第44卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol. 44, No. 2
2014年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2014

文章编号:0253-2778(2014)02-0096-05

连通图的 Harary 指数上界及其极图

李小新[1],查淑萍[2],范益政[3]

(1.池州学院数学系,安徽池州 247000;2.安庆师范学院数学与计算科学学院,安徽安庆 246133;
3.安徽大学数学科学学院,安徽合肥 230601)

摘要:图的 Harary 指数定义为图的所有顶点对的距离的倒数之和.刻画了在给定点数和直径的图类中,Harary 指数达到最大的极图,并由此确定了 Harary 指数关于直径的一个上界.另外,在 n 阶连通图中,刻画了 Harary 指数达到第二大和第三大的图的结构.

关键词:图;Harary 指数;直径

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2014.02.003

AMS Subject Classification (2000): 05C90

引用格式: Li Xiaoxin, Zha Shuping, Fan Yizheng. An upper bound for the Harary index of a connected graph and the corresponding extremal graph[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014, 44(2):96-100.

李小新,查淑萍,范益政. 连通图的 Harary 指数上界及其极图[J]. 中国科学技术大学学报,2014, 44(2):96-100.

An upper bound for the Harary index of a connected graph and the corresponding extremal graph

LI Xiaoxin[1], ZHA Shuping[2], FAN Yizheng[3]

(1. *Department of Mathematics, Chizhou University, Chizhou* 247000, *China*;
2. *School of Mathematics and Computation Sciences, Anqing Normal University, Anqing* 246133, *China*;
3. *School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei* 230601, *China*)

Abstract: The Harary index of a graph is defined as the sum of reciprocals of distances between all pairs of vertices of the graph. The graph(s) with maximum Harary index among all graphs with given order and diameter was characterized, and an upper bound for the Harary index in terms of diameter was provided. In addition, the connected graphs of order n with the second maximum and the third maximum Harary indices were characterized, respectively.

Key words: graph; Harary index; diameter

0 引言

设 G 是一个简单图,顶点集为 V(G),边集为 E(G).图 G 中两个顶点 u, v 之间的距离定义为 G 中连接 u 和 v 的最短路的长度,记作 $d_G(u,v)$,而 G 中任意两点的距离的最大值称为图 G 的直径.图 G

收稿日期:2013-04-16;**修回日期**:2013-09-06

基金项目:国家自然科学基金 (11071002),安徽省教育厅自然科学研究重点项目(KJ2013A196)资助.

作者简介:李小新(通讯作者),男,1976 年生,硕士/副教授. 研究方向:代数图论与化学图论. E-mail:lxx@czu.edu.cn

的 Harary 指数，记作 $H(G)$，定义为

$$H(G)=\sum_{u,v\in V(G)}\frac{1}{d_G(u,v)},$$

是由 Balaban 等[1]和 Trinajstic 等[2]在 1993 年为了刻画分子图的结构而独立提出的. 关于 Harary 指数的数学性质及其应用可参阅文献[3-7].

对不连通图 G，由于来自两个不同分支的一对顶点之间的距离为无穷大，因此其倒数可视为 0. 这样，我们可以定义不连通图 G 的 Harary 指数为 $H(G)=\sum_{i=1}^{k}H(G_i)$，这里，$G_1,G_2,\cdots,G_k$ 为 G 的 k 个分支.

图 G 的 Wiener 指数 $W(G)$ 是另一个基于距离的拓扑指数. 作为一个最古老的拓扑指数，Wiener 指数由 Wiener[8] 在 1947 年提出，定义为 $W(G)=\sum_{u,v\in V(G)}d_G(u,v)$. 图的 Harary 指数引入是非常自然的：因为在许多实例中，距离较远的原子之间的彼此影响程度远小于距离较近的原子之间，因此人们希望能设计一个不同于 Wiener 指数的基于距离的拓扑指数，使得在一个分子中，距离较远的原子对远比距离较近的原子对的贡献小.

