第43卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol. 43, No. 2
2013年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2013

文章编号:0253-2778(2013)02-0156-06

刻度指数族参数的经验 Bayes 双边检验问题——加权损失函数情形

张 倩,韦来生

(中国科学技术大学统计与金融系,安徽合肥 230026)

摘要:在加权损失函数下讨论了刻度指数族中参数的经验 Bayes(EB)双边检验问题.利用概率密度函数及其导数的核估计方法构造了 EB 检验函数并证明了其渐近最优性,获得了其收敛速度.最后,给出了一个符合定理条件的例子.

关键词:刻度指数族;EB 双边检验;加权乘积损失函数;渐近最优性;收敛速度

中图分类号:O212.1 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2013.02.011

AMS Subject Classification (2000): 62C12, 62F05

引用格式: Zhang Qian, Wei Laisheng. The two-sided empirical Bayes test of parameters for scale exponential family under weighed loss function[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2013, 43(2): 156-161.

张倩,韦来生. 刻度指数族参数的经验 Bayes 双边检验问题:加权损失函数情形[J]. 中国科学技术大学学报,2013,43(2):156-161.

The two-sided empirical Bayes test of parameters for scale exponential family under weighed loss function

ZHANG Qian, WEI Laisheng

(*Department of Statistics and Finance, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

Abstract: Under the weighed loss function, the two-sided empirical Bayes (EB) test of parameters for the scale exponential family was discussed. The EB test rules were constructed by kernel estimation method. The asymptotical optimality and convergence rates of the EB test rules were obtained. Finally, an example satisfying the conditions of the theorem was shown.

Key words: scale exponential family; two-sided empirical Bayes test; weighed product loss function; asymptotically optimality; convergence rate

0 引言

自 Robbins[1-2] 引入经验 Bayes(EB)方法以来,关于 EB 检验问题在文献中研究得已经很多了. Johns 等[3-4] 在线性损失下分别研究了离散型和连续型指数族参数的单边 EB 检验问题. Van

收稿日期:2012-11-02;**修回日期**:2013-01-05

基金项目:国家自然科学基金(11271346,11271347)资助.

作者简介:张倩,女,1987 年生,硕士. 研究方向:Bayes 统计. E-mail: zhq1018@mail.ustc.edu.cn

通讯作者:韦来生,教授. E-mail: lwei@ustc.edu.cn

Houwelingen[5], Liang[6]讨论了连续型单参数指数族单调的 EB 检验问题. 胡太忠等[7]考虑了线性损失下刻度指数族参数的单边 EB 检验问题. Liang[8]利用基于 Bessel 函数的核估计方法和检验的单调性对正指数分布研究了 EB 检验问题. 魏莉等[9]利用基于 Bessel 函数的核估计方法构造了刻度参数的 EB 检验函数，改进了 EB 检验的收敛速度. Singh 等[10]在乘积损失函数下研究了刻度指数族中参数的双边检验问题. 我们知道对刻度参数的 EB 检验采用加权的损失函数更为合理，当损失函数不同时获得的 Bayes 检验函数和 EB 检验函数会有本质的差别. Wei 等[11]在加权线性损失下讨论了刻度指数族单边的 EB 检验问题. 本文将在加权的乘积损失函数下讨论刻度指数族参数的双边 EB 检验问题. 本文采用加权的损失函数，这是与 Singh 等[10]的主要不同之处.

设给定刻度参数 θ 时随机变量 X 的条件密度为

$$f(x\mid\theta)=u(x)c(\theta)\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}=u(x)p(x\mid\theta)\tag{1}$$

式中，$u(x)>0$，$\forall\ x>0$；$p(x\mid\theta)=c(\theta)\exp\{-x/\theta\}$ 且 $c^{-1}(\theta)=\int_0^\infty u(x)\exp\{-x/\theta\}\mathrm{d}x$，$\Theta=\{\theta>0: c^{-1}(\theta)<\infty\}$为参数空间.

