

圆弧的低次多项式曲线等弧长逼近

王旭辉^{1,2}, 邓建松²

(1. 合肥工业大学数学学院, 安徽合肥 230009; 2. 中国科学技术大学数学科学学院, 安徽合肥 230026)

摘要:主要研究了三次和四次多项式曲线等弧长逼近圆弧的求解算法. 对于三次 Bézier 曲线, 讨论了曲线弧长与相邻控制顶点之间距离的关系, 从而得到稳定的数值方法求解曲线控制顶点. 对于四次 PH 曲线, 给出了等弧长逼近圆弧的精确解. 实例表明, 在保证弧长相等的条件下, 低次多项式曲线能够较好地逼近圆弧.

关键词:圆弧; 多项式逼近; Bézier 曲线; PH 曲线; 等弧长

中图分类号: TP391; O241.5 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2011.05.003

AMS Subject Classification (2000): Primary 41A10; Secondary 68U07

Arc-length preserving approximation of circular arcs by polynomial curves with lower degrees

WANG Xuhui^{1,2}, DENG Jiansong²

(1. School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. School of Mathematics Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: Arc-length-preserving approximation of circular arcs by cubic Bézier and quartic PH curves was discussed. For cubic Bézier curves, the relation between the length of the curve and the distance of adjacent control points was explored. Hence, a robust numerical method was derived to determine the control points of the curve. Accurate solutions were also provided for quartic PH curves to approximate circular arcs. The results show that polynomial curves with lower degrees can approximate circular arcs with high precision with the requirement of preserving arc-length.

Key words: circular arc; polynomial curve approximation; Bézier curve; PH curve; arc-length preserving

0 引言

圆弧曲线是几何造型中一种相当基本的曲线类型, 而基于多项式的 CAD/CAM 造型系统并不能精确表示圆弧. 由于目前通用的 CAD/CAM 系统都包含了 Bézier 曲线, 所以为了在不同 CAD/CAM 系

统之间传递数据, 更好地应用圆弧, 人们常使用 Bézier 曲线逼近圆弧曲线. 早期的工作主要是在某种误差极小意义下, 采用低次多项式逼近圆弧曲线, 有关这部分工作的详情, 请参考文献[1-8]. 另外, Jaklie 等^[9]提出了圆弧的任意次数的参数多项式逼近方法, 并对该方法做了误差分析. Peters,

收稿日期: 2010-02-05; 修回日期: 2010-04-30

基金项目: 新世纪优秀人才支持计划 (NCET-08-0514), 高等学校学科创新引智计划 (b07033), 中央高校基本科研业务费专项资金 (2010HGXJ0202) 资助.

作者简介: 王旭辉, 男, 1980 年生, 博士生. 研究方向: 计算机辅助几何设计. E-mail: wangxh05@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 邓建松, 博士/教授. E-mail: dengjs@ustc.edu.cn

Dokken, Goldapp 和 Ahn 等^[10-13]给出了一些构造性方法逼近圆弧,所构造出来的多项式曲线满足一些几何直观上的要求,如多项式曲线与圆弧有相同的端点、在端点处有相同的切向量、相同的弧长中点等.但是,上述圆弧多项式逼近方法都存在一个问题,就是多项式曲线与圆弧曲线的弧长可能不相等.特别地,以用三次 Bézier 曲线逼近四分之一圆周为例,引用文献[7]中的数据,如果要求曲线中点与圆弧中点吻合,那么最佳逼近多项式为

$$x(t) = B_0^3(t) + B_1^3(t) + \frac{\sigma}{3} B_2^3(t),$$

$$y(t) = \frac{\sigma}{3} B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t),$$

其中, $\sigma = 4(\sqrt{2}-1)$, $B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-t)^{n-i}t^i$ 为 n 次 Bernstein 基函数.此时,如果采用文献[7]中同样的误差度量,即以 $\epsilon(t) = |x^2(t) + y^2(t) - 1|$ 作为误差度量,上述曲线的误差约为 $\epsilon_0 = 5.45 \times 10^{-4}$, 而曲线弧长的误差约为 2.20×10^{-4} . 文献[14]中的结果以及本文的结果说明,在保持结果曲线与圆弧具有相同长度的意义下,半径长度的误差改变非常小.实际上,根据后文结论,如果不要要求逼近曲线和圆弧具有相同的中点,而是要求两者具有相同的弧长,那么逼近误差为 5.38×10^{-4} , 与前述误差 ϵ_0 大致相当而后者稍优.特别地,两种条件下最佳逼近结果在曲率方面的表现也是后者稍优.实际上,两者的曲率相对于 1 的偏差最大值都出现在端点,分别为 0.021 45 和 0.018 53. 因此在圆弧逼近中,我们完全可以在弧长不变的意义下讨论各种逼近.

