

## 调和 Bézier 曲面间的连续性条件

倪倩<sup>1,2</sup>, 王旭辉<sup>2</sup>

(1. 中国科学技术大学数学科学学院, 安徽合肥 230026;  
2. 合肥工业大学数学学院, 安徽合肥 230009)

**摘要:**研究了两个双  $n$  次调和 Bézier 曲面在其公共边界上  $C^1$  连续时, 其控制顶点之间的关系. 结果表明, 当两个双  $n$  次调和 Bézier 曲面在公共边界上满足  $C^r (r \geq 1)$  连续性条件时, 两个双  $n$  次调和 Bézier 曲面片来自于同一张曲面.

**关键词:**调和 Bézier 曲面; 连续性条件; 控制点

**中图分类号:** TP391.7; O241.5 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.11.004

**2010 Mathematics Subject Classification:** Primary 41A10; Secondary 68U07

**引用格式:** Ni Qian, Wang Xuhui. The continuity condition for harmonic Bézier surfaces[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015, 45(11):906-910.

倪倩, 王旭辉. 调和 Bézier 曲面间的连续性条件[J]. 中国科学技术大学学报, 2015, 45(11):906-910.

## The continuity condition for harmonic Bézier surfaces

NI Qian<sup>1,2</sup>, WANG Xuhui<sup>2</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;  
2. School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** The relationships between control points for two bi-degree  $(n, n)$  harmonic Bézier surface patches were studied, when these two surface patches are  $C^1$  continuous at the common boundary. The result shows that when the two harmonic Bézier surfaces are  $C^r$  continuous, the two harmonic Bézier surface patches are from the same piece of surface.

**Key words:** harmonic Bézier surfaces; continuity condition; control points

### 0 引言

给定一个曲面  $\mathbf{x}: (u, v) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , 称其为调和曲面当且仅当曲面满足条件  $\Delta \mathbf{x} = 0$ , 其中  $\Delta = (\partial^2 / \partial u^2 + \partial^2 / \partial v^2)$  是调和算子, 也称 Laplace 算子. 这一概念是由 Monterde<sup>[1]</sup> 首先提出的. 近期, Monterde 等对调和 Bézier 曲面与双调和 Bézier 曲面做了进一步

研究, 从而得到了调和 Bézier 曲面与双调和 Bézier 曲面的一些特殊性质<sup>[1-5]</sup>. 另一方面, 调和曲面作为极小曲面的一种逼近曲面, 在曲面设计、网格光顺等领域有着重要的应用<sup>[6]</sup>. 极小曲面的理论主要表明, 在给定初始边界的条件下, 存在由该边界决定的面积极小曲面. 给定一个参数曲面  $\mathbf{x}(u, v)$ , 如果  $\mathbf{x}(u, v)$  满足等温条件, 即

收稿日期: 2014-02-12; 修回日期: 2014-05-20

基金项目: 国家自然科学基金(11301131), 安徽省自然科学基金(1408085MKL84), 中央高校基本科研业务费专项资金资助.

作者简介: 倪倩, 女, 1990年生, 博士生. 研究方向: 计算机辅助几何设计. E-mail: prima@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 王旭辉, 博士/副教授. E-mail: xhw@hfut.edu.cn

$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$  且  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ , 其中,  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  是  $\mathbf{x}(u, v)$  分别对  $u$  和  $v$  的偏导,  $\langle, \rangle$  为向量间的点积运算, 则曲面是极小曲面当且仅当它是调和的. 近年来, 随着等几何分析方法(IGA)<sup>[8]</sup>的提出与发展, 计算区域的参数化变得十分重要, 而构造合适的区域参数化与调和 Bézier 曲面的相关理论密切相关<sup>[9]</sup>.

为了促进调和 Bézier 曲面的进一步应用, 拟研究双  $n$  次调和 Bézier 曲面之间的  $C^1$  连续性条件. 即, 两双  $n$  次调和 Bézier 曲面沿公共边界  $C^1$  连续时, 两双  $n$  次调和 Bézier 曲面控制顶点之间的关系. 结果表明, 由于调和曲面的特殊性, 当两双  $n$  次调和 Bézier 曲面在公共边界上  $C^r (r \geq 1)$  连续时, 两双  $n$  次调和 Bézier 曲面片来自于同一张曲面.

