

# 基于固态自旋体系的高保真度量子逻辑门的实验研究

麦麦提依明·吐孙<sup>1,3</sup>, 耿建培<sup>4</sup>, 荣星<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学技术大学近代物理系, 中国科学院微观磁共振重点实验室, 安徽合肥 230026;

2. 中国科学技术大学合肥微尺度物质科学国家研究中心, 安徽合肥 230026;

3. 新疆师范大学物理与电子工程学院, 新疆乌鲁木齐 830056; 4. 德国斯图加特大学第三物理研究所, 斯图加特 70569, 德国)

**摘要:** 量子计算利用量子力学的原理, 能够有效处理很多经典计算难以解决的问题, 比如大数因子分解. 在实现量子信息处理和控制的过程中量子系统总是会受到退相干的影响, 这种退相干是由量子系统与外界环境的相互作用造成的. 因此实现可以抑制退相干的高保真度量子逻辑门在量子计算研究中具有重要意义. 本文首先介绍了实现量子计算对物理系统的要求, 然后基于金刚石 NV 色心体系, 讨论实现了动力学纠错门、高保真度的普适量子逻辑门以及时间最优的普适量子逻辑门的几个实验工作, 最后给出总结.

**关键词:** 量子计算; 退相干; 脉冲序列; 金刚石 NV 色心

**中图分类号:** O413      **文献标识码:** A      doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2018.12.002

**引用格式:** 麦麦提依明·吐孙, 耿建培, 荣星. 基于固态自旋体系的高保真度量子逻辑门的实验研究[J]. 中国科学技术大学学报, 2018, 48(12): 968-976, 1011.

TUSUN Maimaitiyiming, GENG Jianpei, RONG Xing. Experimental investigation of high-fidelity quantum logic gates on solid-state spin systems[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018, 48(12): 968-976, 1011.

## Experimental investigation of high-fidelity quantum logic gates on solid-state spin systems

TUSUN Maimaitiyiming<sup>1,3</sup>, GENG Jianpei<sup>4</sup>, RONG Xing<sup>1,2</sup>

(1. Department of Modern Physics, and CAS Key Laboratory of Microscale Magnetic Resonance, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;

2. Hefei National Laboratory for Physical Sciences at the Microscale, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;

3. School of Physics and Electronic Engineering, Xinjiang Normal University, Urumqi 830054, China;

4. 3rd Physikalisches Institut, University of Stuttgart, Stuttgart 70569, Germany)

**Abstract:** Quantum computation is capable of solving several intractable problems in classical computation.

**收稿日期:** 2018-05-12; **修回日期:** 2018-06-15

**基金项目:** 国家重点基础研究发展(973)计划(2013CB921800), 国家自然科学基金(11227901, 31470835, 11275183, 11564040, 21763027), 中国科学院战略性先导科技专项 B 类(XDB01030400) 资助.

**作者简介:** 麦麦提依明·吐孙, 男, 1986 年生, 博士. 研究方向: 量子计算. E-mail: hawk12@mail.ustc.edu.cn

**通讯作者:** 荣星, 博士, 研究员. 2005 年中国科学技术大学 00 班本科毕业, 2011 年中国科学技术大学物理学院博士毕业. 2011~2013 年任中国科学技术大学物理学院近代物理系副教授, 2014 年至今任中国科学技术大学物理学院近代物理系研究员. 致力于发展脉冲微波射频技术, 发展电子自旋的量子操控方法, 开展基于电子自旋的固态量子计算实验研究. 相关研究成果发表在 Nature (1 篇)、Science (1 篇)、Nature Communications (4 篇)、Physical Review Letters (10 篇) 等学术杂志上. 作为主要骨干参与完成了我国脉冲式电子顺磁共振谱仪的研制, 发展了一系列国际先进的脉冲微波技术, 使得该谱仪在诸多关键指标上达到并超越了国际商用谱仪, 相关成果已申请国家发明专利 18 项(已授权 8 项). E-mail: xrong@ustc.edu.cn



such as large number factorization with utilizing the principles of quantum mechanics. The quantum system is always affected by decoherence while realizing quantum information processing and controlling, and decoherence is caused by interaction between the quantum system and the external environment. Therefore, it is of great significance to implement a high-fidelity quantum logic gate, which can suppress decoherence in quantum computation. In this paper, the requirements for realizing quantum computing for physical system was introduced, and then, based on the NV center in diamond system, several experimental works about the experimental implementation of the dynamically corrected gates, fault tolerant universal quantum gates and time optimal universal quantum logic gates were reviewed, respectively. Finally, a brief summary was given.

**Key words:** quantum computation; decoherence; pulse sequences; NV center in diamond

## 0 引言

针对某些特定的重要问题而言,量子计算相对于经典计算拥有巨大的优势,例如量子模拟、大数因子分解以及机器学习等.要实现量子计算,物理体系需要满足一定的要求.在 2000 年 David P. DiVincenzo 提出了著名的 5 条判据<sup>[1]</sup>:①物理系统由可扩展的量子比特组成;②能够把量子比特初始化到我们想要的特定态;③具有长相干时间的量子比特并且相干时间要远长于每个逻辑门的运行时间;④能够实现普适的量子逻辑门;⑤能够对量子比特进行测量.满足量子比特的初始化、测量、高保真度的量子逻辑门以及量子纠错等条件的很多体系已经被实验实现或验证<sup>[2]</sup>.其中比较典型的量子计算候选体系为离子阱<sup>[3]</sup>、超导电路<sup>[4]</sup>、中性原子<sup>[5]</sup>、光学体系<sup>[6]</sup>、量子点<sup>[7]</sup>以及自旋体系<sup>[8]</sup>.固态自旋体系里面的金刚石 NV 色心(nitrogen-vacancy center in diamond)因为具有较长的相干时间<sup>[9-10]</sup>、快速共振自旋控制<sup>[11]</sup>、容易初始化与读出<sup>[12]</sup>等优点在各种研究领域被广泛应用.

本文将介绍在金刚石 NV 色心体系中实现抗噪声的高保真度量子逻辑门.内容分为以下几个部分:节 1 介绍抑制准静态噪声的动力学纠错量子逻辑门;节 2 介绍同时抑制准静态噪声与操控场噪声的普适容错量子逻辑门;节 3 介绍时间最优的普适量子逻辑门;节 4 进行总结.