文献[14]是用五次 PH 曲线等弧长逼近圆弧,之所以采用五次 PH 曲线,是因为这种类型曲线的弧长可以有显式表达,而且结果具有一定的对称性.但是在有些应用中,五次曲线的次数可能有些高,因此本文对低次情形进行了深入讨论,给出了一种用三次一般多项式曲线和四次 PH 曲线逼近圆弧的算法,该方法也能够确保多项式曲线和圆弧有相同的起点、终点,在这两点处有相同的切向,且弧长相等.特别地,对于四次 PH 曲线,如果曲线具有对称性,那个解具有奇异点.如果不要求解具有对称性,那么可以给出满足弧长相等的四次 PH 曲线的显式表达.

1 三次 Bézier 曲线等弧长逼近圆弧

对于一般的圆,我们可以通过坐标平移、旋转以

及均匀放缩将其变为一个圆心在坐标原点的单位圆.故在本文中,我们只考虑圆心在原点的单位圆上的圆弧曲线,而且假设圆弧的一个端点坐标为 $(1,0)$.

我们采用三次 Bézier 曲线来逼近圆弧.令其控制顶点为 P_0, P_1, P_2, P_3 , 则对应的 Bézier 曲线为

$$P(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t), t \in [0, 1].$$

为了更好地逼近圆弧,我们给出下面基本要求:

① Bézier 曲线与圆弧有相同的起点和终点,即 $P_0 = (1, 0), P_3 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$;

② Bézier 曲线与圆弧在起点与终点处有相同的切向量,即 $\overrightarrow{P_1 P_0} \parallel (0, 1), \overrightarrow{P_3 P_2} \parallel (\sin(\alpha), -\cos(\alpha))$.

同时为了使所构造的三次 Bézier 具有轴对称性,其控制顶点应为

$$P_0 = (1, 0), P_1 = (1, h),$$

$$P_2 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + h(\sin(\alpha), -\cos(\alpha)),$$

$$P_3 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)),$$

其中, $h = |\overrightarrow{P_0 P_1}| = |\overrightarrow{P_3 P_2}|$ 是可以调节的变量.通过调节 h 的值,可以改变 Bézier 曲线的形状和弧长,如图 1 所示.

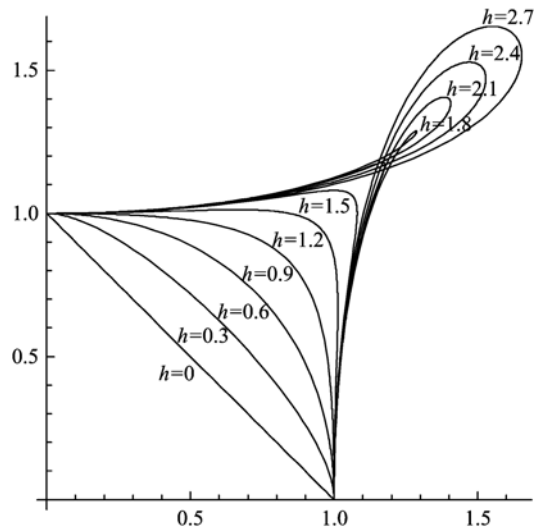


图 1 当 $\alpha = \pi/2$ 时, Bézier 曲线随 h 变化示意图

Fig. 1 $\alpha = \pi/2$, the shape of Bézier curve changes as h changes

Bézier 曲线的弧长为

$$S = \int_0^1 |P'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \quad (1)$$

式中,

$$P'(t) = (x'(t), y'(t)) = 3 \sum_{i=0}^2 (P_{i+1} - P_i) B_i^2(t).$$

弧长 S 是关于 h 的函数, 记其为 $S(h)$. 下面我们来说明, 当 $h \geq 0$ 时, $S(h)$ 是关于 h 的递增函数. 此处, 一个显然的直接想法是证明任意取定 $t_0 \in [0, 1]$ 时, $[x'(t_0, h)]^2 + [y'(t_0, h)]^2$ 是关于 h 单调递增的, 但是这个想法是不正确的. 反例见图 2 所示. 图形说明, 对于 $\alpha = \pi/2$, 如果取 $t_0 = 1/3$, 那么 $[x'(t_0, h)]^2 + [y'(t_0, h)]^2$ 关于 h 并不是单调递增的. 因此我们需要直接从积分表示证明 $S(h)$ 的单调性.