本文将讨论参数 θ 的下列的双边检验问题：

$$H_0:\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\leftrightarrow H_1:\theta<\theta_1\ \text{或}\ \theta>\theta_2\tag{2}$$

式中，θ_1 和 θ_2 是常数. 对检验问题(2)取下列加权乘积损失函数：

$$\left.\begin{aligned}&L_0(\theta,d_0)=\\&\begin{cases}0, & \text{当}\ \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,\\ a\left(\dfrac{\theta_1-\theta}{\theta}\right)\left(\dfrac{\theta-\theta_2}{\theta}\right), & \text{当}\ \theta<\theta_1\ \text{或}\ \theta>\theta_2;\end{cases}\\&L_1(\theta,d_1)=\\&\begin{cases}a\left(\dfrac{\theta-\theta_1}{\theta}\right)\left(\dfrac{\theta_2-\theta}{\theta}\right), & \text{当}\ \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,\\ 0, & \text{当}\ \theta<\theta_1\ \text{或}\ \theta>\theta_2.\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式中，a 为一个正常数. $D=\{d_0,d_1\}$是行动空间，d_0 表示接受 H_0，d_1 表示否定 H_0.

令 $\theta_0=(\theta_1+\theta_2)/2$ 和 $\mu=(\theta_2-\theta_1)/2$，则双边检验问题(2)变为

$$H_0^*:|\theta-\theta_0|\leqslant\mu\leftrightarrow H_1^*:|\theta-\theta_0|>\mu\tag{4}$$

且损失函数(3)变为下列等价形式：

$$\left.\begin{aligned}&L_0(\theta,d_0)=\\&\begin{cases}0, & \text{当}\ |\theta-\theta_0|\leqslant\mu,\\ a\left[\dfrac{(\theta-\theta_0)^2-\mu^2}{\theta^2}\right], & \text{当}\ |\theta-\theta_0|>\mu;\end{cases}\\&L_1(\theta,d_1)=\\&\begin{cases}a\left[\dfrac{\mu^2-(\theta-\theta_0)^2}{\theta^2}\right], & \text{当}\ |\theta-\theta_0|\leqslant\mu,\\ 0, & \text{当}\ |\theta-\theta_0|>\mu.\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

设随机化判决函数为

$$\delta(x)=P(\text{接受}\ H_0^*\mid X=x)\tag{6}$$

则在先验分布 $G(\theta)$下，$\delta(x)$的 Bayes 风险为

$$\begin{aligned}&R(\delta(x),G(\theta))=\int_\Theta\int_{\mathscr{X}}[L_0(\theta,d_0)\delta(x)+\\&L_1(\theta,d_1)(1-\delta(x))]f(x\mid\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta)=\\&a\int_{\mathscr{X}}\int_\Theta\left[\frac{(\theta-\theta_0)^2-\mu^2}{\theta^2}\right]\delta(x)f(x\mid\theta)\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}x+C_G=\\&a\int_{\mathscr{X}}\alpha(x)\delta(x)\mathrm{d}x+C_G\end{aligned}\tag{7}$$

式中，$C_G=\int_\Theta L_1(\theta,d_1)\mathrm{d}G(\theta)$，而

$$\begin{aligned}\alpha(x)&=\int_\Theta\left[\frac{(\theta-\theta_0)^2-\mu^2}{\theta^2}\right]f(x\mid\theta)\mathrm{d}G(\theta)=\\&f(x)+2\theta_0u(x)p^{(1)}(x)+(\theta_0^2-\mu^2)u(x)p^{(2)}(x)\end{aligned}\tag{8}$$

其中

$$f(x)=\int_\Theta f(x\mid\theta)\mathrm{d}G(\theta)=u(x)p(x)\tag{9}$$

$$p(x)=\int_\Theta p(x\mid\theta)\mathrm{d}G(\theta)=\int_\Theta c(\theta)\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}\mathrm{d}G(\theta)\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}p^{(i)}(x)=\int_\Theta(-1)^i\theta^{-i}c(\theta)\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}\mathrm{d}G(\theta),\\ i=1,2\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

此处 $f(x)$是 r. v. X 的边缘密度，$p^{(1)}(x)$和 $p^{(2)}(x)$分别为 $p(x)$的一阶和二阶导数.