## 1 实验实现动力学纠错量子逻辑门

量子信息处理可以为某些问题提供一个相对于经典计算机更快的加速<sup>[13]</sup>.实现量子比特的抗噪声普适量子逻辑门是量子计算中最迫切的要求之一.为了满足这个要求,许多研究者们提出了包括量子纠错<sup>[14-16]</sup>、无退相干子空间<sup>[17-18]</sup>、动力学解耦<sup>[19]</sup>

(dynamical decoupling, DD)等策略.与其他两种策略相比,DD 不需要额外的量子比特<sup>[20]</sup>.DD 使用快速量子比特翻转来实现抑制环境对体系的作用.随后,动力学解耦被用于保护量子逻辑门<sup>[21-23]</sup>,即通过巧妙地结合量子逻辑门的操控序列与动力学解耦序列,可以在实现量子逻辑门的同时能够抑制环境噪声.这种方式原则上需要无限强的解耦脉冲,而现实中物理体系的操控强度总是有限的.动力学纠错门<sup>[24-28]</sup>基于有限的操控强度,设计能够抑制环境噪声的量子逻辑门的操控序列,从而避免了无限操控强度的问题<sup>[2]</sup>.

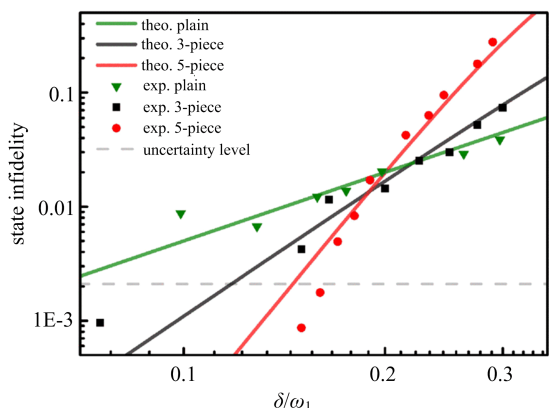
这里,我们对一类称为 SUPCODE (soft uniaxial positive control for orthogonal drift error)<sup>[28]</sup>的动力学纠错门展开实验研究.SUPCODE 序列最早是为在半导体双量子点的单态—三态量子比特上实现能够抑制磁场梯度涨落的量子逻辑门而提出,但这类序列同样能够抑制固态自旋体系中磁场涨落和环境(如核自旋热库)引起的准静态噪声.使用有限强度脉冲可以避免在别的方案里使用 bang-bang 脉冲时出现的难以实际实现和选择性很差等缺点<sup>[29]</sup>.每个 SUPCODE 脉冲序列由几段脉冲组成,通过巧妙地设计每段脉冲的幅度和时间,可以使各段脉冲中由准静态环境噪声造成的偏差在一定程度上相互抵消,这样就能实现抑制准静态环境噪声的量子逻辑门.下面以 5-piece SUPCODE 序列为例,解释 SUPCODE 序列如何在实现量子逻辑门的同时抑制准静态环境噪声.实现目标量子逻辑门  $R(\hat{x}, \theta)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ , 5-piece SUPCODE 序列为  $(\tau_1)_{0,0} - (\tau_2)_{0,\omega_1} - (\tau_3)_{0,0} - (\tau_2)_{0,\omega_1} - (\tau_1)_{0,0}$ . 其中

$$\tau_1 = \frac{\csc\theta_0 [1 - 2\cos(\theta_0/2) + \cos\theta_0]}{2\pi\omega_1} + \frac{\sqrt{4 - 8\cos(\theta_0/2) + 4\cos\theta_0 + \theta_0 \sin\theta_0}}{2\pi\omega_1}; \tau_2 = \frac{\theta_0}{4\pi\omega_1};$$

$$\tau_3 = \frac{-2\pi\omega_1\tau_1\cos(\theta_0/2) - \sin(\theta_0/2)}{\pi\omega_1}; \theta_0 = \theta + 2\pi.$$

以上 5-piece SUPCODE 序列可以通过级联两个目标量子逻辑门为  $R(\hat{x}, \pi/2)$  的 5-piece SUPCODE 序列生成. 如果进一步增加 SUPCODE 序列的段数, 原则上可以将准静态环境噪声对量子逻辑门的影响抑制到任意阶<sup>[2]</sup>.

在实验中我们采用<sup>13</sup>C 丰度为 0.1% 的同位素富集样品, 将金刚石 NV 色心电子自旋的  $|m_s = 0\rangle$  和  $|m_s = 1\rangle$  编码为量子比特的  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$ . 图 1 中展示了当噪声强度不同时测得的末态保真度偏差的实验结果. 我们首先将电子自旋量子比特初始化为  $|0\rangle$  态, 然后分别施加目标量子逻辑门为  $R(\hat{x}, \pi)$  的普通方波脉冲、3-piece SUPCODE 脉冲和 5-piece SUPCODE 脉冲序列, 测量末态保真度的偏差随  $\delta/\omega_1$  的关系. 图 1 中的实验数据能够非常好地吻合图 1 中实线代表的理论计算结果, 验证了实验中普通方波脉冲、3-piece SUPCODE 脉冲和 5-piece SUPCODE 脉冲序列分别将准静态环境噪声  $\delta_0$  对保真度的影响抑制到 2 阶、4 阶和 6 阶<sup>[2]</sup>.



普通方波脉冲、3-piece SUPCODE 脉冲和 5-piece SUPCODE 脉冲序列对应的实验结果分别用绿色下三角、黑色正方形和红色圆形表示. 光子数目的统计涨落造成的实验数据的不确定度用灰色虚线表示.

图 1 SUPCODE 序列在实现量子逻辑门时抑制准静态环境噪声的实验验证<sup>[30]</sup>

Fig. 1 Experimental verification of SUPCODE sequences Suppressing effect to the static ambient noise when implementing quantum gates<sup>[30]</sup>

我们已经验证 SUPCODE 脉冲序列能够在实现量子逻辑门的同时抑制准静态环境噪声. 考虑到准静态环境噪声是固态自旋体系中电子自旋量子比特退相干的主导因素, 这意味着 SUPCODE 脉冲序列能够在实现量子逻辑门的同时保护量子相干<sup>[2]</sup>. 5-piece SUPCODE 脉冲序列对应的相干振荡衰减

和普通方波脉冲对应的震荡衰减如图 2(a) 所示. 通过实验数据可以推导出 5-piece SUPCODE 脉冲序列对应的相干震荡的衰减时间为  $T_{\text{DCG}} = 690(40)\mu\text{s}$ , 当  $\omega_1 = 1\text{MHz}$  时实现量子逻辑门使用的拉比震荡衰减时间  $T'_2 = 135(10)\mu\text{s}$ . 可见, 拉比震荡的衰减比 5-piece SUPCODE 脉冲序列对应的相干震荡的衰减快得多.