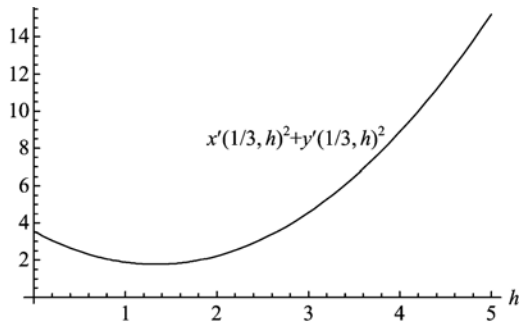


图 2 当 $\alpha = \pi/2$, $[x'(1/3, h)]^2 + [y'(1/3, h)]^2$ 的图形
Fig. 2 $\alpha = \pi/2$, the shape of $[x'(1/3, h)]^2 + [y'(1/3, h)]^2$

定理 1.1 设弧角 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 则 $S(h)$ 关于 $h \geq 0$ 为单调增函数.

证明 首先讨论 $\alpha = \pi$ 的情况. 此时,

$$S(h) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{12^2 t^2 (1-t)^2 + 9h^2 (1-2t)^2} dt.$$

显然, 对于任意取定的 $t \in [0, 1/2]$, 当 $h \geq 0$ 时, $\sqrt{12^2 t^2 (1-t)^2 + h^2 (3-6t)^2}$ 是关于 h 的递增函数. 因此当 $\alpha = \pi$, $S(h)$ 关于 $h \geq 0$ 单调递增.

当 $\alpha \neq \pi$ 时, 下面将借助于导函数论证单调性. 注意到被积函数当 $x'(t) = y'(t) = 0$ 可能不存在. 而此时则有 $t = 1/2, h = \frac{2 \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) + 1} = 2 \tan(\alpha/2)$.

当 $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ 时, 对任意的 $h \geq 0, x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0, t \in [0, 1]$.

$$S'(h) = \frac{dS(h)}{dh} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x'(t) \frac{\partial x'(t)}{\partial h} + y'(t) \frac{\partial y'(t)}{\partial h}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} dt.$$

特别地,

$$S'(0) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} 3 \cos(\alpha/2) (6t^2 - 6t + 1) dt = 0. \tag{2}$$

而

$$S''(h) = \frac{d^2(S(h))}{dh^2} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left[x'(t) \frac{\partial x'(t)}{\partial h} + y'(t) \frac{\partial y'(t)}{\partial h} \right]^2 - (x'(t)^2 + y'(t)^2) \left[\frac{\partial x'(t)}{\partial h} + \frac{\partial y'(t)}{\partial h} \right]^2}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1296 [\sin(\alpha/2)]^4 t^2 (1-2t)^2 (1-t)^2}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} dt \geq 0.$$

所以当 $\alpha \in (\pi, 2\pi), h \geq 0$ 时, $S(h)$ 单调递增.

当 $\alpha \in (0, \pi)$ 的时候, 若 $h \neq 2 \tan(\alpha/2)$, 则 $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0, t \in [0, 1]$. 而对任意 $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\lim_{h \rightarrow 2 \tan(\alpha/2)} \frac{x'(t) \frac{\partial x'(t)}{\partial h} + y'(t) \frac{\partial y'(t)}{\partial h}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \frac{2(1-2t)[6 \cos^2(\alpha/2)t^2 - 6 \cos^2(\alpha/2)t + 1]}{\sqrt{4 \cos^2(\alpha/2)t^2 - 4 \cos^2(\alpha/2)t + 1}},$$

且

$$S'(2 \tan(\alpha/2)) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(1-2t)[6 \cos^2(\alpha/2)t^2 - 6 \cos^2(\alpha/2)t + 1]}{\sqrt{4 \cos^2(\alpha/2)t^2 - 4 \cos^2(\alpha/2)t + 1}} dt =$$

$$\frac{3 \sin(\alpha/2)}{4} > 0.$$

则 $S'(h)$ 在 $h = 2 \tan(\alpha/2)$ 处连续, 且类似上面的分析, 可得 $S'(h) \geq 0 (h \geq 0)$, 所以当 $\alpha \in (0, \pi), h \geq 0$ 时, $S(h)$ 单调递增.