### 1 调和 Bézier 曲面间 $C^r$ 连续性条件

**定义 1.1** 给定双  $n$  次 Bézier 曲面

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (1)$$

式中,  $B_i^n(u) = C_n^i (1-u)^{n-i} u^i (i = 0, 1, \dots, n)$  为 Bernstein 多项式,  $\mathbf{p}_{ij} (i, j = 0, \dots, n)$  是 Bézier 曲面的控制点. 若  $\mathbf{P}(u, v)$  满足调和条件, 即

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \mathbf{P}(u, v) = 0,$$

则称  $\mathbf{P}(u, v)$  为调和 Bézier 曲面.

基于调和条件, 可得调和 Bézier 曲面控制顶点的关系:

**引理 1.2**<sup>[1]</sup> 设  $\{\mathbf{p}_{ij}\}_{i,j}$  是  $\mathbb{R}^3$  中的一个控制网, 称相关的 Bézier 曲面(1)为调和 Bézier 曲面当且仅当其控制点间满足如下关系式,

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}_{i+2,j} a_{n,i,0} + \mathbf{p}_{i+1,j} (a_{n,i-1,1} - 2a_{n,i,0}) + \\ & \mathbf{p}_{i-1,j} (a_{n,i-1,1} - 2a_{n,i-2,2}) + \mathbf{p}_{i-2,j} a_{n,i-2,2} + \\ & \mathbf{p}_{i,j+2} a_{n,j,0} + \mathbf{p}_{i,j+1} (a_{n,j-1,1} - 2a_{n,j,0}) + \\ & \mathbf{p}_{i,j-1} (a_{n,j-1,1} - 2a_{n,j-2,2}) + \mathbf{p}_{i,j-2} a_{n,j-2,2} + \\ & \mathbf{p}_{i,j} (a_{n,i,0} - 2a_{n,i-1,1} + a_{n,i-2,2} + \\ & a_{n,j,0} - 2a_{n,j-1,1} + a_{n,j-2,2}) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式中,

$$\begin{cases} a_{n,i,0} = (n-i)(n-i-1), & i \in \{0, \dots, n\}; \\ a_{n,i,1} = 2(i+1)(n-i-1), & i \in \{1, \dots, n-1\}; \\ a_{n,i,2} = (i+1)(i+2), & i \in \{2, \dots, n-2\}; \\ a_{n,i,k} = 0 (k > 2). \end{cases}$$

另外, 如果  $i \notin \{0, \dots, n\}$  或  $j \notin \{0, \dots, n\}$ , 令  $\mathbf{p}_{i,j} = 0$ .

由引理 1.2 可得下面引理:

**引理 1.3** 给定一个双  $n$  次调和 Bézier 曲面(1),

① 如果  $n$  是奇数, 内部的控制点  $\{\mathbf{p}_{k,l}\}_{k=l; l=0}^{n-1;n}$  由第一行和最后一行的控制点  $\{\mathbf{p}_{0,l}\}_{l=0}^n$  和  $\{\mathbf{p}_{n,l}\}_{l=0}^n$  决定;

② 如果  $n$  是偶数, 内部的控制点  $\{\mathbf{p}_{k,l}\}_{k=l; l=0}^{n-1;n}$  和顶角的控制点  $\mathbf{p}_{n,n}$  由第一行和最后一行的控制点  $\{\mathbf{p}_{0,l}\}_{l=0}^n$  和  $\{\mathbf{p}_{n,l}\}_{l=0}^{n-1}$  决定.

**引理 1.4** 对于双  $n$  次调和 Bézier 曲面(1), 若

$$\mathbf{P}(0, v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{0,j} B_j^n(v), \quad \mathbf{P}(1, v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{n,j} B_j^n(v),$$

或

$$\mathbf{P}(u, 0) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_{i,0} B_i^n(u), \quad \mathbf{P}(u, 1) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_{n,i} B_i^n(u)$$

为已知条件, 则该调和 Bézier 曲面完全确定.