对连通图 G，若用 $\gamma(G,k)$表示 G 中距离为 k 的顶点对的数量，则

$$H(G)=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\gamma(G,k) \tag{1}$$

若图 G 的结构比较简单（如直径较小），则用式(1)来计算图 G 的 Harary 指数是很方便的. 但一般地，利用式(1)来计算图 G 的 Harary 指数虽然是有效的，却是比较困难的[9]. 因此对某类图，给出其 Harary 指数的上界或者下界，是很有意义的，如文献[5,7,10]. 另外，刻画给定图类中关于 Harary 指数的极图也被广泛研究，如文献[9,11-18].

对于给定的 n 和 $D(1\leqslant D\leqslant n-1)$，令 $M(n,D)$（见图 1）表示由完全图 K_{n-D+2} 删去一条边，并在该边的两个端点上分别粘上长为$\left\lceil\frac{D}{2}\right\rceil-1$ 和$\left\lfloor\frac{D}{2}\right\rfloor-1$ 的两条悬挂路而得的图. 用 K_n，P_n 和 S_n 分别表示 n 阶的完全图、路和星. 本文中，我们证明了：在顶点数和直径分别为 n 和 D 的图类中，当 D 为偶数时，$M(n,D)$是 Harary 指数达到最大的唯一图；当 D 为奇数时，极大图（见图 2）不唯一，其结构为：由完全图 K_{n-D+1}添上两个顶点 u,v，使得 u 与 K_{n-D+1}中 i（$\geqslant 1$）个顶点相邻，v 与 K_{n-D+1} 中其余 $n-D+1-i$ 个顶点相邻，并且分别以 u,v 为端点，分别添加长为$\frac{D-3}{2}$的悬挂路. 根据极图的结构，本文给出了 Harary 指数关于直径的一个上界. 另外，在 n 阶连通图中，证明了由 K_n 分别删去一条边和两条边后所得的图分别为 Harary 指数取得第二大和第三大的图.

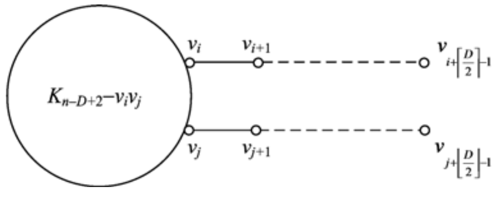

图 1　当 D 为偶数时，Harary 指数达到最大的图 $M(n,D)$

Fig. 1　The graph $M(n,D)$ with maximum Harary index when D is even

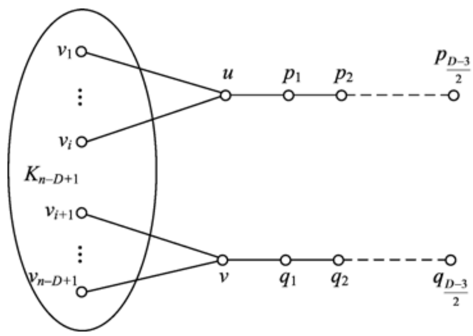

图 2　当 D 为奇数时，Harary 指数达到最大的图的结构（$i\geqslant 1$）

Fig. 2　The graphs with maximum Harary index when D is odd（$i\geqslant 1$）

1　主要结果

对图 G，若增加一条边，则 G 的任意两点之间的距离不会增加，但至少有两点（如新增边的两个端点）之间的距离会减少；若删去一条边，则 G 的任意两点之间的距离不会减少，但至少有两点（如新删边的两个端点）之间的距离会增加. 于是有

引理 1.1[13]　设 G 是一个图，$u,v\in V(G)$. 若 $uv\notin E(G)$，则 $H(G)<H(G+uv)$；若 $uv\in E(G)$，则 $H(G)>H(G-uv)$.

对 n 阶连通图 G，显然直径 D 满足 $1\leqslant D\leqslant n-1$，且当 $D=1$ 时，$G\cong K_n$；当 $D=n-1$ 时，$G\cong P_n$. 因而 G 的 Harary 指数有如下的界：

引理 1.2[7]　设 G 是一个 $n\geqslant 2$ 阶连通图，则

$$1+n\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}\leqslant H(G)\leqslant\frac{n(n-1)}{2},$$

左边等号成立当且仅当 $G=P_n$,右边等号成立当且仅当 $G=K_n$.

以下我们讨论 $1<D<n-1$ 的情形.