综上, 当 $\alpha \in (0, 2\pi), S(h)$ 是关于 $h \geq 0$ 的单调递增函数. \square

下面我们说明可以通过选取适当的 h 值, 使得圆弧与构造的三次 Bézier 曲线有相同的弧长. 易知, 弧角为 α 的圆弧的长度为 α . 而当 $h = 0$ 时, 此时对应的 Bézier 曲线退化为连接 P_0, P_3 的直线, 则

$$S(0) = \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha)} < \alpha.$$

又由于

$$\begin{aligned}
S(h) &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \geq \\
&2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{y'(t)^2} dt = \\
&2 \int_0^{\frac{1}{2}} 3h \sin(\alpha/2) (1-2t) dt = \\
&\frac{3}{2} h \sin(\alpha/2),
\end{aligned}$$

则当 $h \geq \frac{2\alpha}{3\sin(\alpha/2)}$, $\alpha \in (0, 2\pi)$ 时, $S(h) \geq \alpha$. 而 $S(h)$ 是关于 h 的连续函数, 故存在 $h_0 \in \left[0, \frac{2\alpha}{3\sin(\alpha/2)}\right]$, 使得 $S(h_0) = \alpha$. 又由于 $S(h)$ 是关于 h 的连续单调函数, 我们可以使用常用的数值求根方法来求解 h 的值, 如二分法、牛顿法等.

下面分别给出逼近 90° 圆弧、 135° 圆弧的三次 Bézier 曲线, 并计算出它们的最大半径误差以及等弧长点的误差.

① 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 通过使用二分法, 可以求得 $h = 0.551\ 777\ 128\ 1$. 计算得到半径误差最大偏差值为

$$\max_{t \in [0, 1]} | | P(t) | - 1 | = 2.692\ 05 \times 10^{-4},$$

而

$$\max_{t \in [0, 1]} | x^2(t) + y^2(t) - 1 | = 5.383\ 38 \times 10^{-4}.$$

后一误差表达是在文献[7]中采用. 图 3 给出圆弧和结果曲线的对比以及结果曲线的半径误差函数图形.

② 当 $\alpha = 135^\circ$ 时, 通过使用对分法, 可以求得 $h = 0.886\ 305\ 978\ 1$. 计算得到半径误差最大偏差值为

$$\max_{t \in [0, 1]} | | P(t) | - 1 | = 3.186\ 6 \times 10^{-3},$$

而

$$\max_{t \in [0, 1]} | x^2(t) + y^2(t) - 1 | = 6.363\ 05 \times 10^{-3}.$$

图 4 给出圆弧和结果曲线的对比以及结果曲线的半径误差函数图形.

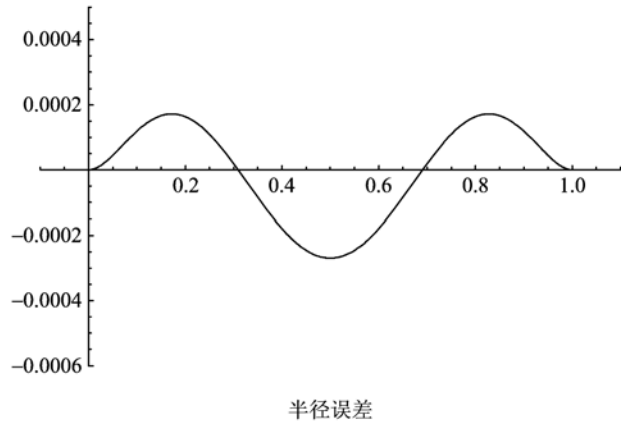
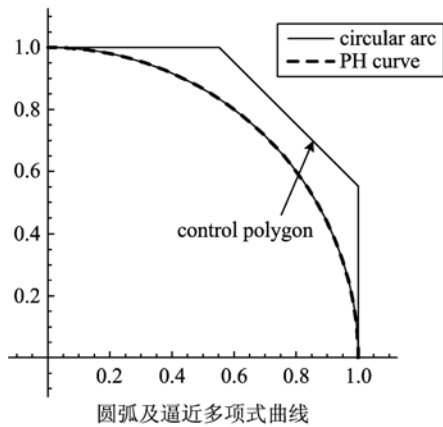


图 3 三次 Bézier 曲线逼近 90° 圆弧及其半径误差

Fig. 3 Approximating a 90° circular arc with a cubic Bézier curve and its radial error