由式(7)易见 Bayes 判决函数为

$$\delta_G(x)=\begin{cases}1, & \text{若}\ \alpha(x)\leqslant0,\\0, & \text{若}\ \alpha(x)>0.\end{cases}\tag{12}$$

其 Bayes 风险为

$$\begin{aligned}R(G)=\inf_\delta R(\delta,G)=R(\delta_G(x),G)=\\ a\int_{\mathscr{X}}\alpha(x)\delta_G(x)\mathrm{d}x+C_G\end{aligned}\tag{13}$$

上述 Bayes 风险当先验分布 $G(\theta)$已知且 $\delta(x)=\delta_G(x)$时是可以达到的. 但此处 $G(\theta)$未知，

$\delta_G(x)$对我们也是未知的，因而无使用价值，因此需要引入非参数经验 Bayes(NPEB)方法.

注 0.1 注意到 Singh 等[10]在刻度指数族参数的 NPEB 检验问题中使用的损失函数是 θ 与 θ_1,θ_2 之间线性距离的乘积，而此处我们采用的损失函数是 θ 与 θ_1,θ_2 之间刻度距离的乘积，是一种“加权”损失函数，如式(3)所示. 当所讨论的参数为刻度参数时选用加权损失函数更为合理，因为它在刻度变换下具有不变性，不随度量单位的变化而变化. 这是本小节与 Singh 等[10]主要的不同之处.

1 EB 检验函数的构造

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为历史样本，X 为当前样本，它们相互独立具有共同的边缘分布(9). 为构造 θ 的 NPEB 检验函数，我们首先利用历史样本给出边缘密度函数 $f(x)$和 $p(x)$导函数的核估计，然后构造 θ 的 NPEB 检验函数.

令 $C_{i,\gamma}(i=1,\cdots,s)$表示$(0,\infty)$上的一切实值非负函数构成的类，其 i 阶导数存在、连续且$|f^{(i)}(x)|\leqslant\gamma$. 本文对边缘密度函数 $f(x)$和 $p(x)$作如下假定：

(Ⅰ) $f(x)\in C_{s,\gamma}$，$p(x)\in C_{s,\gamma}$，这里 $s\geqslant 3$ 为自然数.

对核函数作如下假定：

(Ⅱ) 令 $s\geqslant 3$ 为任意确定的自然数，$K_i(x)$，$i=0,1,2$ 为 Borel 可测的有界函数，在(0,1)区间之外为 0，满足条件

$$\frac{1}{t!}\int_0^1 u^t K_i(u)\mathrm{d}u=\begin{cases}1, & t=i,\\ 0, & t\neq i, t=0,1,\cdots,s-1.\end{cases}$$

K_i 是可微分的，且$\sum\limits_x |K_i'(x)|<\infty$.

定义 $f(x)$和 $p^{(i)}(x)$，$i=1,2$ 的核估计如下：

$$f_n(x)=\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^n K_0\left(\frac{X_j-x}{h_n}\right) \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} p_n^{(1)}(x)&=\frac{1}{nh_n^{\,2}}\sum_{j=1}^n K_1\left(\frac{X_j-x}{h_n}\right)\Big/u(X_j)\\ p_n^{(2)}(x)&=\frac{1}{nh_n^{\,3}}\sum_{j=1}^n K_2\left(\frac{X_j-x}{h_n}\right)\Big/u(X_j)\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中 $0\leqslant h_n\to 0$，当 $n\to\infty$时.