定理 1.3 在具有 n 个顶点且直径为 $D(1<D<n-1)$ 的图类中,当 D 为偶数时,$M(n,D)$ 是 Harary 指数达到最大的唯一图;当 D 为奇数时,极大图不唯一,其结构为:由完全图 K_{n-D+1} 添上两个顶点 u,v,使得 u 与 K_{n-D+1} 中 $i(\geqslant 1)$ 个顶点相邻,v 与 K_{n-D+1} 中其余 $n-D+1-i$ 个顶点相邻,并且分别以 u,v 为端点,分别添加长为 $\frac{D-3}{2}$ 的悬挂路. 显然,当 $i=1$ 或 $n-D$ 时,即为 $M(n,D)$.

证明 设 G 是定理所述图类中 Harary 指数达到最大的图. 因为 G 的直径为 D,所以一定存在顶点 v_0,v_D,使得 $d_G(v_0,v_D)=D$. 用 N_i 表示 G 中与 v_0 的距离为 $i(i=0,1,\cdots,D)$ 的顶点构成的集合,则 $V(G)$ 被分成了 $D+1$ 个类 $N_0,N_1,\cdots,N_D$. 显然,N_0 中只含顶点 v_0,N_i 中的顶点只可能与 N_{i-1} 和 N_{i+1} 中的顶点相邻,而不与其他类中的顶点相邻.

首先我们证明以下3个论断:

① $N_i(i=1,\cdots,D)$ 中任意两个顶点均相邻;

② $N_i(i=0,\cdots,D-1)$ 中任一顶点与 N_{i+1} 中任一顶点均相邻;

③ N_D 中只含1个顶点.

若 $N_i(i\in\{1,\cdots,D\})$ 中有两个顶点不相邻或 $N_i(i\in\{0,\cdots,D-1\})$ 中有一顶点与 N_{i+1} 中某一顶点不相邻,则添加一条边,使之相邻,记所得的图为 G'. 则 G' 的直径也为 D,但由引理 1.1 知,$H(G)<H(G')$,与 G 的 Harary 指数达到最大矛盾. 证得论断①、②.

若 N_D 中存在不同于 v_D 的顶点 u_D,则连接 u_D 与 N_{D-2} 中所有的点,所得的图记为 G''. 则 G'' 的直径也为 D,但由引理 1.1 知,$H(G)<H(G'')$,同样得出矛盾. 论断③成立.

其次,我们分两种情形证明:当 D 为偶数时,至多只有一个 i,使得 $n_i>1$;当 D 为奇数时,至多只有两个 i,使得 $n_i>1$,其中 n_i 表示 N_i 中所含顶点的个数.

情形 1:当 D 为偶数时,若 $i\neq\frac{D}{2}$,则 $n_i=1$.

若存在 $i<\frac{D}{2}$,使得 $n_i>1$,将满足该条件的最小的 i 表示为 k. 设 u 为 N_k 中的任一顶点,v_j 为 N_j 中唯一的顶点,$j=1,2,\cdots,k-1$. 删去 G 中 v_{k-1} 与 u 之间的边,并添加 u 与 N_{k+2} 中所有的边,所得的图记为 G'. 这样 G' 可视为将 G 中 N_k 内的顶点 u 移到 N_{k+1} 内,注意到 $H(G')$ 与 $H(G)$ 的差别是由顶点 u 的位置改变而造成的. 于是有

$$
\begin{aligned}
&H(G')-H(G)=\Big[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{2}+\\
&(n_k-1)+n_{k+1}+n_{k+2}+\frac{n_{k+3}}{2}+\frac{n_{k+4}}{3}+\cdots+\\
&\frac{n_{D-1}}{D-k-2}+\frac{1}{D-k-1}\Big]-\\
&\Big[\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\cdots+1+(n_k-1)+n_{k+1}+\\
&\frac{n_{k+2}}{2}+\frac{n_{k+3}}{3}+\cdots+\frac{n_{D-1}}{D-k-1}+\frac{1}{D-k}\Big]=\\
&\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)+\\
&\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\\
&\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)n_{k+2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)n_{k+3}+\cdots+\\
&\left(\frac{1}{D-k-2}-\frac{1}{D-k-1}\right)n_{D-1}+\\
&\left(\frac{1}{D-k-1}-\frac{1}{D-k}\right)=\\
&\left(1-\frac{1}{2}\right)(n_{k+2}-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)(n_{k+3}-1)+\cdots+\\
&\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)(n_{2k+1}-1)+\cdots+\\
&\left(\frac{1}{D-k-2}-\frac{1}{D-k-1}\right)n_{D-1}+\\
&\left(\frac{1}{D-k-1}-\frac{1}{D-k}\right)>0.
\end{aligned}
$$

