[\frac{t}{T}\right]^{+1} \frac{1}{e^{\mu T} - 1 + p}) + \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p e^{\mu \left(\left[\frac{t}{T}\right] T + 1 - t\right)}}{e^{\mu T} - 1 + p}\right) \leq r(t) + \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p e^{\mu \left(\left[\frac{t}{T}\right] T + 1 - t\right)}}{e^{\mu T} - 1 + p}\right).$$

式中,

$$r(t) = e^{-\mu t} \exp(S(0^+) (1-p) \left[\frac{t}{T}\right] - \frac{\Lambda}{\mu} (e^{\mu T} - 1) (1-p) \left[\frac{t}{T}\right]^{+1} \frac{1}{e^{\mu T} - 1 + p}),$$

由 $r(t)$ 的表达式可知 $r(t) \leq S(0)e^{-\mu t}$.

由式(1)和(2)的第二式得如下的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \gamma + \delta + \alpha_1)I, t \neq nT; \\ I(nT^+) = (1-q)I(nT), t = nT \end{cases} \tag{9}$$

对式(9)应用脉冲微分方程不等式得

$$I(t) \leq I(0^+) \prod_{0 < nT < t} (1-q)\exp\left(\int_0^t [\beta S(0^+) + \beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p e^{\mu(t-t_0)}}{e^{\mu T} - 1 + p}\right) - (\mu + \gamma + \delta + \alpha_1)] d\tau\right) \leq I(0^+) \exp(\ln(1-q) \left[\frac{t}{T}\right] + (\beta \frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma + \delta + \alpha_1)t + \int_0^t S(0)e^{-\mu \tau} d\tau) - \frac{\Lambda p \beta e^{\mu}}{\mu(e^{\mu T} - 1 + p)} \int_0^t e^{\mu(\left[\frac{t}{T}\right]T - \tau)} d\tau). \tag{10}$$

又因为

$$\int_0^t e^{\mu(\left[\frac{t}{T}\right]T - \tau)} d\tau = \underbrace{\frac{1 - e^{\mu T}}{\mu} + \frac{1 - e^{\mu T}}{\mu} + \frac{1 - e^{\mu T}}{\mu} + \dots + \frac{1 - e^{\mu T}}{\mu}}_n + \frac{1 - e^{-\mu(t - \left[\frac{t}{T}\right]T)}}{\mu} = \frac{1 - e^{\mu T}}{\mu} \left[\frac{t}{T}\right] + \frac{1 - e^{-\mu(t - \left[\frac{t}{T}\right]T)}}{\mu} > \frac{1 - e^{\mu T}}{\mu} \left[\frac{t}{T}\right]. \tag{11}$$

将式(11)代入式(10)得

$$I(t) \leq D(t) \exp\left((\ln(1-q) +$$

$$\beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{pe^{\mu T}}{e^{\mu T} - 1 + p} \frac{1 - e^{\mu T}}{\mu} \right) - (\mu + \gamma + \delta + \alpha_1) T \left[\frac{t}{T} \right] \leq$$

$$D(t) \exp \left(\left[\frac{t}{T} \right] T (\mu + \gamma + \delta + \alpha_1) (R_0 - 1) \right).$$

式中,

$$D(t) = I(0^+) \exp \left(- \frac{S(0)\beta}{\mu} e^{-\mu t} + \frac{S(0)\beta}{\mu} \right).$$

$$\exp \left(\left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma + \delta + \alpha_1) \right) \left(t - \left[\frac{t}{T} \right] T \right) \right)$$

是正的且有上界.

综上所述,当 $R_0 < 1$ 时,有 $I(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$.

接着,证明当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $Q(t) \rightarrow 0$.

由微分方程式(1)的第三个方程得

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = \delta I - (\mu + \epsilon + \alpha_2) Q, t \neq nT; \\ Q(nT^+) = Q(nT), t = nT. \end{cases}$$

解方程可得

$$Q(t) \leq Q(0^+) \exp(-(\epsilon + \mu + \alpha_2)t) + \exp(-(\epsilon + \mu + \alpha_2)t) \int_0^t \exp\left(\int_0^s (\epsilon + \mu + \alpha_2) d\tau\right) \delta I(s) ds \quad (12)$$

定义 $f(t) = -(\epsilon + \mu + \alpha_2)t$, 因为 ϵ, μ, α_2 都大于零, 所以有 $f(t) < 0$, 且满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(f(t)) = 0$, $f'(t) = -(\epsilon + \mu + \alpha_2)$. 定义 $g(t) = \delta I(t)$, 由上面的证明可知, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$. 应用引理 1.1 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-(\epsilon + \mu + \alpha_2)t) \cdot \int_0^t \exp\left(\int_0^s (\epsilon + \mu + \alpha_2) d\tau\right) \delta I(s) ds = 0.$$

对式(12)的第一项,有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(0^+) \exp(-(\epsilon + \mu + \alpha_2)t) = 0.$$

综上所述,当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $Q(t) \rightarrow 0$.