令 $\alpha(x)$的估计量为

$$\alpha_n(x)=f_n(x)+2\theta_0 u(x)p_n^{(1)}(x)+(\theta_0^2-\mu^2)u(x)p_n^{(2)}(x) \tag{16}$$

则定义 EB 检验函数为

$$\delta_n(x)=\begin{cases}1, & \alpha_n(x)\leqslant 0,\\ 0, & \alpha_n(x)>0.\end{cases} \tag{17}$$

令 E_n 表示对 r. v. $X_1,\cdots,X_n$ 联合分布求均值，则 $\delta_n(x)$的全面 Bayes 风险为

$$R_n=R_n(\delta_n,G)=b\int_{\mathscr{X}}\alpha(x)E_n[\delta_n(x)]\mathrm{d}x+C_G \tag{18}$$

按定义，若$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=R(G)$，则称$\{\delta_n(x)\}$为渐近最优(a. o.)的 EB 检验函数. 若 $R_n-R(G)=O(n^{-q})$，$q>0$，则称 EB 检验函数 $\delta_n(x)$的收敛速度的阶为 $O(n^{-q})$.

2 EB 检验函数的大样本性质

引理 2.1 令 $R(G)$，R_n 分别由式(13)和(18)给出，则

$$0\leqslant R_n-R(G)\leqslant a\int_{\mathscr{X}}|\alpha(x)|\cdot P(|\alpha_n(x)-\alpha(x)|\geqslant|\alpha(x)|)\mathrm{d}x.$$

证明 见 Johns 等[4]引理 1.

引理 2.2 设 $f(x)$和 $f_n(x)$分别由式(9)和(14)给出

①若 $f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，则当 $h_n\to 0$，$nh_n\to+\infty(n\to\infty)$时，对任意给定的 x 有

$$\lim_{n\to\infty}E_n|f_n(x)-f(x)|=0.$$

②若 $f(x)\in C_{s,\gamma}$，则对 $0<\lambda\leqslant 2$，当取 $h_n=n^{-\frac{1}{2s+1}}$时，对任意给定的 x 有

$$E_n|f_n(x)-f(x)|^\lambda\leqslant c\cdot n^{-\frac{\lambda s}{2s+1}}.$$

证明 见 Wei 等[11]引理 3.

引理 2.3 若 $p^{(i)}(x)$，$i=1,2$ 由式(11)给出，$p_n^{(i)}(x)$，$i=1,2$ 由式(15)定义，其中 $h_n=n^{-\frac{1}{2s+1}}$，设 $u(t)$为 t 的非降函数.

①若 $p^{(i)}(x)$，$i=1,2$ 在$(0,\infty)$上连续，则当 $h_n\to 0$，$nh_n^5\to\infty$ $(n\to+\infty)$时，对任意给定的 x 有

$$\lim_{n\to\infty}E_n|p_n^{(i)}(x)-p^{(i)}(x)|=0,\ i=1,2.$$

②若 $E[c(\theta)]<\infty$，$E[\theta^{-s}c(\theta)]<\infty$，且 $u(x)$为 x 的非降函数，则对 $0<\lambda\leqslant 2$ 有

$$E|p_n^{(i)}(x)-p^{(i)}(x)|^\lambda\leqslant\left[c_{1i}\left(\frac{p(x)}{u(x)}\right)^{\frac{\lambda}{2}}+c_{2i}|p^{(s)}(x)|^\lambda\right]n^{-\frac{\lambda(s-i)}{2s+1}},\quad i=1,2.$$

其中 $s\geqslant 3$ 为一给定自然数.

证明 ①当 $i=1$ 时结论的证明由文献[11]引理 4(ⅰ)给出；当 $i=2$ 时结论的证明与 $i=1$ 时的证明完全类似.

②由王立春等[12]给出.

引理 2.4　设 $\alpha(x)$ 由式(8)给出,若 $E(\theta^{-2})<\infty$,则

$$\int_{\mathscr{X}}|\alpha(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

证明　由式(8)可知

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{X}}|\alpha(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant{}& c_0\int_{\mathscr{X}}f(x)\mathrm{d}x+\\ & c_1\int_{\mathscr{X}}u(x)\,|\,p^{(1)}(x)\,|\,\mathrm{d}x+\\ & c_2\int_{\mathscr{X}}u(x)\,|\,p^{(2)}(x)\,|\,\mathrm{d}x\leqslant\\ & c_0+c_1\int_{\Theta}\theta^{-1}\int_{\mathscr{X}}f(x\mid\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta)+\\ & c_2\int_{\Theta}\theta^{-2}\int_{\mathscr{X}}f(x\mid\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta)\leqslant\\ & c_0+c_1E(\theta^{-1})+c_2E(\theta^{-2})<\infty.\end{aligned}$$

引理得证.