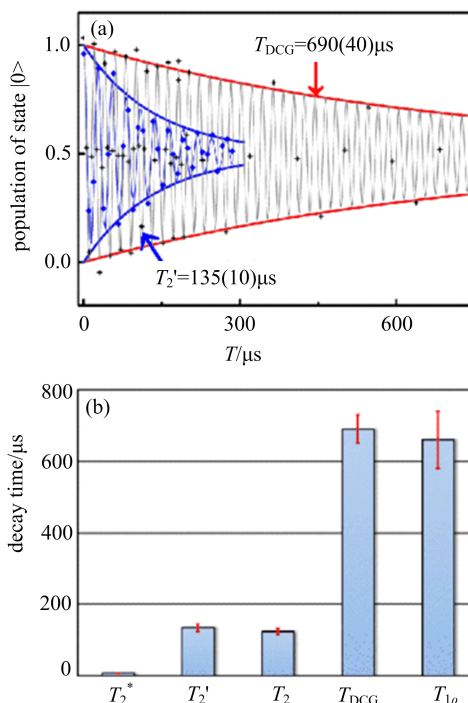


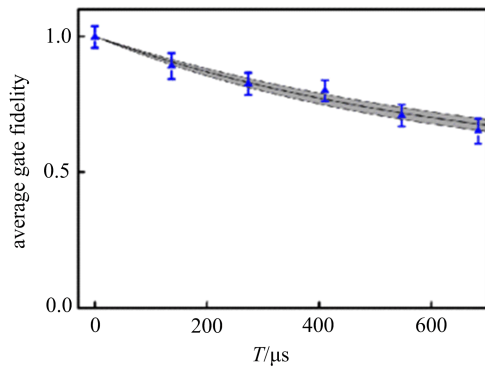
图 2 (a) 5-piece SUPCODE 脉冲得到的相干震荡与普通方波脉冲对应的相干震荡 (即拉比震荡) 的对比; (b) 几种相干衰减时间的对比<sup>[30]</sup>

Fig. 2 (a) Comparison of the quantum oscillation driven by five-piece SUPCODE pulses with the one driven by plain pulses; (b) comparison of several kinds of decay times<sup>[30]</sup>

图 2(b) 总结了几种相干衰减时间的对比. 可以发现, 不加任何动力学解耦序列时, 相干时间为  $T_2^* = 6.56(0.17)\mu\text{s}$ , 通过施加回波序列可以将相干时间延长到  $T_2 = 123.2(8.8)\mu\text{s}$ . 在误差范围内有  $T_{\text{DCG}} = T_{1\rho}$ , 即 5-piece SUPCODE 序列在实现量子逻辑门时对量子相干的保护达到了动力学解耦序列保护量子态相干的极限<sup>[2]</sup>.

现在我们实验验证可以通过 5-piece SUPCODE 序列实现单比特普适量子逻辑门. 我们通过量子过程层析技术<sup>[13]</sup> 来实验确定 5-piece SUPCODE 序列实现的量子逻辑门, 并进一步由过程矩阵计算量子逻辑门的保真度. 对电子自旋量子比特连续施加目标量子逻辑门  $R(\hat{x}, \pi/2)$  的 5-piece SUPCODE 脉冲序列, 并在泡利基  $\{A_m\} = \{I,$





蓝色上三角为实验结果,黑色实线为仅考虑  $T_{1\rho}$  过程的理论结果,灰色区域为  $T_{1\rho}$  的测量值的不确定度对应的对量子逻辑门的保真度的理论预期的不确定区域。

图 3 5-piece SUPCODE 序列得到的量子逻辑门的保真度随序列时间的变化关系<sup>[30]</sup>

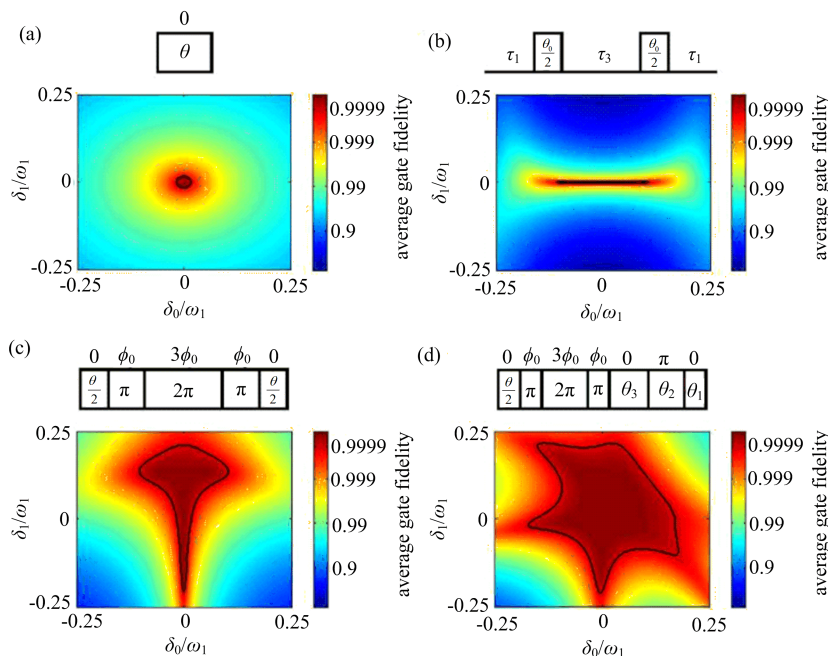
Fig. 3 The relation between the fidelity obtained via five-piece SUPCODEs and pulse time<sup>[30]</sup>

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  下确定  $M$  个 5-piece SUPCODE 序列对应的过程矩阵  $\epsilon_M$ . 实验中  $M = 0, 27, 54, 81, 108, 135$ . 图 3 中展示  $M$  个 5-piece SUPCODE 序列实现的量子逻辑门的保真度随序列时间的衰减关系, 实验结果与仅考虑  $T_{1\rho}$  过程的理论预期吻合得很好, 说明通过 5-piece SUPCODE 序列实现的量子逻辑门的保真度受限于  $T_{1\rho}$  过程. 据此模型, 可以估算通过 5-piece SUPCODE 序列实现的每个  $R(\hat{x}, \pi/2)$  的平均保真度为  $0.9961(2)$ <sup>[2]</sup>.