最后,证明对方程(1)和(2)的任一解 $(S(t), I(t), Q(t), R(t))$, 都有

$$S(t) \rightarrow S^*(t), R(t) \rightarrow R^*(t), t \rightarrow +\infty.$$

事实上,令

$$V(t) = |S(t) - S^*(t)|,$$

则有

$$D^+ V(t) = \text{sign}(S(t) - S^*(t))(S'(t) - S^{*'}(t)) \leq -\mu V(t) + \beta S(t) I(t).$$

因为 $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, 故得到

$$D^+ V(t) \leq -\mu |S(t) - S^*(t)| + r_1(t), t \neq nT \quad (13)$$

式中, $r_1(t) = \beta \frac{\Lambda}{\mu} D e^{-\alpha}$,

$$C = (\mu + \gamma + \delta + \alpha_1)(1 - R_0) > 0.$$

当 $t = nT$ 时,

$$V(nT^+) = (1 - p) |S(nT) - S^*(nT)| = (1 - p) V(nT^+) \quad (14)$$

对式(13)和式(14)应用微分方程不等式得

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(0^+) \prod_{0 < nT < t} (1 - p) \exp(-\mu t) + \int_0^t \left(\prod_{s < nT < t} (1 - p) \right) \exp\left(\int_s^t -\mu d\tau\right) r_1(t) ds \leq \\ &V(0^+) \prod_{0 < nT < t} (1 - p) \exp(-\mu t) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t -\mu d\tau\right) r_1(t) ds = \\ &V(0^+) \prod_{0 < nT < t} (1 - p) \exp(-\mu t) + \exp(-\mu t) \int_0^t \exp\left(\int_0^s -\mu d\tau\right) r_1(t) ds \quad (15) \end{aligned}$$

对于式(15)的第一项,当 $t \rightarrow +\infty$ 时,有

$V(0^+) \prod_{0 < nT < t} (1 - p) e^{-\mu t} \rightarrow 0$. 对于式(15)的第二项,由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} r_1(t) = 0$, 应用引理 1.1 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-\mu t) \int_0^t \exp\left(\int_0^s -\mu d\tau\right) r_1(t) ds = 0 \quad (16)$$

故当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V(t) \rightarrow 0$, 从而知 $S(t) \rightarrow S^*(t) (t \rightarrow +\infty)$. 同理可得 $R(t) \rightarrow R^*(t) (t \rightarrow +\infty)$. 结合定理 1.1 和定理 1.2 可得如下定理.

定理 1.3 当 $R_0 < 1$ 时,系统(1)和(2)的无病周期 T 解是全局渐近稳定的.

3 数值模拟

选取 $\Lambda = 0.2, \mu = 0.02, \beta = 0.5, q = 0.3, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.01, \gamma = 0.1, p = 0.17, \delta = 0.12, \epsilon = 0.3, T = 20$, 通过数值计算得 $R_0 = 0.425 < 1$, 计算机的模拟结果如图 1 所示.

该数值模拟验证了当 $R_0 < 1$ 时,系统(1)和(2)的无病周期 T 解是全局渐近稳定的,这与定理 1.3 是吻合的.

4 接种、剔除与隔离策略分析

利用基本再生数,定量地分析和讨论脉冲接种和脉冲剔除等不同预防策略对控制疾病流行的影

响.通过基本再生数

$$R_0 = \frac{\ln(1-q) + \beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p(e^{\mu T} - 1)}{e^{\mu T} - 1 + p}\right)}{(\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)T}$$

其关于参数 p 与 q 的变化情况如图 2 所示.