**证明** 由引理 1.3 易得. □

**引理 1.5**<sup>[1]</sup> 若

$$f(u, v) = \sum_{k,l=0}^n a_{k,l} u^k v^l, \quad n \geq 2$$

是一个满足调和条件的多项式函数, 则

① 如果  $n$  是奇数, 系数  $\{a_{k,l}\}_{k=2,l=0}^n$  由系数  $\{a_{0,l}\}_{l=0}^n$  和  $\{a_{1,l}\}_{l=0}^n$  完全决定;

② 如果  $n$  是偶数, 系数  $\{a_{k,l}\}_{k=2,l=0}^n$  和  $a_{1,n}$  由系数  $\{a_{0,l}\}_{l=0}^n$  和  $\{a_{1,l}\}_{l=0}^{n-1}$  完全决定.

由引理 1.5, 可得如下定理:

**定理 1.6** 设  $\mathbf{P}(u, v)$  为双  $n$  次调和 Bézier 曲面. 若  $\mathbf{P}(0, v)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}(0, v)$  已知, 则  $\mathbf{P}(u, v)$  唯一确定.

**证明** 将(1)改写成幂基形式, 即

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v) = \sum_{k,l=0}^n (a_{k,l}, b_{k,l}, c_{k,l}) u^k v^l.$$

此处仅讨论  $n$  为奇数时情形,  $n$  为偶数时类似. 由于  $\mathbf{P}(0, v)$  已知, 且

$$\mathbf{P}(0, v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{0,j} B_j^n(v) = \sum_{l=0}^n (a_{0,l}, b_{0,l}, c_{0,l}) v^l,$$

故可得  $(a_{0,l}, b_{0,l}, c_{0,l})$ ,  $l = 0, \dots, n$ . 又由于  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}(0, v)$  已知, 且

$$\frac{\partial \mathbf{P}(0, v)}{\partial v} = \sum_{l=0}^n (a_{1,l}, b_{1,l}, c_{1,l}) v^l,$$

故可得  $(a_{1,l}, b_{1,l}, c_{1,l}), l=0, \dots, n$ .

由引理 1.5 可知,  $\sum_{k,l=0}^n (a_{k,l}, b_{k,l}, c_{k,l}) u^k v^l$  被唯一确定, 进而  $\mathbf{P}(u, v)$  被唯一确定.  $\square$

**定义 1.7** 给定双  $n$  次 Bézier 曲面

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v), \\ (u, v) &\in [0, 1] \times [0, 1], \\ \mathbf{Q}(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{q}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v), \\ (u, v) &\in [0, 1] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

若

$$\frac{\partial^j \mathbf{P}(1, v)}{\partial u^j} = \frac{\partial^j \mathbf{Q}(0, v)}{\partial u^j}, \quad j = 0, 1, \dots, r,$$

则称  $\mathbf{P}(u, v)$  和  $\mathbf{Q}(u, v)$  沿其公共边界  $\mathbf{P}(1, v) = \mathbf{Q}(0, v)$  上  $C^r$  连续.

令  $\Delta^{k,0}$  为差分算子, 即

$$\begin{aligned} \Delta^{1,0} \mathbf{p}_{j,i} &= \mathbf{p}_{j+1,i} - \mathbf{p}_{j,i}, \\ \Delta^{k,0} \mathbf{p}_{j,i} &= \Delta^{1,0} (\Delta^{k-1,0} \mathbf{p}_{j,i}) = \\ &= \Delta^{k-1,0} \mathbf{p}_{j+1,i} - \Delta^{k-1,0} \mathbf{p}_{j,i}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

根据 Bézier 曲面的偏导计算公式可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \mathbf{P}(1, v)}{\partial u^k} &= \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^n \Delta^{k,0} \mathbf{p}_{n-k,i} B_i^n(v), \\ \frac{\partial^k \mathbf{Q}(0, v)}{\partial u^k} &= \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^n \Delta^{k,0} \mathbf{q}_{0,i} B_i^n(v). \end{aligned}$$