## 2 实验实现普适容错量子逻辑门

我们通过抑制量子逻辑门的过程中的准静态环境噪声, 实现了保真度可以达到 0.9961 的单比特量子逻辑门. 噪声不仅来自于量子系统和环境之间的相互作用, 而且还来自于不完美操控(操控场噪声), 这也限制了量子逻辑门的保真度. 所以, 如果要进一步提高量子逻辑门保真度, 就必须同时抑制准静态环境噪声和操控场噪声. 我们在实验上所使用的实际哈密顿量为  $H_{\text{prac}} = 2\pi\delta_0 S_z + 2\pi(\omega_1 + \delta_1) S_x$ , 其中  $\omega_1$  是拉比频率,  $\delta_0$  来源于量子比特与环境的作用,  $\delta_1$  来源于操控强度的涨落. 因为在实验中  $\delta_0$  和  $\delta_1$  的时间尺度远大于量子逻辑门的时间尺度, 所以  $\delta_0$  和  $\delta_1$  可以看成准静态的随机常数. 为了实现同时抑制  $\delta_0$  和  $\delta_1$  的高保真度量子逻辑门, 需要设计新的脉冲序列. 我们发现, 将 BB1 (broadband number 1) 序列作为内嵌序列嵌套到 CORPSE (compensation for off-resonance with a pulse sequence) 序列中, 可以得到一种嵌套序列 BBlinC. 理论上 BBlinC 脉冲序列可以同时抑制这两种噪声. 我们在实验中对这新的脉冲序列和普通方波脉冲、SUPCODE 脉冲、BB1 脉冲序列等 3 种脉冲序列抑制噪声的效果. 由图 4 可以明显地看出来, BBlinC 脉冲序列对应的高保真度区域在  $\delta_0$  和  $\delta_1$  方向上均大大增加.

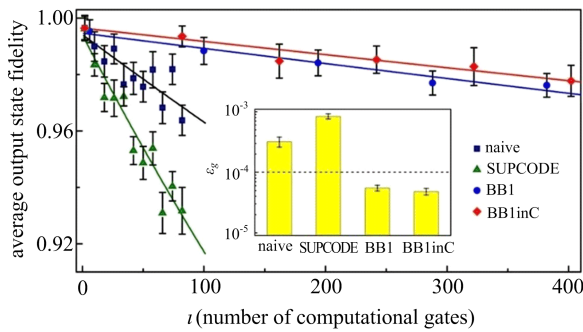
特  
约  
评  
述



每个子图的上半部分分别对方波脉冲(a)、5-piece SUPCODE 脉冲(b)、BB1 脉冲(c)和 BBlinC 脉冲序列(d). 下半部分是使用这些脉冲序列实现量子逻辑门  $R(\hat{x}, \pi/2)$  的平均保真度随着准静态环境噪声  $\delta_0$  和操控场噪声  $\delta_1$  的变化关系, 其中黑色实线为保真度为 0.9999 的等值线.

图 4 单比特量子逻辑门的脉冲序列及对应的量子逻辑门的平均保真度的等值线图<sup>[31]</sup>

Fig. 4 Pulse sequences and contour plot of average gate fidelity of single qubit gate<sup>[31]</sup>



深蓝色正方形、绿色上三角、蓝色圆形和红色菱形分别为由普通方波脉冲、5-piece SUPCODE 脉冲、BB1 脉冲和 BB1inC 脉冲组成的 RB 序列作用于  $|0\rangle$  态而得到的末态的平均保真度,黑色、绿色、蓝色和红色实线分别为对这 4 组脉冲序列对应的平均末态保真度数据的拟合结果。

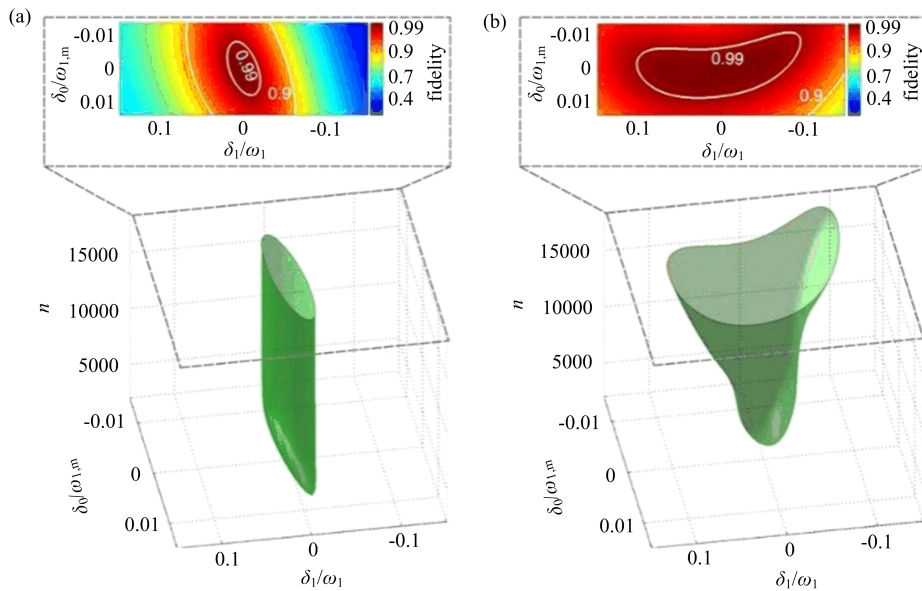
图 5 单比特量子逻辑门保真度的实验结果<sup>[31]</sup>

Fig. 5 Experimental test result of the fidelity single-qubit gates<sup>[31]</sup>

我们通过 randomized benchmarking (RB) 方法<sup>[32]</sup>测量脉冲序列作用于量子比特上实现的量子逻辑门保真度,此方法测量量子逻辑门保真度不受初始态制备和测量误差的影响.图 5 展示了单比特量子逻辑门保真度的实验结果,实验中拉比频率  $\omega_0 = 10\text{MHz}$ . 我们分别用普通方波脉序列、5-piece SUPCODE 脉冲序列、BB1 脉冲序列和 BB1inC 脉冲序列实现量子逻辑门,并通过 RB 方法测量平均每个量子逻辑门的保真度.实验结果是,通过普通方波脉冲序列实现的量子逻辑门保真度为 0.99968(6),

5-piece SUPCODE 脉冲对应的保真度为 0.99916(8),BB1 脉冲序列对应的是 0.999945(6),BB1inC 脉冲序列得到的保真度为 0.999952(6).实验结果符合预期,可以看出 BB1inC 脉冲序列实现的量子逻辑门的平均保真度高于其他 3 种脉冲序列实现的量子逻辑门保真度<sup>[2]</sup>.