引理 2.5　设 $s\geqslant1$,$E[\theta^{s}c(\theta)]<\infty$,$E[c(\theta)]<\infty$,则对任意 t,$1\leqslant t\leqslant s$ 有

$$E[\theta^{t}c(\theta)]<\infty.$$

证明　见 Wei 等[11]引理 7.

引理 2.6　设 $\alpha(x)$,$f(x)$ 和 $p(x)$ 分别由式(8),(9)和(10)给出.设下列条件成立:

(Ⅰ) $p(x)\in C_{s,\gamma}$,$u(x)$ 为 x 的非降函数,且存在正的常数 M 和 r,使得对充分大的 x 有 $u(x)\leqslant Mx^{r}$;

(Ⅱ) $E(\theta^{-s})<\infty$,$E[c(\theta)]<\infty$,$E[\theta^{\tau+r+1}c(\theta)]<\infty$.

此处 $s\geqslant3$ 为自然数,$\tau=\dfrac{(1+\xi)\lambda}{1-\lambda}$,$0<\lambda<1$,$\xi>0$ 为任意小的正数,则在上述条件下有如下结论:

① $\int_0^{\infty}|\alpha(x)|^{1-\lambda}(f(x))^{\frac{\lambda}{2}}\mathrm{d}x<\infty$;

② $\int_0^{\infty}|\alpha(x)|^{1-\lambda}\,|\,u(x)p^{(s)}(x)\,|^{\lambda}\mathrm{d}x<\infty$;

③ $\int_0^{\infty}|\alpha(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x<\infty$.

证明　①由 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}J_1={}&\int_0^{\infty}|\alpha(x)|^{1-\lambda}(f(x))^{\frac{\lambda}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\\ &\left(\int_0^{\infty}|\alpha(x)|\,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}\left(\int_0^{\infty}(f(x))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\lambda}=\\ &J_{11}^{1-\lambda}J_{12}^{\lambda}.\end{aligned}$$

由引理 2.4 可知 $J_{11}=\int_0^{\infty}|\alpha(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$,由文献[11]引理 5(ⅰ)可知,当 $E[\theta^{\tau+r+1}c(\theta)]<\infty$ 时,有 $J_{12}=\int_0^{\infty}(f(x))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x<\infty$,因此 $J_1\leqslant J_{11}^{1-\lambda}J_{12}^{\lambda}<\infty$,结论①得证.

②由 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}J_2={}&\int_0^{\infty}|\alpha(x)|^{1-\lambda}\,|\,u(x)p^{(s)}(x)\,|^{\lambda}\mathrm{d}x\leqslant\\ &\left(\int_0^{\infty}|\alpha(x)|\,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}\left(\int_0^{\infty}u(x)\,|\,p^{(s)}(x)\,|\,\mathrm{d}x\right)^{\lambda}=\\ &J_{21}^{1-\lambda}J_{22}^{\lambda}\end{aligned}\tag{19}$$

由引理 2.4 可知 $J_{21}=J_{11}=\int_0^{\infty}|\alpha(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$,又

$$\begin{aligned}J_{22}={}&\int_0^{\infty}u(x)\,|\,p^{(s)}(x)\,|\,\mathrm{d}x=\\ &\int_{\Theta}\theta^{-s}\int_0^{\infty}f(x\mid\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta)=E(\theta^{-s})\end{aligned}\tag{20}$$

将式(20)代入式(19)可知,当 $E(\theta^{-s})<\infty$ 时,有 $J_2\leqslant J_{21}^{1-\lambda}J_{22}^{\lambda}<\infty$,结论②得证.