故可推出  $\mathbf{P}(u, v)$  和  $\mathbf{Q}(u, v)$  沿其公共边界  $\mathbf{P}(1, v) = \mathbf{Q}(0, v)$  满足  $C^r$  连续条件当且仅当

$$\Delta^{k,0} \mathbf{p}_{n-k,i} = \Delta^{k,0} \mathbf{q}_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, r \quad (3)$$

特别地,  $\mathbf{P}(u, v)$  和  $\mathbf{Q}(u, v)$  沿其公共边界  $\mathbf{P}(1, v) = \mathbf{Q}(0, v)$  满足  $C^1$  连续条件, 则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{n,i} &= \mathbf{q}_{0,i}, \\ \mathbf{p}_{n,i} - \mathbf{p}_{n-1,i} &= \mathbf{q}_{1,i} - \mathbf{q}_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

**推论 1.8** 给定一个双  $n$  次调和 Bézier 曲面 (1), 若存在另一双  $n$  次调和 Bézier 曲面  $\mathbf{Q}(u, v)$ , 且  $\mathbf{Q}(u, v)$  与  $\mathbf{P}(u, v)$  在公共边界  $\mathbf{P}(1, v) = \mathbf{Q}(0, v)$  处满足  $C^1$  连续性条件, 则这样的  $\mathbf{Q}(u, v)$  是唯一的.

**证明** 由曲面间  $C^1$  连续性条件与定理 1.6 易得.  $\square$

**定理 1.9** 若双  $n$  次调和 Bézier 曲面  $\mathbf{P}(u, v)$  与  $\mathbf{Q}(u, v)$ ,  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$  在公共边界  $\mathbf{P}(1, v) = \mathbf{Q}(0, v)$  处满足  $C^1$  连续性条件, 则  $\mathbf{Q}(u, v)$  是  $\mathbf{P}(u, v)$  的延伸曲面.

**证明** 由推论 1.8 知, 与  $\mathbf{P}(u, v)$  在公共边界处满足  $C^1$  连续性条件的  $\mathbf{Q}(u, v)$  是唯一确定的. 另一方面, 曲面本身的延伸是  $C^\infty$  连续的, 故由唯一性知,  $\mathbf{Q}(u, v)$  是  $\mathbf{P}(u, v)$  的延伸曲面.  $\square$

由  $C^r$  连续性条件 (3) 与定理 1.9 可进一步得: 若双  $n$  次调和 Bézier 曲面  $\mathbf{P}(u, v)$  与  $\mathbf{Q}(u, v)$ ,  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$  在公共边界  $\mathbf{P}(1, v) = \mathbf{Q}(0, v)$  处  $C^r (r \geq 1)$  连续时, 则  $\mathbf{Q}(u, v)$  是  $\mathbf{P}(u, v)$  的延伸曲面.

此外, 由  $C^r$  连续性条件与定理 1.9 可得下面结论及控制点关系式:

**推论 1.10** 若双  $n$  次调和 Bézier 曲面  $\mathbf{P}(u, v)$  与  $\mathbf{Q}(u, v)$ ,  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$  在公共边界  $\mathbf{P}(1, v) = \mathbf{Q}(0, v)$  处  $C^r (r \geq 1)$  连续, 当且仅当存在唯一的双  $n$  次调和 Bézier 曲面

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{h}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v), \\ (u, v) &\in [0, 1] \times [0, 1] \end{aligned}$$

使得 Bézier 曲面  $\mathbf{P}(u, v)$  与  $\mathbf{Q}(u, v)$ ,  $(u, v)$  恰由曲面  $\mathbf{H}(u, v)$  在参数  $u=1/2$  处细分得到. 即令

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}_{i,j}^0 &= \mathbf{h}_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, n; \\ \mathbf{h}_{i,j}^k &= \frac{1}{2} \mathbf{h}_{i,j}^{k-1} + \frac{1}{2} \mathbf{h}_{i+1,j}^{k-1}, \\ &k = 1, \dots, n; \quad i = 0, \dots, n-k; \quad j = 0, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则  $\mathbf{h}_{0,j}^k = \mathbf{p}_{k,j}$ ,  $\mathbf{h}_{k,j}^{n-k} = \mathbf{q}_{k,j}$ ,  $k, j = 0, 1, \dots, n$ .