普适量子逻辑门可以通过一组普适的单比特量子逻辑门和非平庸两比特量子逻辑门实现.我们把 NV 色心电子自旋的  $|m_s = 0\rangle$  和  $|m_s = -1\rangle$  编码为电子自旋量子比特,把  $^{14}\text{N}$  核自旋的  $|m_l = 1\rangle$  和  $|m_l = 0\rangle$  编码为核自旋量子比特,在由电子自旋量子比特和核自旋量子比特组成的两比特系统中实现量子逻辑门 CNOT.其中核自旋比特是控制比特,电子自旋比特是目标比特.为了得到高保真度,我们借鉴核磁共振中发展起来的梯度上升算法 GRAPE (gradient ascent pulse engineering)<sup>[33]</sup>,因为核自旋对噪声(比如外磁场涨落和射频控制场)不敏感并且脉冲序列仅包含微波脉冲,所以在优化过程中只考虑电子自旋所受到的噪声.我们改进了 GRAPE 算法,使得在实现目标逻辑门的同时能够抑制  $\delta_0$  和  $\delta_1$ .图 6 展示了微波脉冲参数优化后得到的高保真度区域.图 6(a)和图 6(b)分别是 GRAPE 算法未改进和改进后的结果对比,两个 GRAPE 算法得到高保真度区域的差别在图 6(a)和图 6(b)的上半部分可以看出来.即优化后的脉冲序列对  $\delta_0$  和  $\delta_1$  的高保真度区域明显增大<sup>[2]</sup>.



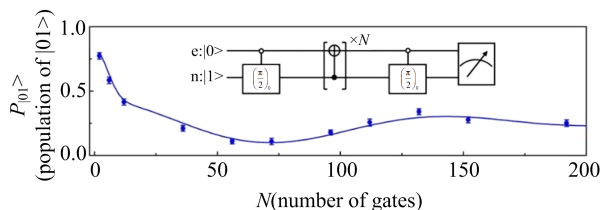
在准静态环境噪声  $\delta_0$  和操控场噪声  $\delta_1$  影响下 GRAPE 算法未改进(a)和改进后(b)的结果对比.图中  $\omega_{1,m}$  代表脉冲序列中操控场的最大强度,  $n$  是算法中的迭代次数.图的上半部分是两种 GRAPE 方法的保真度等值线图,优化后的控制保真度大于 0.99 的区域比未优化的区域更大。

图 6 在噪声环境下实现两比特量子逻辑门 CNOT 的脉冲序列的优化<sup>[31]</sup>

Fig. 6 Optimization of the control of the two-qubit system to achieve high fidelity control in the presence of noises<sup>[31]</sup>

在实验中为了实现对保真度的精确测量,我们采用测量两比特系统的态在连续施加量子逻辑门 CNOT 时的演化,来测量平均每个 CNOT 保真度的方法<sup>[15]</sup>. 这个测量过程如图 7 里中间的线路图所示. 我们测量两比特系统的末态在  $|01\rangle$  上的布居度  $P_{|01\rangle}$ . 当 CNOT 的数量  $N=0$  时,  $P_{|01\rangle}$  与 1 的偏差来源于对量子态的初始化、制备和测量的误差.  $P_{|01\rangle}$  随  $N$  的关系则可反映出每个 CNOT 的保真度. 从图 7 中可以看出,随着  $N$  的增大,  $P_{|01\rangle}$  呈现出边振荡边衰减的趋势.  $P_{|01\rangle}$  的衰减主要来源于  $\delta_0$  和  $\delta_1$  的准静态分布,而振荡则因为脉冲序列对应的演化不是理想的 CNOT<sup>[2]</sup>.

从实验数据可以得到实验中两比特量子逻辑门 CNOT 的保真度为 0.9920(1),达到了容错量子计算对量子逻辑门保真度的阈值要求. 这结果也是目前固态自旋体系实现的两比特量子逻辑门保真度的最高水平.



图中展示的是对 CNOT 量子逻辑门反复使用图里中间插入的脉冲序列后  $|01\rangle$  态的概率  $P_{|01\rangle}$  与量子逻辑门 CNOT 的数量  $N$  之间的变化关系. 拟合结果(蓝色实线)与实验数据(带误差棒的黑点)吻合得很好.

图 7 两比特量子逻辑门 CNOT 的保真度测量结果<sup>[31]</sup>

Fig. 7 Experimental test result of the fidelity two-qubit CNOT gates<sup>[31]</sup>

### 3 实验实现时间最优的普适量子逻辑门

上一节中,我们讨论了实现高保真度的普适量子逻辑门. 在这些工作的基础上我们尝试把量子逻辑门的时间缩短而实现时间最优控制的量子逻辑门. 经典系统的最优控制研究已经有三百多年的历史了,其中比较典型的是约翰·伯努利(Johann Bernoulli)提出的最速降线问题<sup>[34]</sup>和策梅洛(Ernst Zermelo)提出的导航问题<sup>[35]</sup>. 随着量子信息处理和量子计量的不断发展,人们开始对量子系统中的时间最优问题产生浓厚的兴趣. 因为对量子系统的态或演化操作而言,存在环境噪声的情况下找到更快的演化方案是实现高精度量子控制的合理选择.

但是能够同时优化保真度和时间是具有挑战性的工作. 通过庞特里亚金极大值原理(Pontryagin maximum principle)或者么正群的几何性质来分析的方法只能适用于特定问题和约束条件<sup>[36-38]</sup>. 最近一些理论工作者<sup>[39-42]</sup>提出了找到最优时间演化或么正操作的量子最速降线方程方法(quantum brachistochrone equation, QBE). 目前时间最优控制的实验研究只限于单比特体系<sup>[43-44]</sup>. 我们通过求解量子最速降线方程,在金刚石 NV 色心体系中实现了量子操作的时间最优控制的普适量子逻辑门.