利用基本再生数 R_0 分别对 p, δ 和 q 求导得

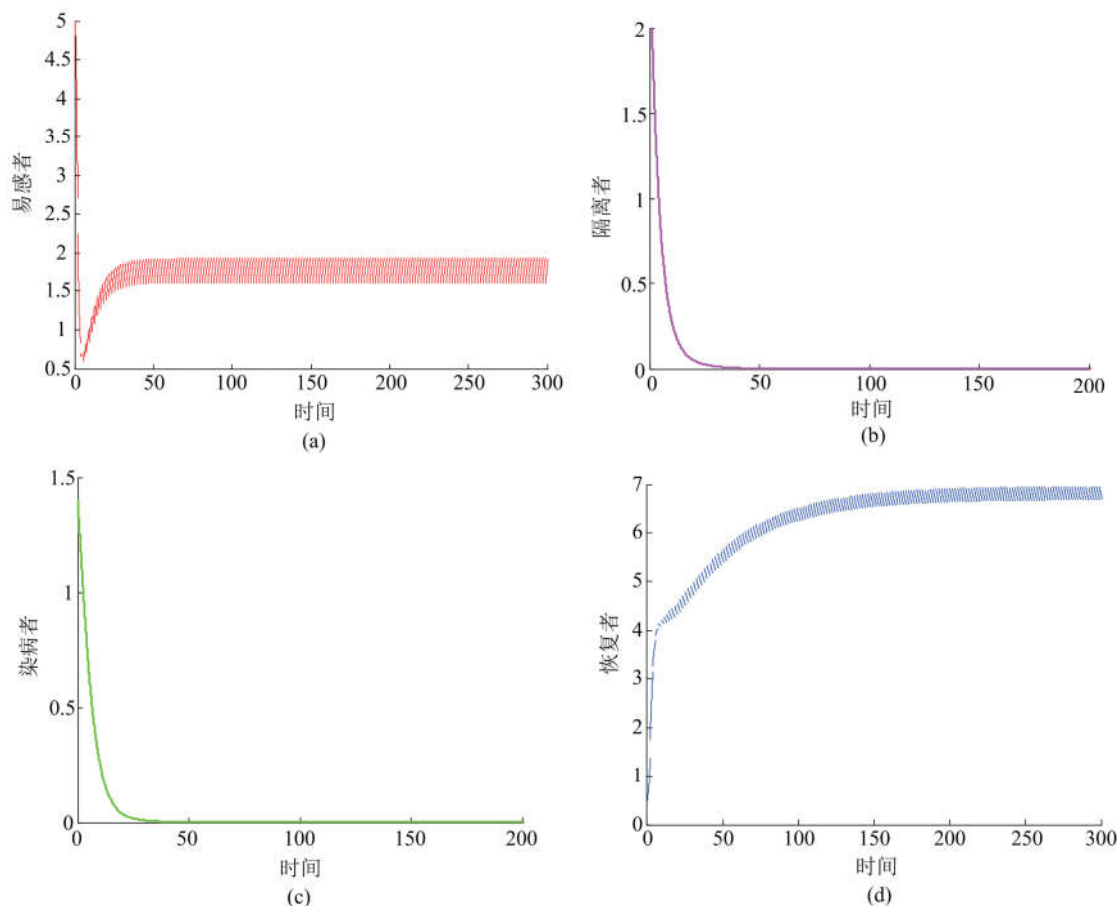


图 1 $R_0 < 1$ 时, 易感者、隔离者、染病者和恢复者随时间的变化曲线

Fig.1 Variational curves of S, Q, I and R with time when $R_0 < 1$

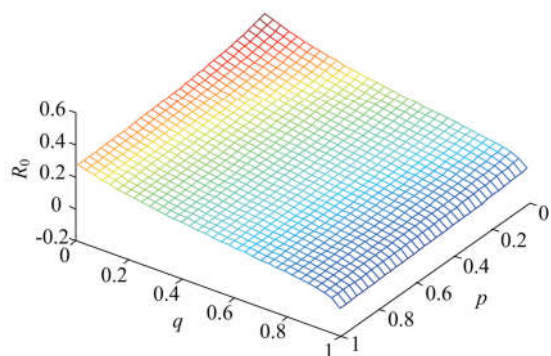


图 2 p 与 q 对 R_0 影响的变化

Fig.2 The impact of p and q on R_0

$$\Delta q = \frac{\partial R_0}{\partial q} = -\frac{1}{(1-q)(\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)T} \quad (17)$$

$$\Delta \delta = \frac{\partial R_0}{\partial \delta} =$$

$$-\frac{\ln(1-q) + \beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p(e^{\mu T} - 1)}{\mu(e^{\mu T} - 1 + p)}\right)}{(\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)^2 T} \quad (18)$$

$$\Delta p = \frac{\partial R_0}{\partial p} = -\frac{\beta \Lambda (e^{\mu T} - 1)}{\mu(\mu + \delta + \gamma + \alpha_1)(e^{\mu T} - 1 + p)T} \left(1 - \frac{1}{e^{\mu T} - 1 + p}\right) \quad (19)$$

因为假定所有的参数都是正数, 所以 $\Delta p < 0$, $\Delta \delta < 0$, $\Delta q < 0$. 由导数的数学意义可知, 在对传染病施加接种、隔离或剔除措施后, 都可使得基本再生数 R_0 下降, 从而有利于控制疾病的流行. 但是从实际的角度考虑, 易感者人数 $S(t)$ 一般来说是远远大于染病者人数 $I(t)$ 和隔离者人数 $Q(t)$ 的, 因此, 每提高单位预防接种比例所增加的人数是远大于每提高单位隔离或者剔除的比例所增加的人数的. 所以提