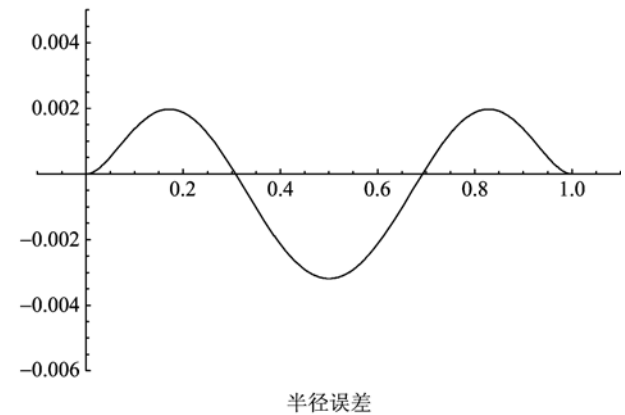
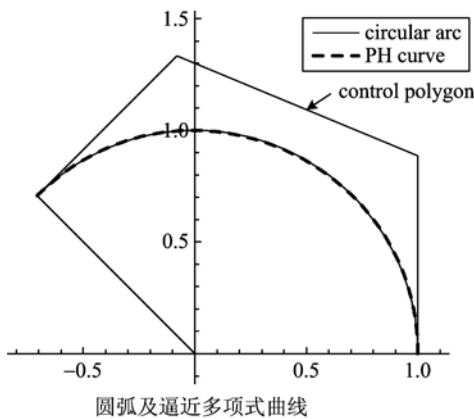


图 4 三次 Bézier 曲线等弧长逼近 135° 圆弧及其半径误差

Fig. 4 Approximating a 135° circular arc with a cubic Bézier curve and its radial error

2 四次 PH 曲线等弧长逼近圆弧

下面来讨论用四次 PH 曲线来等弧长逼近圆弧. PH(Pythagorean-Hodograph)曲线是由 Farouki 等^[15]于 1990 年引入的平面参数曲线中一类重要的曲线,其弧长可以用含参数的多项式精确表示.关于 PH 曲线的详情,请参考文献[16].

定义 2.1 对于多项式参数曲线 $P(t) = (x(t), y(t))$, 如果存在多项式 $\sigma(t)$, 使得 $x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2$, 则称 $P(t)$ 为 PH 曲线.

定理 2.2^[15] 平面参数曲线 $P(t)$ 是 PH 曲线的充要条件为

$$\begin{aligned} x'(t) &= \omega(t)(u^2(t) - v^2(t)), \\ y'(t) &= 2\omega(t)u(t)v(t), \end{aligned}$$

其中, $u(t), v(t)$ 和 $\omega(t)$ 分别为非零实多项式, 且 $u(t), v(t)$ 互素, 且不同时为常数, $\omega(t)$ 为首一多项式.

设平面参数曲线 $P(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^4 P_i B_i^4(t)$ 是四次 PH 曲线, 则对应的 $u(t), v(t)$ 和 $\omega(t)$ 应为一次多项式, 令

$$u(t) = u_0(1-t) + u_1 t,$$

$$v(t) = v_0(1-t) + v_1 t,$$

$$\omega(t) = \omega_0(1-t) + \omega_1 t,$$

其中, $u_0 \neq u_1, v_0 \neq v_1$ 且 $\omega_0 \neq \omega_1$. 则有下面等式

$$\begin{aligned} P'(t) &= 4 \sum_{i=0}^3 (P_{i+1} - P_i) B_i^3(t) = \\ &(\omega(t)(u^2(t) - v^2(t)), 2\omega(t)u(t)v(t)). \end{aligned} \quad (3)$$

2.1 对称型四次 PH 曲线逼近圆弧

如果对 PH 曲线 $P(t)$ 也做下面的要求: PH 曲线与圆弧有相同的起点和终点, PH 曲线与圆弧在起点与终点处有相同的切向量. 且要求 PH 曲线的控制顶点关于从 x 轴逆时针旋转 $\alpha/2$ 的轴对称, 则有

$$P_0 = (1, 0), P_1 = (1, 0) + h_1(0, 1),$$

$$P_2 = h_2 \left[\cos \left[\frac{\alpha}{2} \right], \sin \left[\frac{\alpha}{2} \right] \right],$$

$$P_3 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + h_1(\sin(\alpha), -\cos(\alpha)),$$

$$P_4 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)).$$

我们希望通过调节 h_1, h_2 的大小使得对应的四次 PH 曲线与圆弧有相同的长度. 但是一般情况下, 这个要求是无法满足的. 假定圆弧的弧角为 $\alpha \in (0, 2\pi)$, $P(t)$ 为所构造的 PH 曲线, 则其应满足方程 (3), 求解可得