假设量子系统的哈密顿量为  $H(t)$ , 对应的演化算符为  $U(t)$ , 系统的演化满足薛定谔方程  $\dot{U}(t) = -iH(t)U(t)$ , 其中边界条件为  $U(0) = I$  和  $U(T) = U_F$  ( $\hbar$  取 1). 假设哈密顿量满足的限制条件是  $f_j(H) = 0, j = 0, 1, \dots$ , 则能够实现时间最优的演化哈密顿量满足量子最速降线方程<sup>[34]</sup>:

$$\dot{F} = -i[H, F] \quad (1)$$

式中,  $F = \partial L_C / \partial H$ ,  $L_C = \sum_j \lambda_j f_j(H)$ ,  $\lambda_j$  为拉格朗日乘子. 有一个物理上的限制是由  $f_0(H) = [\text{Tr}(H^2) - E^2]/2 = 0$  描述的有限能量带宽,其中  $E$  是常数. 对于时间最优的单比特量子逻辑门,有如下形式的哈密顿量:

$$H(t) = H_0 + H_c(t), \quad (2)$$

$$H_0 = 2\pi\delta S_z,$$

$$H_c(t) = 2\pi\omega_1 [\cos\varphi(t)S_x + \sin\varphi(t)S_y]$$

哈密顿量需要满足的限制条件为

$$g_0(H_c) = \frac{1}{2}(\|H_c\|^2 - 2\pi^2\omega_1^2) = 0, \quad (3)$$

$$g_1(H_c) = \text{Tr}(H_c S_z) = 0.$$

从而得出

$$L_c = \frac{\lambda_0}{2}(\|H_c\|^2 - 2\pi^2\omega_1^2) + \lambda_1 \text{Tr}(H_c S_z), \quad (4)$$

$$F = \lambda_0 H_c + \lambda_1 S_z$$

将式(4)代入式(3)可以得到量子最速降线方程:

$$\dot{\lambda}_0 H_c + \lambda_0 \dot{H}_c + \dot{\lambda}_1 S_z = -i[H, \lambda_0 H_c + \lambda_1 S_z] \quad (5)$$

最后得到量子最速降线方程的解析解:

当  $\theta \leq \pi(1 + \sqrt{3}\delta\omega_1)$  时,

$$T = \frac{\delta\left(\frac{\theta}{2\pi} - 1\right) + \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2 - \omega_1^2\left(\frac{\theta}{2\pi} - 1\right)^2}}{\omega_1^2 + \delta^2} \quad (6)$$



$$\eta = -\frac{2\pi - \theta}{2\pi T}$$

当  $\theta > \pi(1 + \sqrt{3}\delta/\omega_1)$  时,

$$T = \frac{\delta \frac{\theta}{2\pi} + \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2 - \omega_1^2 \left(\frac{\theta}{2\pi} - 1\right)^2}}{\omega_1^2 + \delta^2} \quad (7)$$

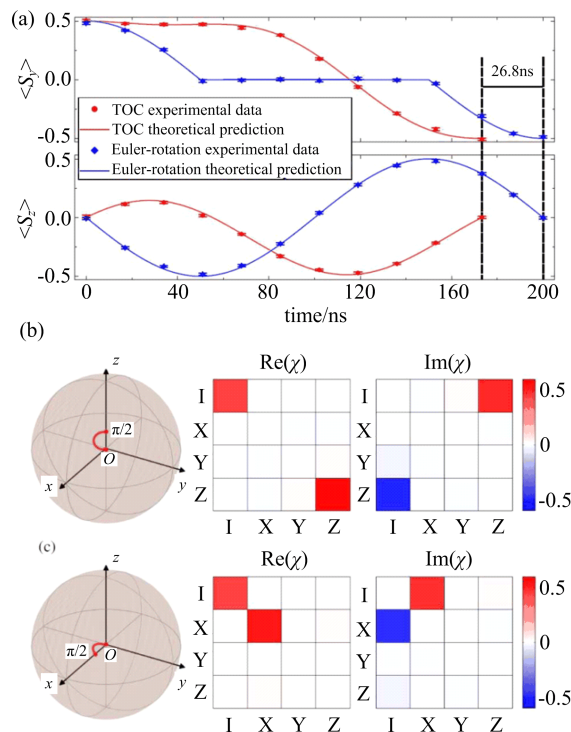
$$\eta = \frac{\theta}{2\pi T}$$

式中,  $T$  是最小演化时间,  $\eta$  是时间最优的哈密顿量中的参数. 当  $\delta = 0$  时, 可以通过欧拉转动的方式实现目标操作  $U_F = R(\hat{z}, \theta)$ . 演化操作定义为  $R(\hat{n}, \theta) = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{s}}$ , 它对应一个绕  $\hat{n} = \hat{x} \sin\gamma \cos\varphi + \hat{y} \sin\gamma \sin\varphi + \hat{z} \cos\gamma$  轴旋转  $\theta$  角的旋转. 通过对比图 8(a) 的结果可以得出, 使用时间最优的方式实现  $R(\hat{z}, \theta)$  的时间 (173.2ns) 比欧拉转动  $R(\hat{z}, \theta) = R(\hat{x}, \pi/2)R(\hat{y}, \theta)R(-\hat{x}, \pi/2)$  方式实现  $R(\hat{z}, \theta)$  的时间 (200ns) 短, 结果与预期一致.

我们进一步通过量子过程层析技术<sup>[14]</sup> 重构实现的量子逻辑门在泡利基  $\{I, X, Y, Z\}$  下的过程矩阵, 如图 8(b) 和 (c) 的右半部分所示, 实现量子逻辑门  $R(\hat{z}, \pi/2)$  的保真度为 1.00(1), 实现目标量子逻辑门  $R(\hat{x}, \pi/2)$  的保真度为 0.99(1). 当  $\delta \neq 0$  时哈密顿量需要满足其他限制条件, 也可以用这种方法生成时间最优的单比特量子逻辑门. 我们对所有实现的时间最优的量子逻辑门通过量子过程层析测量其与目标量子逻辑门的保真度, 所有的量子逻辑门的保真度都在 0.99 左右<sup>[2]</sup>.

普适量子逻辑门可以通过一组普适的单比特量子逻辑门和非平庸两比特量子逻辑门实现. 我们以 NV 色心电子自旋的  $|m_s = 0\rangle$  和  $|m_s = -1\rangle$  作为电子自旋比特, 以  $^{14}\text{N}$  核自旋的  $|m_I = 1\rangle$  和  $|m_I = 0\rangle$  作为核自旋量子比特构造两比特系统, 在该两比特系统中实验实现和验证时间最优的两比特量子逻辑门<sup>[2]</sup>. 系统哈密顿量为  $H_0 = 2\pi A S_z I_z$ , 控制哈密顿量为  $H_c(t) = 2\pi\omega_1[\cos\varphi(t)S_x + \sin\varphi(t)S_y]$ . 对应的约束条件为  $g_0(H_c) = \frac{1}{2}(\|H_c\|^2 - 4\pi^2\omega_1^2) = 0$  和  $g_1(H_c) = \text{Tr}(H_c B_k) = 0$ . 其中  $\{B_k\} = \{I_x, I_y, I_z, S_x I_x, S_x I_y, S_x I_z, S_y I_x, S_y I_y, S_y I_z, S_z, S_z I_x, S_z I_y, S_z I_z\}$ . 因为难以求解解析解, 我们通过数值方法来得到量子最速降线方程式(1)的解.