高单位预防接种比例的成本要远高于提高单位隔离或者剔除的成本的.因此,在实际的预防策略实施中,应考虑使用混合的预防和控制策略。

5 结论

本文同时考虑脉冲接种、脉冲剔除和隔离策略,建立了一个 SIQR 传染病模型,从理论分析和数值模拟方面研究了 SIQR 传染病模型的动力学性质.通过对模型的稳定性分析,得到了无病周期 T 解的存在性,给出了无病周期 T 解全局稳定性的充分条件.最后,讨论了脉冲接种、脉冲剔除和隔离这些预防和控制策略对疾病流行的具体影响和作用大小.本文通过对具有脉冲接种与脉冲剔除的 SIQR 传染病模型的稳定性研究,为该类传染病的防治决策提供了理论基础和数量依据,丰富了传染病动力学的工作.本文在传染病模型中考虑疾病发生率为双线性发生率,对其他形式的发生率如标准发生率、一般形式接触率或非线性等问题有待进一步研究。

参考文献(References)

- [1] 张珍,靳祯.一类带有脉冲接种和脉冲剔除的 SIR 传染病模型的稳定形态[J].太原师范学院学报(自然科学版),2006,5(4):8-10.
ZHANG Zhen, JIN Zhen. Stability properties in an SIR epidemic model with pulse vaccination and pulse elimination[J]. Journal of Taiyuan Normal University (Natural Science Edition), 2006, 5(4): 8-10.
- [2] 马艳丽,徐文雄,张仲华.具有一般形式接触率的 SEIR 模型的稳定性分析[J].中国科学技术大学学报,2015, 45(1):737-744.
MA Yanli, XU Wenxiong, ZHANG Zhonghua. Stability analysis of SEIR model with general contact rate [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015, 45(1): 737-744.
- [3] STONE L, SHULGIN B, AGUR Z. Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2000, 31(4-5): 207-215.
- [4] 章培军,李维德,朱凌峰.SIRS 传染病模型的连续接种和脉冲接种的比较[J].兰州大学学报(自然科学版), 2011,47(1):82-86.
ZHANG Peijun, LI Weide, ZHU Lingfeng. Comparison between the continuous and pulse vaccinations about SIRS infectious disease model[J]. Journal of Lanzhou University (Natural Sciences), 2011, 47(1): 82-86.
- [5] 朱玘,李维德,朱凌峰.基于 SIR 传染病模型的不同控制策略比较[J].北华大学学报(自然科学版),2011, 3(1):15-21.
ZHU Ji, LI Weide, ZHU Lingfeng. Comparison among different control strategies on SIR epidemic model [J]. Journal of Beihua University (Natural Science), 2011, 3(1): 15-21.
- [6] SAMANTA G P. Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2014, 66(1): 74-85.
- [7] QIN W, TANG S, ROBERT A. Nonlinear pulse vaccination in an SIR epidemic model with resource limitation[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013(1): 24-37.
- [8] PEI Y, LI S, LI C, et al. The effect of constant and pulse vaccination on an SIR epidemic model with infectious period[J]. Applied Mathematical Modeling, 2011, 35(8): 3866-3878.
- [9] LI J, YANG Y. SIV-SVS epidemic models with continuous and impulsive vaccination strategies [J]. Journal of Theoretical Biology, 2011, 280(1): 108-116.
- [10] 周艳丽,王贺桥,王美娟,等.具有脉冲预防接种的 SIQR 流行病数学模型[J].上海理工大学学报,2007, 29(1):11-16.
ZHOU Yanli, WANG Heqiao, WANG Meijuan, et al. SIQR epidemical model with impulsive vaccination[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2007, 29(1): 11-16.
- [11] 宋燕,刘薇,张宇.具有垂直传染及脉冲免疫接种的 SIQR 传染病模型[J].兰州大学学报(自然科学版), 2014,50(2):455-459.
SONG Yan, LIU Wei, ZHANG Yu. An SIQR epidemic model with vertical transmission and impulsive vaccination[J]. Journal of Lanzhou University (Natural Sciences), 2014, 50(2): 455-459.
- [12] 张珍.不同步进行脉冲接种和脉冲剔除的 SIR 模型的动力学性态研究[J].山西师范大学学报(自然科学版), 2012,26(2):8-11.
ZHANG Zhen. Stability properties in an SIR model with asynchronous pulse vaccination and pulse elimination[J]. Journal of Shanxi Normal University (Natural Science Edition), 2012, 26(2): 8-11.