若存在 $i>\frac{D}{2}$,使得 $n_i>1$,将满足该条件的最大的 i 表示为 k,并设 u 为 N_k 中的任一顶点,v_j 为 N_j 中唯一的顶点,$j=k+1,\cdots,D$. 删去 G 中 v_{k+1} 与 u 之间的边,并添加 u 与 N_{k-2} 中所有顶点之间的边,将所得的图记为 G'',同理可证

$$H(G'')-H(G)>0.$$

情形 2:当 D 为奇数时,若 $i\neq\left\lfloor\frac{D}{2}\right\rfloor$ 或 $\left\lceil\frac{D}{2}\right\rceil$,则 $n_i=1$.

类似于情形 1 的证明,可得当 $i\neq\left\lfloor\frac{D}{2}\right\rfloor$ 或 $\left\lceil\frac{D}{2}\right\rceil$ 时,$n_i=1$. 若 $n_{\lfloor\frac{D}{2}\rfloor}$ 与 $n_{\lceil\frac{D}{2}\rceil}$ 均大于1,记 $N_{\lfloor\frac{D}{2}\rfloor}$ 中的一个顶点为 u,$N_{\lceil\frac{D}{2}\rceil}$ 中的一个顶点为 v. 删去 $v_{\lfloor\frac{D}{2}\rfloor-1}$ 与

u之间的边,同时添上 $v_{\lceil \frac{D}{2}\rceil+1}$与 u之间的边(也可视为 $N_{\lfloor \frac{D}{2}\rfloor}$中的顶点 u移至 $N_{\lceil \frac{D}{2}\rceil}$中),将所得的图记为 G';或删去 $v_{\lceil \frac{D}{2}\rceil+1}$与 v之间的边,同时添加 $v_{\lfloor \frac{D}{2}\rfloor-1}$与 v之间的边(也可视为 $N_{\lceil \frac{D}{2}\rceil}$中的顶点 v移至$N_{\lfloor \frac{D}{2}\rfloor}$中),将所得的图记为 G''. 容易计算得 $H(G'')=H(G')=H(G)$. 由此可知,无论是将 $N_{\lfloor \frac{D}{2}\rfloor}$中的顶点移至 $N_{\lceil \frac{D}{2}\rceil}$中,还是将 $N_{\lceil \frac{D}{2}\rceil}$中的顶点移至 $N_{\lfloor \frac{D}{2}\rfloor}$中,Harary 指数都是不变的,而 $N_{\lfloor \frac{D}{2}\rfloor}$与 $N_{\lceil \frac{D}{2}\rceil}$中的顶点数之和为 $n-D+1$. 因此,此时极大图的结构形如:由完全图 K_{n-D+1}添上两个顶点 u,v,使得 u与 K_{n-D+1}中 $i(\geqslant 1)$个顶点相邻,v与 K_{n-D+1}中其余 $n-D+1-i$个顶点相邻,并且分别以 u,v为端点,分别添加长为$\dfrac{D-3}{2}$的悬挂路. 显然,当 $i=1$ 或$n-D$时,即为 $M(n,D)$.

综合上述,知结论成立. □

引理 1.4[11]　设 T是含 n个顶点的树,则

$$1+n\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}\leqslant H(T)\leqslant\frac{(n+2)(n-1)}{4},$$

右边等号成立当且仅当 $T=S_n$,左边等号成立当且仅当 $T=P_n$.