非平庸的两比特目标量子逻辑门<sup>[45]</sup> 为



(a) 分别以时间最优的方式和以欧拉转动的方式实验实现单比特量子逻辑门  $R(\hat{z}, \pi)$  的演化时间对比. 初始态为  $(|m_s = 0\rangle + i|m_s = -1\rangle)/\sqrt{2}$ , 量子态以时间最优的方式的演化时间比以欧拉转动的方式对应的演化时间短 26.8ns. (b) 实现的目标量子逻辑门为  $R(\hat{z}, \pi/2)$ . (c) 实现的目标量子逻辑门为  $R(\hat{x}, \pi/2)$ . 图的左半部分为时间最优的演化路径. 图的右半部分为量子过程层析的实验结果.

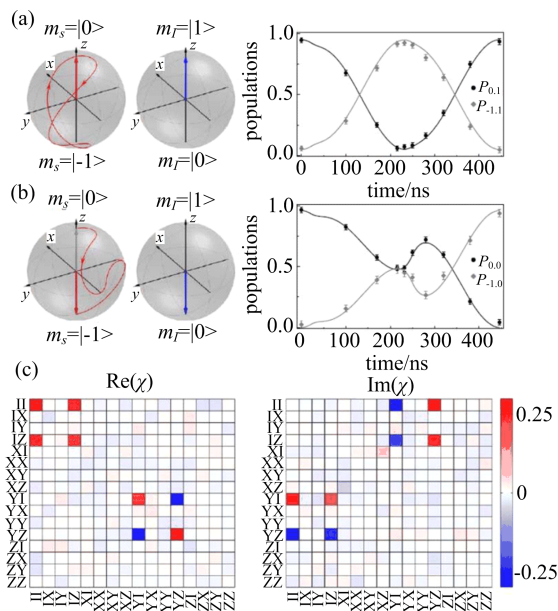
图 8 单比特时间最优控制量子逻辑门的实验实现<sup>[45]</sup>

Fig. 8 Experimental implementation of single-qubit TOC for target evolution operators<sup>[45]</sup>

$$U_F = U_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

我们在实验上实现两比特量子逻辑门  $U_c$  下的演化. 图 9(a) 和图 9(b) 的左半部分分别为两比特系统初态为  $|0, 1\rangle$  和  $|0, 0\rangle$  时, 系统的量子态在时间最优的  $U_c$  下的演化表现在布洛赫球上的轨迹. 可以看出, 当  $|m_I = 1\rangle$  时, 电子自旋量子比特由初态  $|m_s = 0\rangle$  经  $U_c$  演化后又回到态  $|m_s = 0\rangle$ ; 当  $|m_I = 0\rangle$  时, 电子自旋量子比特由初态  $|m_s = 0\rangle$  经  $U_c$  演化后翻转到态  $|m_I = -1\rangle$ . 图 9(a) 和图 9(b) 的右半部分为演化过程中量子态的布居度随着时间的变化. 图 9(a) 中, 系统初态为  $|0, 1\rangle$ , 图中黑色圆形和灰色菱形分别为演化过程中量子态在 |

$|0, 1\rangle$  和  $|1, -1\rangle$  上的布居度  $P_{|0,1\rangle}$  和  $P_{|1,-1\rangle}$  的实验结果, 与理论预期(图中黑色和灰色实线)一致. 实验得到的控制  $U$  量子逻辑门的时间为 446 ns. 我们还通过量子过程层析的方法计算实现的量子逻辑门  $U_c$  的保真度. 图 9(c) 是实验测得的过程矩阵的实部和虚部. 根据测得的过程矩阵, 可以得到  $U_c$  的保真度为 0.99(1), 该结果已经达到容错量子计算的要求, 并验证了通过时间最优的方式降低噪声的影响从而实现高保真度量子逻辑门的可行性<sup>[2]</sup>.



(a) 两比特系统的初态为  $|0, 1\rangle$ . (b) 两比特系统的初态为  $|0, 0\rangle$ . 图(a)和图(b)的左半部分为实现  $U_c$  过程中电子自旋量子比特和核自旋量子比特的态在布洛赫球上的演化轨迹; 右半部分为实现  $U_c$  过程中系统的态在  $|0, m_I\rangle$  和  $|-1, m_I\rangle$  上的布居度  $P_{0, m_I}$  和  $P_{-1, m_I}$ , 其中黑色圆形和灰色菱形为实验数据, 黑色和灰色实线为理论预期. 图中实验数据点的误差棒为统计标准差. (c) 以时间最优方式实现的控制  $U$  门的量子过程层析. 图的左半部分和右半部分分别是通过量子过程层析重构的过程矩阵  $\chi$  的实部和虚部. 通过光子计数统计的每个点的误差棒是 0.001 左右.

图 9 实现时间最优的两比特量子逻辑门的实验结果<sup>[45]</sup>

Fig. 9 Experimental implementation of two-qubit TOC for target evolution operators<sup>[45]</sup>

## 4 结论

量子体系的操控在量子计算、量子计量和高分辨率光谱学等领域具有重要意义. 存在各种噪声环境下在最小的时间里实现高保真的量子逻辑门是很有挑战性的工作. 本文主要介绍了我们基于金刚石 NV 色心自旋体系实现高保真度量子逻辑门的研究

成果, 包括以下三个工作:

(I) 通过动力学纠错量子逻辑门, 抑制准静态环境噪声, 将可用于施加量子逻辑门的相干时间达到  $T_{1\rho}$  极限, 实现了保真度 0.996 的单比特量子逻辑门.

(II) 通过设计新型组合脉冲和改进最优控制方法, 同时抑制准静态环境噪声和操控场噪声, 实现了保真度 0.99995 的单比特量子逻辑门和保真度 0.992 的两比特量子逻辑门, 为当前国际上固态自旋体系量子逻辑门保真度的最高水平, 达到了 surface code 对量子逻辑门保真度的阈值要求.

(III) 以时间最优的方式实现普适量子逻辑门, 实现的量子逻辑门不仅保真度高达 0.99, 而且时间比常规方法显著缩短<sup>[2]</sup>.