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{3}{2} \tan \left[\frac{\alpha}{2} \right], h_2 = \frac{3 \left[\cos \left[\frac{\alpha}{2} \right] - \sin \left[\frac{\alpha}{2} \right] \right] \pm \sqrt{-\frac{9}{2} \tan \left[\frac{\alpha}{2} \right] \sin(\alpha) (\sin(\alpha) - 1)}}{\cos(\alpha) \left[\cos \left[\frac{\alpha}{2} \right] - \sin \left[\frac{\alpha}{2} \right] \right]}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}; \\ h_1 &= \frac{3}{2}, h_2 = \frac{2\sqrt{2} \pm 2}{2}, \alpha = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

而当 $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ 时候, $h_1 < 0$, 此时 PH 曲线的形状与圆弧差异较大. 故限定 $\alpha \in (0, \pi)$, 此时四次 PH 曲线的弧长为

$$\begin{aligned} &\frac{9 \tan \left[\frac{\alpha}{2} \right]}{4} \pm \\ &\frac{\tan \left[\frac{\alpha}{2} \right] \sqrt{-\frac{9}{2} \tan \left[\frac{\alpha}{2} \right] \sin(\alpha) (\sin(\alpha) - 1)}}{4 \left[\cos \left[\frac{\alpha}{2} \right] - \sin \left[\frac{\alpha}{2} \right] \right]}, \\ &\alpha \neq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 对应的 PH 曲线的弧长为 $\frac{18 \pm 3\sqrt{2}}{8} \neq \frac{\pi}{2}$.

综上, 如果要求四次 PH 曲线的控制顶点具有

对称性, 则得到的 PH 曲线的弧长在一般情况下并不能等于圆弧的长度. 且由于 $x'(t), y'(t)$ 有公因子 $\omega(t) = 1 - 2t$, 所以得到的 PH 曲线在 $t = \frac{1}{2}$ 时, 有奇点 $P \left[\frac{1}{2} \right] = \left[x \left[\frac{1}{2} \right], y \left[\frac{1}{2} \right] \right]$, 因此得到的 PH 曲线并不能很好的逼近圆弧.

例如, 如果用四次 PH 曲线逼近圆弧, 圆弧的弧角为 60° , 通过求解方程 (3), 可得两组解 $\{h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, h_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\}, \{h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, h_2 = \sqrt{3}\}$, 这两组解对应的弧长分别为

$$\frac{5\sqrt{3}}{8} \approx 1.082\ 531\ 755,$$

$$\frac{7\sqrt{3}}{8} \approx 1.515\ 544\ 457,$$

而圆弧的弧长为 $\frac{\pi}{3} \approx 1.047\ 197\ 551$. 结果如图 5 所示.

2.2 非对称型四次 PH 曲线等弧长逼近圆弧

为了使得四次 PH 曲线能够等弧长逼近圆弧, 且有较好的逼近效果. 我们在使用四次 PH 曲线来逼近圆弧的时候, 不对 PH 曲线的控制顶点做对称性的要求. 令四次 PH 曲线的五个控制顶点分别为 $P_0 = (1, 0), P_1 = (1, 0) + h_1(0, 1), P_2 = (h_2, h_3), P_3 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + h_4(\sin(\alpha), -\cos(\alpha)), P_4 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