## 2 算例

**例 2.1** 给定双 3 次调和 Bézier 曲面 (1) 两条边上控制顶点:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{0,0} &= (-1, 0, 1), \\ \mathbf{p}_{0,1} &= \left(-1, \frac{3}{4}, 1\right), \\ \mathbf{p}_{0,2} &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1\right), \\ \mathbf{p}_{0,3} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1\right), \\ \mathbf{p}_{3,0} &= \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right), \\ \mathbf{p}_{3,1} &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, 0\right), \\ \mathbf{p}_{3,2} &= \left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{10}, 0\right), \\ \mathbf{p}_{3,3} &= \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{10}, 0\right). \end{aligned}$$

由引理 1.2 中关系式(2),可计算出  $\mathbf{P}(u, v)$  的内部控制顶点:

$$\mathbf{p}_{1,0} = \left(-\frac{5}{12}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\mathbf{p}_{1,1} = \left(-\frac{5}{12}, \frac{16}{45}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\mathbf{p}_{1,2} = \left(0, \frac{32}{45}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\mathbf{p}_{1,3} = \left(\frac{5}{6}, \frac{19}{30}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\mathbf{p}_{2,0} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{20}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{p}_{2,1} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{53}{180}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{p}_{2,2} = \left(0, \frac{53}{90}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{p}_{2,3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{31}{60}, \frac{1}{3}\right).$$

由控制顶点坐标,可得调和曲面参数表示

$$\mathbf{P}(u, v) = \left(\frac{1}{4}(-4 - 6u^2 + u^3 + 6v^2 + u(7 - 3v^2)),\right.$$

$$\frac{1}{20}(15u^2(1 + v) - u^3(3 + v) - 5v(-9 + 3v + v^2) +$$

$$\left. u(-12 - 35v + 9v^2 + v^3)), 1 - u\right).$$

容易验证  $\Delta \mathbf{P}(u, v) = (0, 0, 0)$ .

设另一个双 3 次曲面  $\mathbf{Q}(u, v)$  与  $\mathbf{P}(u, v)$  在公共边界  $\mathbf{P}(1, v) = \mathbf{Q}(0, v)$  上  $C^1$  连续,由连续性条件知

$$\mathbf{q}_{0,0} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right),$$

$$\mathbf{q}_{0,1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, 0\right),$$

$$\mathbf{q}_{0,2} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{10}, 0\right),$$

$$\mathbf{q}_{0,3} = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{10}, 0\right),$$

$$\mathbf{q}_{1,0} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{20}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{q}_{1,1} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{91}{180}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{q}_{1,2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{73}{90}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{q}_{1,3} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{53}{60}, -\frac{1}{3}\right).$$

由定理 1.6,可计算出  $\mathbf{Q}(u, v)$  其余控制顶点为

$$\mathbf{q}_{2,0} = \left(-\frac{13}{12}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$\mathbf{q}_{2,1} = \left(-\frac{13}{12}, \frac{7}{9}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$\mathbf{q}_{2,2} = \left(-1, \frac{52}{45}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$\mathbf{q}_{2,3} = \left(-\frac{5}{6}, \frac{41}{30}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$\mathbf{q}_{3,0} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}, -1\right),$$

$$\mathbf{q}_{3,1} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{21}{20}, -1\right),$$

$$\mathbf{q}_{3,2} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{31}{20}, -1\right),$$

$$\mathbf{q}_{3,3} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{39}{20}, -1\right).$$

由控制顶点坐标,可得调和曲面参数表示

$$\mathbf{Q}(u, v) = \left(\frac{1}{4}(-2 - 3u^2 + u^3 + 3v^2 - u(2 + 3v^2)),\right.$$

$$\frac{1}{20}(-u^3(3 + v) + 6u^2(1 + 2v) -$$

$$2v(-12 + 3v + 2v^2) +$$

$$\left. u(9 - 8v + 9v^2 + v^3)), -u\right).$$

容易验证  $\Delta \mathbf{Q}(u, v) = (0, 0, 0)$ .