## 参考文献(References)

- [1] DIVINCENZO D P. The physical implementation of quantum computation [J]. Fortschritte der Physik (Progress of Physics), 2000, 48: 771-783.
- [2] 耿建培. 基于固态自旋量子比特的高保真度量子逻辑门的实验研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2017. GENG Jianpei. Experimental investigation of high-fidelity quantum logic gates on solid-state spin qubit [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2017.
- [3] CIRAC J I, ZOLLER P. Quantum computations with cold trapped ions [J]. Phys Rev Lett, 1995, 74: 4091-4094.
- [4] NAKAMURA Y, PASHKIN Y A, TSAI J S. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box [J]. Nature, 1999, 398: 786-788.
- [5] DEUTSCH I H, BRENNEN G K, JESSEN P S. Quantum computing with neutral atoms in an optical lattice [J]. Fortschritte der Physik (Progress of Physics), 2000, 48: 925-943.
- [6] KNILL E, LAFLAMME R, MILBURN G J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics [J]. Nature, 2001, 409: 46-52.
- [7] BARENCO A, DEUTSCH D, EKERT A K. Conditional computation with quantum logic gate [J]. Phys Rev Lett, 1995, 74: 4083-4086.
- [8] GERSHENFELD N A. Bulk spin-resonance quantum computation [J]. Science, 1997, 275: 350-356.
- [9] BALASUBRAMAIAN G, NEUMANN P, TWITCHEN D, et al. Ultralong spin coherence time in isotopically engineered diamond [J]. Nat Mater,



- 2009, 8: 383-387.
- [10] MAURER P C, KUCSKO G, LATTA C, et al. Room-temperature quantum bit memory exceeding one second[J]. *Science*, 2012, 336: 1283-1286.
- [11] FUCHS G D, DOBROVITSKI V V, TOYLI D M, et al. Gigahertz dynamics of a strongly driven single quantum spin[J]. *Science*, 2009, 326: 1520-1522.
- [12] GRUBER A, DRBENSTEDT A, TIETZ C, et al. Scanning confocal optical microscopy and magnetic resonance on single defect centers[J]. *Science*, 1997, 276: 2012-2014.
- [13] NIELSEN M A, CHUANG I L. *Quantum Computation And Quantum Information* [M]. Cambridge, U K: Cambridge University Press, 2000.
- [14] SHOR P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory[J]. *Phys Rev A*, 1995, 52: R2493(R).
- [15] STEANE A M. Error correcting codes in quantum theory[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, 77: 793-797.
- [16] KNILL E, LAFLAMME R. Theory of quantum error-correcting codes[J]. *Phys Rev A*, 1997, 55: 900-911.
- [17] DUAN L M, GUO G C. Preserving coherence in quantum computation by pairing quantum bits[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 79: 1953-1956.
- [18] LIDAR D A, CHUANG I L, WHALEY K B. Decoherence-free subspaces for quantum computation [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 2594-2597.
- [19] VIOLA L, KNILL E, LLOYD S. Dynamical decoupling of open quantum systems [J]. *Phys Rev Lett*, 1999, 82: 2417-2421.
- [20] DU J F, RONG X, ZHAO N, et al. Preserving electron spin coherence in solids by optimal dynamical decoupling[J]. *Nature*, 2009, 461: 1265-1268.
- [21] WANG Y, RONG X, FENG P B, et al. Preservation of bipartite pseudo entanglement in solids using dynamical decoupling [J]. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 040501.
- [22] LANGE G D, WANG Z H, RISTE D, et al. Universal dynamical decoupling of a single solid-state spin from a spin bath[J]. *Science*, 2010, 330: 60-63.
- [23] RYAN C A, HODGES J S, CORY D G. Robust decoupling techniques to extend quantum coherence in diamond[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 200402.
- [24] KHODJASTEH K, VIOLA L. Dynamically error-corrected gates for universal quantum computation[J]. *Phys Rev Lett*, 2009, 102: 080501.
- [25] KHODJASTEH K, LIDAR D A, VIOLA L. Arbitrarily accurate dynamical control in open quantum systems[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 090501.
- [26] WEST J R, LIDAR D A, FONG B H, et al. Highfidelity quantum gates via dynamical decoupling [J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 230503.
- [27] KESTNER J P, WANG X, BISHOP L S, et al. Noise-resistant control for a spin qubit array[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 140502.
- [28] WANG X, BISHOP L S, KESTNER J P, et al. Composite pulses for robust universal control of singlet-triplet qubits [J]. *Nature Communications*, 2012, 3: 997.
- [29] VIOLA L, KNILL E. Robust dynamical decoupling of quantum systems with bounded controls[J]. *Phys Rev Lett*, 2003, 90: 037901.
- [30] RONG X, GENG J P, WANG Z X, et al. Implementation of dynamically corrected gates on a single electron spin in diamond[J]. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 050503.
- [31] RONG X, GENG J P, SHI F Z, et al. Experimental fault-tolerant universal quantum gates with solid-state spins under ambient conditions [J]. *Nature Communications*, 2015, 6: 8748.
- [32] KNILL E, LEIBFRIED D, REICHLE R, et al. Randomized benchmarking of quantum gates[J]. *Phys Rev A*, 2008, 77: 012307.
- [33] KHANEJA N, REISS T, KEHLET C, et al. Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms[J]. *J Magn Reson*, 2005, 172: 296-305.
- [34] SUSSMANN H J, WILLEMS J C. 300 years of optimal control: from the brachistochrone to the maximum principle [J]. *IEEE Control Syst Mag*, 1997, 17: 32-44.
- [35] ZERMELO E. Über das navigations problem bei ruhender oder veränderlicher windverteilung [J]. *Z Angew Math Mech*, 1931, 11: 114-124.
- [36] HEGERFELDT G C. Driving at the quantum speed limit: Optimal control of a two-level system[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 260501.
- [37] GARSON A, GLASER S J, SUGNY D. Time-optimal control of SU(2) quantum operations[J]. *Phys Rev A*, 2013, 88: 043422.
- [38] YUAN H D, ZEIER R, POMPLUM K, et al. Time-optimal polarization transfer from an electron spin to a nuclear spin[J]. *Phys Rev A*, 2015, 92: 053414.
- [39] CARLINI A, HOSOYA A, KOIKE T, et al. Time-optimal unitary operations [J]. *Phys Rev A*, 2007, 75: 042308.
- [40] REZAKHANI A T, KUO W J, HAMMA A, et al. Quantum adiabatic brachistochrone [J]. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 080502.