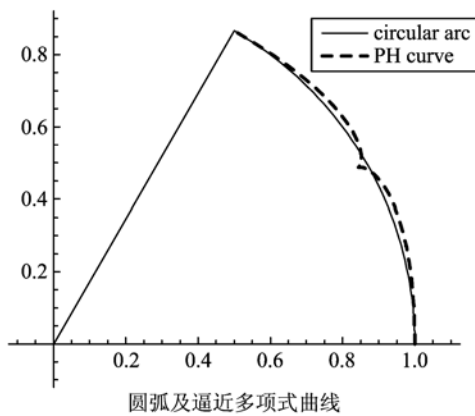
通过求解方程(3)和

$$\int_0^1 |\omega(t)| (u^2(t) + v^2(t)) dt = \alpha$$

除去具有对称性的控制顶点的解以外, 还得到了下面两组解:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{3\Delta_2}{4\Delta_1}, \\ h_2 &= \frac{-6\Delta_1 + \Delta_1 \sqrt{18\Delta_2}}{-\Delta_1}, \\ h_3 &= \frac{2(1 - \cos(\alpha)) \sqrt{6\Delta_1\Delta_2} + \Delta_2 \sqrt{3\Delta_1}}{4\Delta_1 \sqrt{3\Delta_1}}, \\ h_4 &= 0; \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h}_1 &= 0, \\ \tilde{h}_2 &= \cos(\alpha)h_2 + \sin(\alpha)h_3, \\ \tilde{h}_3 &= \sin(\alpha)h_2 - \cos(\alpha)h_3, \\ \tilde{h}_4 &= h_1. \end{aligned} \right\} (5)$$



式中, $\Delta_1 = \alpha - \sin(\alpha), \Delta_2 = \alpha^2 - 2 + 2\cos(\alpha)$. 显然, 由这两组解得到的曲线之间是关于从 x 轴逆时针旋转 $\alpha/2$ 的轴对称的. 所以, 下面我们只讨论其中一组解, 另一组解情况类似.

下面分别给出逼近 60° 圆弧、 135° 圆弧的四次 PH 曲线, 并计算出它们的最大半径误差.

① 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 把 α 代入式(4), 可得

$$h_1 \approx 0.399\ 989\ 924\ 4, h_2 \approx 0.780\ 201\ 556\ 7, h_3 \approx 0.739\ 931\ 062\ 5, h_4 = 0.$$

计算得到半径误差最大偏差值为

$$\max_{t \in [0, 1]} | |P(t)| - 1 | \approx 2.276\ 76 \times 10^{-3}.$$

对应的四次 PH 曲线及半径误差如图 6 所示.

② 当 $\alpha = 135^\circ$ 时, 把 α 代入式(4), 可得

$$h_1 \approx 0.972\ 101, h_2 \approx -0.033\ 788\ 9, h_3 \approx 1.394\ 19, h_4 = 0.$$

计算得到半径误差最大偏差值为

$$\max_{t \in [0, 1]} | |P(t)| - 1 | \approx 1.917\ 4 \times 10^{-2}.$$

对应的四次 PH 曲线及半径误差如图 7 所示.

3 结论

本文给出了两种圆弧的等弧长逼近方法, 分别用三次 Bézier 曲线和四次 PH 曲线逼近圆弧. 对于三次 Bézier 曲线, 我们讨论了其弧长与相邻控制顶点的距离之间的关系, 从而说明了可以通过数值求根方法稳定求解控制顶点. 对于用四次 PH 曲线逼近圆弧, 我们分别讨论了控制顶点为对称和非对称的两种情况下等弧长逼近的精确解, 并通过实例展示了逼近效果. 这些结果揭示了在圆弧多项式曲线逼近中, 可以在保证弧长相等的情况下, 讨论某种意