推论 1.5　设 G是直径为 D的 n阶图,则

$$H(G)\leqslant\begin{cases}1+(D+1)\sum\limits_{k=2}^{D}\dfrac{1}{k}+(n-D-1)\cdot\left(1+\sum\limits_{k=1}^{\frac{D}{2}}\dfrac{2}{k}\right)+\dbinom{n-D-1}{2}, & D\text{为偶数};\\ 1+(D+1)\sum\limits_{k=2}^{D}\dfrac{1}{k}+(n-D-1)\cdot\left(1+\sum\limits_{k=1}^{\frac{D-1}{2}}\dfrac{2}{k}+\dfrac{2}{D+1}\right)+\dbinom{n-D-1}{2}, & D\text{为奇数};\end{cases}$$

等号当 $G=M(n,D)$时成立.

证明　只需计算 $M(n,D)$的 Harary 指数. 记 $M(n,D)$的一条最长路为 P_{D+1},因此 $H(M(n,D))$由 3 部分相加而成,分别是:$H(P_{D+1})$,$V(M(n,D))/V(P_{D+1})$中的任一顶点与 $V(P_{D+1})$中所有顶点的距离的倒数和(记为 H_1)的 $n-D-1$ 倍,$V(M(n,D))/V(P_{D+1})$中任意两个顶点的距离的倒数和(记为 H_2). 而由引理 1.4 知,

$$H(P_{D+1})=1+(D+1)\sum_{k=2}^{D}\frac{1}{k},$$

另外,易知,

$$H_1=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\frac{D}{2}}\dfrac{2}{k}+1, & \text{当 } D\text{ 为偶数时};\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{\frac{D-1}{2}}\dfrac{2}{k}+\dfrac{2}{D+1}, & \text{当 } D\text{ 为奇数时};\end{cases}$$

$$H_2=\binom{n-D-1}{2}.$$

于是,

$$H(M(n,D))=H(P_{D+1})+(n-D-1)H_1+H_2=$$

$$\begin{cases}1+(D+1)\sum\limits_{k=2}^{D}\dfrac{1}{k}+(n-D-1)\cdot\left(1+\sum\limits_{k=1}^{\frac{D}{2}}\dfrac{2}{k}\right)+\dbinom{n-D-1}{2}, & D\text{为偶数};\\ 1+(D+1)\sum\limits_{k=2}^{D}\dfrac{1}{k}+(n-D-1)\cdot\left(1+\sum\limits_{k=1}^{\frac{D-1}{2}}\dfrac{2}{k}+\dfrac{2}{D+1}\right)+\dbinom{n-D-1}{2}, & D\text{为奇数}.\end{cases}$$

□

引理 1.6　$M(n,D)$的 Harary 指数关于直径 D严格单调递减.

证明　当 D为偶数时,

$$H(M(n,D+1))-H(M(n,D))=$$

$$1+(D+2)\sum_{k=2}^{D+1}\frac{1}{k}+(n-D-2)\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{\frac{D}{2}}\frac{2}{k}+\frac{2}{D+2}\right)+\binom{n-D-2}{2}-1-(D+1)\sum_{k=2}^{D}\frac{1}{k}-(n-D-1)\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{\frac{D}{2}}\frac{2}{k}\right)-\binom{n-D-1}{2}=$$

$$\sum_{k=2}^{D+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\frac{D}{2}}\frac{2}{k}+(n-D-2)\left(\frac{2}{D+2}-1\right)<0.$$

当 D为奇数时,

$$H(M(n,D+1))-H(M(n,D))=$$

$$1+(D+2)\sum_{k=2}^{D+1}\frac{1}{k}+(n-D-2)\cdot$$

$$\left(1+\sum_{k=1}^{\frac{D+1}{2}}\frac{2}{k}\right)+\binom{n-D-2}{2}-1-$$
$$(D+1)\sum_{k=2}^{D}\frac{1}{k}-(n-D-1)\cdot$$
$$\left(1+\sum_{k=1}^{\frac{D-1}{2}}\frac{2}{k}+\frac{2}{D+1}\right)-\binom{n-D-1}{2}=$$
$$\sum_{k=2}^{D+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\frac{D-1}{2}}\frac{2}{k}+$$
$$(n-D-2)\left(\frac{2}{D+1}-1\right)-\frac{2}{D+1}<0. \qquad \square$$

对 n 阶连通图,由引理 1.1 可知,K_n 为 Harary 指数取得最大的图.下面的定理刻画了 Harary 指数取得第二大和第三大的图.