令新双 3 次调和 Bézier 曲面为

$$\mathbf{H}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{h}_{ij} B_i^n(u) B_j^n(v),$$

$$(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

其中,  $\mathbf{h}_{0i} = \mathbf{p}_{0i}, \mathbf{h}_{3i} = \mathbf{q}_{3i}, i = 0, \dots, 3$ , 且

$$\mathbf{h}_{10} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{h}_{11} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{180}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{h}_{12} = \left(\frac{1}{2}, \frac{31}{180}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{h}_{13} = \left(\frac{7}{6}, \frac{1}{60}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{h}_{20} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{h}_{21} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{91}{180}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{h}_{22} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{137}{180}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{h}_{23} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{47}{60}, -\frac{1}{3}\right).$$

由式(5)可得

$$\mathbf{h}_{0,j}^k = \mathbf{p}_{k,j}, \mathbf{h}_{k,j}^{3-k} = \mathbf{q}_{k,j}, k, j = 0, 1, \dots, 3.$$

$\mathbf{P}(u, v)$  和  $\mathbf{Q}(u, v)$  在公共边界处满足  $C^1$  连续

的结果如图 1 所示.

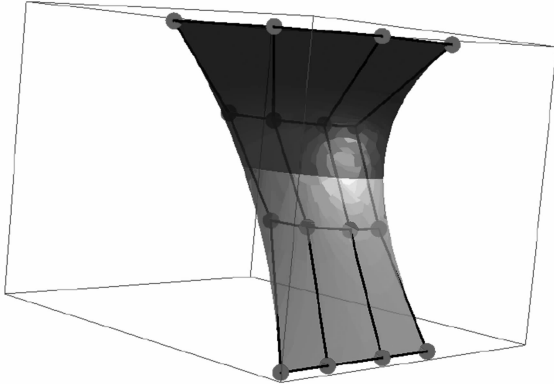


图 1 调和曲面  $P(u, v)$  (上部) 与  $Q(u, v)$  (下部) 在公共边界处  $C^1$  连续

Fig. 1 Harmonic surfaces  $P(u, v)$  (top) and  $Q(u, v)$  (bottom) are  $C^1$  continuous at their common boundary

### 3 结论

本文给出了两个双  $n$  次调和 Bézier 曲面在公共边界处满足  $C^1$  连续时两曲面控制点之间的关系, 即其中一个曲面的控制点可由另一曲面的边界控制点唯一确定, 所以满足  $C^1$  连续时其中一个曲面可由另一曲面唯一确定. 另外, 还证明了满足  $C^r (r \geq 1)$  连续条件的两调和 Bézier 曲面来自同一曲面. 这为调和 Bézier 曲面相关理论的进一步应用打下了理论基础. 如何将该连续性条件及相关结论应用于计算区域参数化将是一个值得探讨的问题. 此外, 本文仅讨论了调和 Bézier 曲面的连续性条件, 双调和 Bézier 曲面的连续性条件还有待分析和讨论.

#### 参考文献 (References)

- [1] Monterde J. The plateau-Bézier problem [C]//

Mathematics of Surfaces X. Berlin: Springer, 2003, 2768: 262-273.

- [2] Monterde J, Ugail H. On harmonic and biharmonic Bézier surfaces [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(7): 697-715.
- [3] Arnal A, Lluch A, Monterde J. PDE triangular Bézier surfaces: Harmonic, biharmonic and isotropic surfaces [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235: 1 098-1 113.
- [4] Centella P, Monterde J, Moreno E, et al. Two  $C^1$ -methods to generate Bézier surfaces from the boundary [J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26: 152-173.
- [5] Monterde J. Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21: 117-136.
- [6] Cosin C, Monterde J. Bézier surfaces of minimal area [C]// Computational Science — ICCS 2002: International Conference Amsterdam, The Netherlands, April 21-24, 2002 Proceedings, Part II. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2002: 72-81.
- [7] Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide[M]. 5th ed. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 2001.
- [8] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry, and mesh refinement [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194: 4 135-4 195.
- [9] Xu G, Mourrain B, Duvigneau R, et al. Constructing analysis-suitable parameterization of computational domain from CAD boundary by variational harmonic method[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 252: 275-289.