③由 $\alpha(x)$ 的定义式(8)可知

$$\begin{aligned}J_3={}&\int_0^{\infty}|\alpha(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x\leqslant\\ &c_1\int_0^{\infty}(f(x))^{1-\lambda}\mathrm{d}x+\\ &c_2\int_0^{\infty}(u(x)\,|\,p^{(1)}(x)\,|)^{1-\lambda}\mathrm{d}x+\\ &c_3\int_0^{\infty}(u(x)\,|\,p^{(2)}(x)\,|)^{1-\lambda}\mathrm{d}x=\\ &c_1J_{31}+c_2J_{32}+c_3J_{33}.\end{aligned}$$

由文献[11]引理 5(ⅰ)和(ⅱ)可知,当 $E[\theta^{\tau+r+1}c(\theta)]<\infty$ 时,有 $J_{31}=\int_0^{\infty}(f(x))^{1-\lambda}\mathrm{d}x<\infty$;当 $E[\theta^{\tau+r}c(\theta)]<\infty$ 时,有

$$J_{32}=\int_0^{\infty}(u(x)\,|\,p^{(1)}(x)\,|)^{1-\lambda}\mathrm{d}x<\infty.$$

类似于 $J_{32}<\infty$ 的证明可知,当 $E[\theta^{\tau+r-1}c(\theta)]<\infty$ 时,有

$$J_{33}=\int_0^{\infty}(u(x)\,|\,p^{(2)}(x)\,|)^{1-\lambda}\mathrm{d}x<\infty.$$

由引理 2.5 可知,当 $E[c(\theta)]<\infty$,$E[\theta^{\tau+r+1}c(\theta)]<\infty$ 时,有 $E[\theta^{\tau+r}c(\theta)]<\infty$,$E[\theta^{\tau+r-1}c(\theta)]<\infty$.因此在引理的条件下有 $J_3\leqslant c_1J_{31}+c_2J_{32}+c_3J_{33}<\infty$,结论③得证,引理证毕.

关于 EB 检验的大样本性质有下列主要结果:

定理 2.1　设 $R(G)$,R_n 分别由式(13)和(18)给出,若 $E(\theta^{-2})<\infty$ 且 $f(x)$ 和 $p^{(i)}(x)$,$i=1,2$ 为 x 的连续函数时,则当 $h_n\to0$,$nh_n^{5}\to\infty(n\to\infty)$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}(R_n-R(G))=0.$$

证明 由引理 2.1 可知

$$0\leqslant R_n-R(G)\leqslant a\int_0^\infty |\alpha(x)|\cdot P(|\alpha_n(x)-\alpha(x)|\geqslant |\alpha(x)|)\mathrm{d}x,$$

令 $B_n(x)=|\alpha(x)|\cdot P(|\alpha_n(x)-\alpha(x)|\geqslant|\alpha(x)|)$，易见 $B_n(x)\leqslant|\alpha(x)|$；再由引理 2.4 知 $\int_0^\infty|\alpha(x)|\mathrm{d}x<\infty$，故由控制收敛定理可知

$$\lim_{n\to\infty}(R_n-R(G))\leqslant a\int_0^\infty \lim_{n\to\infty}B_n(x)\mathrm{d}x \tag{21}$$

由 Markov 不等式，引理 2.2①，引理 2.3①和 C_r-不等式可知，对任意给定的 $x>0$ 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}B_n(x)\leqslant \lim_{n\to\infty}E_n|\alpha_n(x)-\alpha(x)|\leqslant\\ \lim_{n\to\infty}c_0E_n|f_n(x)-f(x)|+\\ c_1|u(x)|\lim_{n\to\infty}E_n|p_n^{(1)}(x)-p^{(1)}(x)|+\\ c_2|u(x)|\lim_{n\to\infty}E_n|p_n^{(2)}(x)-p^{(2)}(x)|=0.\end{aligned}$$

因此将上式代入到式(21)得

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}(R_n-R(G))\leqslant a\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}B_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

定理证毕.