定理 1.7 在 $n(\geqslant 4)$阶连通图中,

① K_n-e 为 Harary 指数取得第二大的图,这里 e 为 K_n 的任一边;

② $K_n-e_1-e_2$ 为 Harary 指数取得第三大的图,这里 e_1,e_2 为 K_n 的任意两条边.

证明 首先指出,K_n 是唯一的直径为 1 的 n 阶连通图.而由定理 1.3 与引理 1.6 知,对任意 n 阶连通图 $G\neq K_n$,有 $H(G)\leqslant H(M(n,2))$,等号当且仅当 $G=M(n,2)$时成立.于是证得结论①.

在直径为 2 的图类中,易知 Harary 指数次大的图是由 K_n 删去任意两条边后所得的图.记为 $K_n-e_1-e_2$.由定理 1.3 与引理 1.6 知,对任一 n 阶的直径大于 2 的连通图 G,有 $H(G)\leqslant H(M(n,3))$,等号当且仅当 $G=M(n,3)$时成立.而经过简单计算,可得:

$$H(K_n-e_1-e_2)=\binom{n}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{n(n-1)}{2}-1,$$
$$H(M(n,3))=\frac{(n-4)(n+2)}{2}+\frac{13}{3}.$$

考虑到 $n\geqslant 4$,于是有

$$H(K_n-e_1-e_2)>H(M(n,3)).$$

结论②成立. $\square$

参考文献(References)

[1] Ivanciuc O, Balaban T S, Balaban A T. Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices[J]. J Math Chem, 1993, 12: 309-318.

[2] Plavšić D, Nikolić S, Trinajstić N, et al. On the Harary index for the characterization of chemical graphs[J]. J Math Chem, 1993, 12: 235-250.

[3] Diudea M V. Indices of reciprocal properties or Harary indices[J]. J Chem Inf Comput Sci, 1997, 37: 292-299.

[4] Estrada E, Rodriguez L. Matrix algebraic manipulation of molecular graphs. 2. Harary- and MTI-like molecular descriptors[J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 1997, 35: 157-167.

[5] He C X, Chen P, Wu B F. The Harary index of a graph under perturbation[J]. Discrete Math Alg Appl, 2010, 2: 247-255.

[6] Lučić B, Miličević A, Nikolić S, et al. Harary index-twelve years later[J]. Croat Chem Acta, 2002, 75: 847-868.

[7] Zhou B, Cai X, Trinajstić N. On Harary index[J]. J Math Chem, 2008, 44: 611-618.

[8] Wiener H. Structural determination of paraffin boiling point[J]. J Amer Chem Soc, 1947, 69: 17-20.

[9] Xu K X, Das K C. On Harary index of graphs[J]. Discrete Appl Math, 2011, 159: 1 631-1 640.

[10] Das K C, Zhou B, Trinajstić N. Bounds on Harary index[J]. J Math Chem, 2009, 46: 1 369-1 376.

[11] Feng L H, Ilić A. Zagreb, Harary and hyper-Wiener indices of graphs with a given matching number[J]. Appl Math Lett, 2010, 23: 943-948.

[12] Ilić A, Yu G, Feng L H. The Harary index of trees[J]. Util Math, 2012, 87: 21-32.

[13] Xu K X, Trinajstić N. Hyper-Wiener and Harary indices of graphs with cut edges[J]. Util Math, 2011, 84:153-163.

[14] Xu K X. Trees with the seven smallest and eight greatest Harary indices[J]. Discrete Appl Math, 2012, 160: 321-331.

[15] Xu K X, Das K C. Extremal unicyclic and bicyclic graphs with respect to Harary index[J]. Bull Malays Math Sci Soc, 2013, 36:373-383.

[16] Yu G, Feng L H. On the maximal Harary index of a class of bicyclic graphs[J]. Util Math, 2010, 82: 285-292.

[17] Xu K X, Das K C, Hua H B, et al. Maximal Harary index of unicyclic graphs with given matching number[J]. Studia UBB Chemia, 2013, 58: 71-86.

[18] Wang H Z, Kang L Y. More on the Harary index of cacti[J]. J Appl Math Comput, 2013, 43: 369-386.