定理 2.2 设 $R(G)$，R_n 分别由式(13)和(18)给出，假定引理 2.6 条件(Ⅰ)、(Ⅱ)成立，则对 $s\geqslant3$，$0<\lambda<1$ 有

$$R_n-R(G)=O(n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+1}}).$$

证明 由引理 2.1 及 Markov 不等式可知

$$\begin{aligned}R_n-R(G)\leqslant\\ a\int_0^\infty|\alpha(x)|\cdot P(|\alpha_n(x)-\alpha(x)|\geqslant|\alpha(x)|)\mathrm{d}x\leqslant\\ a\int_0^\infty|\alpha(x)|^{1-\lambda}E_n|\alpha_n(x)-\alpha(x)|^\lambda\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{22}$$

由 Markov 不等式，引理 2.2②，引理 2.3②和 C_r-不等式可知

$$\begin{aligned}E_n|\alpha_n(x)-\alpha(x)|^\lambda\leqslant c_0E_n|f_n(x)-f(x)|^\lambda+\\ c_1u^\lambda(x)E_n|p_n^{(1)}(x)-p^{(1)}(x)|^\lambda+\\ c_2u^\lambda(x)E_n|p_n^{(2)}(x)-p^{(2)}(x)|^\lambda\leqslant\\ c_0\cdot n^{-\frac{\lambda s}{2s+1}}+\\ n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+1}}[c_1|u(x)p^{(s)}(x)|^\lambda+c_2|f(x)|^{\frac{\lambda}{2}}]\end{aligned} \tag{23}$$

将式(23)代入式(22)，由引理 2.6 可得

$$\begin{aligned}0\leqslant R_n-R(G)\leqslant\\ n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+1}}[c_0\int_0^\infty|\alpha(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x+\\ c_1\int_0^\infty|\alpha(x)|^{1-\lambda}|u(x)p^{(s)}(x)|^\lambda\mathrm{d}x+\\ c_2\int_0^\infty|\alpha(x)|^{1-\lambda}|f(x)|^{\frac{\lambda}{2}}\mathrm{d}x]\leqslant\\ c\cdot n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+1}}.\end{aligned}$$

此即 $R_n-R(G)=O(n^{-\frac{\lambda(s-2)}{2s+1}})$，定理 2.2 得证.

3 一个例子

设随机变量 X 服从指数分布，其密度函数为

$$f(x\mid\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}I_{[x>0]} \tag{24}$$

将 $f(x|\theta)$ 与式(1)对照，可见 $u(x)\equiv1$，$c(\theta)=1/\theta$，其中参数空间 $\Theta=\{\theta:\theta>0\}$，样本空间 $\mathscr{X}=\{x:x>0\}$.

假设 θ 的先验分布为 $G(\theta)$，密度函数为

$$g(\theta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{-(\alpha+1)}\exp\left\{-\frac{\beta}{\theta}\right\}I_{[\theta>0]} \tag{25}$$

其中 $\alpha>\max\{\tau,1\}$，τ 由定理 2.2 给出. 易求 r. v. X 的边缘密度为

$$f(x)=p(x)=\int_0^\infty f(x\mid\theta)g(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{c_0}{(\beta+x)^{\alpha+1}} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}p^{(1)}(x)=f^{(1)}(x)=\frac{c_1}{(\beta+x)^{\alpha+2}},\\ p^{(2)}(x)=f^{(2)}(x)=\frac{c_2}{(\beta+x)^{\alpha+3}}.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

检验问题为：

$$H_0:\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\leftrightarrow H_1:\theta<\theta_1\text{ 或 }\theta>\theta_2,$$

其 Bayes 检验函数 $\delta_G(x)$ 和 Bayes 风险 $R(G)$ 如节 0 所示. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ i. i. d 为历史样本，利用历史样本构造的 EB 检验函数 $\delta_n(x)$ 和全面 Bayes 风险 R_n 由节 1 给出. 下面验证定理 2.1 和定理 2.2 的条件皆满足：

①由于 $E(\theta^{-2})=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta^2}<\infty$，显然式(26)和(27)中的 $f(x)$ 和 $p^{(i)}(x)$ 关于 x 连续. 当取 $h_n=n^{-\nu}$，$0<\nu<1/5$ 时，有 $h_n\to0$，$nh_n{}^5\to\infty(n\to\infty)$，故定理 2.1 的条件皆满足，其结论成立.

②显然 $p(x)\in C_{s,\gamma}$，由于 $u(x)\equiv1$，故定理 2.2 中关于 $u(x)$ 的条件“$u(x)\leqslant Mx^r$”当取 $r=0$ 时显然成立. 又

$$E(\theta^{-s})=\frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta^s}<\infty,$$

$$E[c(\theta)]=E(\theta^{-1})<\infty;$$

$$E[\theta^{\tau+1}c(\theta)] = E(\theta^{\tau}) = \frac{\beta^{\tau}\Gamma(\alpha-\tau)}{\Gamma(\alpha)} < \infty.$$

此处 $\tau=\frac{(1+\xi)\lambda}{1-\lambda}$, $0<\xi<1$, $0<\lambda<1$. 因此定理 2.2 的条件皆满足,其结论成立.

此例表明适合定理 2.1 和定理 2.2 条件的先验分布是存在的.

4　一点注释

关于双边检验问题:

$$H_0':\theta=\theta_0 \leftrightarrow H_1':\theta\neq\theta_0,$$

θ_0 为给定的常数. 很难定义合适的损失函数,这个问题可以利用下列双边检验获得近似解决:

$$H_0^*:\theta_0-\varepsilon<\theta<\theta_0+\varepsilon \leftrightarrow$$
$$H_1^*:\theta<\theta_0-\varepsilon \text{ 或 } \theta>\theta_0+\varepsilon,$$

此处 $\varepsilon>0$ 为任意小的正数.

参考文献(References)

[1] Robbins H. An empirical Bayes approach to statistics [C]// Proc Third Berkeley Symp Math Statist Prob. Oakland, CA: University of California, 1955:157-163.

[2] Robbins H. The empirical Bayes approach to statistical decision problems [J]. Ann Math Statist, 1964, 35: 1-20.

[3] Johns M V, Jr, Van Ryzin J. Convergence rates in empirical Bayes two-action problems I: Discrete case [J]. Ann Math Statist, 1971, 42: 1 521-1 539.

[4] Johns M V, Jr, Van Ryzin J. Convergence rates in empirical Bayes two-action problems II: Continuous case [J]. Ann Math Statist, 1972, 43: 934-947.

[5] Van Houwelingen J C. Monotone empirical Bayes test for the continuous one-parameter exponential family [J]. Ann Statist, 1976, 4: 981-989.

[6] Liang T C. On the convergence rates of empirical Bayes rules for two-action problems: Discrete case[J]. Ann Statist, 1988, 16: 1 635-1 642.

[7] 胡太忠, 潘国华. 刻度参数指数族经验 Bayes 的检验收敛速度[J]. 数理统计与应用概率, 1991, 7: 86-96.

[8] Liang T C. An improved empirical Bayes test for positive exponential families [J]. Statistica Neerlandica, 2002, 56: 346-361.

[9] Wei Li, Kong Shengchun, Wei Laisheng. The convergence rates for empirical Bayes test of parameter in scale exponential family [J]. Journal of the Graduate School of the Chinese Academy Sciences, 2007, 24(1): 9-17.
魏莉,孔胜春,韦来生. 刻度指数族参数的经验 Bayes 检验的收敛速度[J]. 中国科学院研究生院学报, 2007, 24(1): 9-17.

[10] Singh R S, Wei L S. Nonparametric empirical Bayes procedures asymptotic optimality and rates of convergence for two-tail tests in exponential family [J]. Nonparametric Statist, 2000, 12: 475-501.

[11] Wei L, Wei L S. Empirical Bayes test for scale exponential family [J]. Frontiers of Mathematics in China, 2006, 1(2): 303-315.

[12] Wang Lichun, Wei Laisheng. The convergence rates of empirical Bayes estimation of the parameter for scale-exponential family [J]. Chinese Annals of Mathematics, 2002, 23A(5): 555-564.
王立春, 韦来生. 刻度指数族参数的经验 Bayes 估计的收敛速度[J]. 数学年刊, 2002, 23A(5): 555-564.