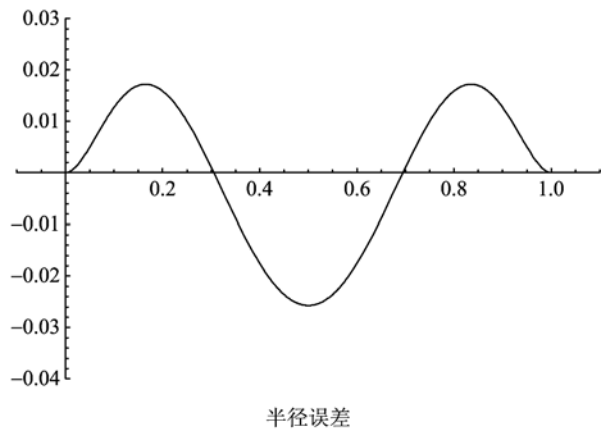
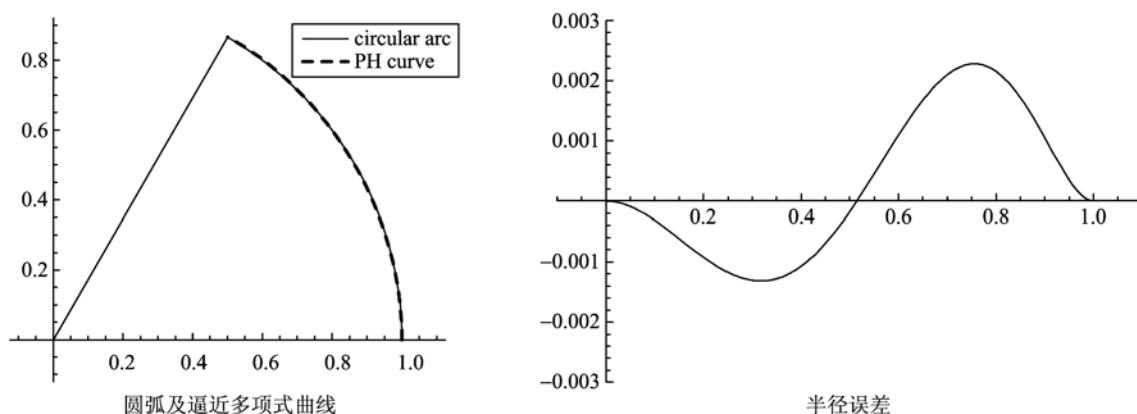
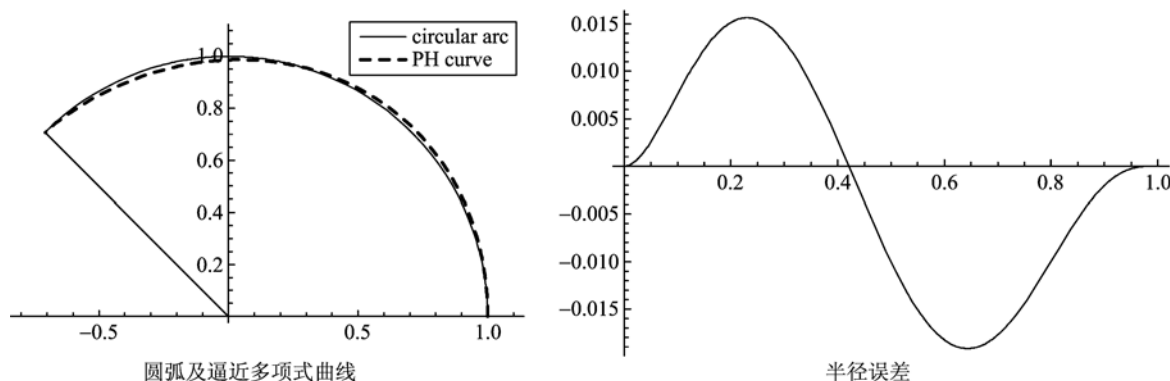


图 5 对称型四次 PH 曲线逼近 60° 圆弧及半径误差

Fig. 5 Approximating a 90° circular arc with a symmetric quartic PH curve and its radial error

图 6 非对称型四次 PH 曲线逼近 60° 圆弧及其半径误差Fig. 6 Approximating a 60° circular arc with an unsymmetric quartic PH curve and its radial error图 7 非对称型四次 PH 曲线逼近 135° 圆弧及其半径误差Fig. 7 Approximating a 135° circular arc with an unsymmetric PH curve and its radial error

义下的最佳逼近. 这为探讨类似的曲线逼近提供了新的可能性.

参考文献(References)

- [1] Blinn J E. How many ways can you draw a circle? [J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1987, 7(8): 39-44.
- [2] de Boor C, Holling K, sabin M. High accuracy geometric Hermite interpolation [J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(3): 269-278.
- [3] Floater M. High order approximation of conic sections by quadratic splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(6): 617-637.
- [4] Morken K. Best approximation of circle segments by quadratic Bézier curves [C]//Curves and Surfaces. New York: Academic Press, 1991:331-336.
- [5] Fan Jinsong, An Jun, Xu Zongjun. Cubic NURBS representation of arc and circle [J]. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 1997, 9(5):391-395.
- [6] 范劲松, 安军, 徐宗俊. 用三次 NURBS 表示圆弧与整圆的算法研究 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1997, 9(5):391-395.
- [7] Feng Yuyu, Zheng Fangling, Deng Jiansong. Perfect approximation of ellipsoid by polynomials [J]. Journal of Software, 2002, 13(4): 526-531.
- [8] Feng Yuyu, Zeng Fangling, Deng Jiansong. Polynomial interpolation approximation with geometric continuity is much better than Hermite interpolation [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2003, 33(2):127-133.
- [9] 冯玉瑜, 曾芳玲, 邓建松. 几何连续的多项式插值逼近与 Hermite 插值的比较 [J]. 中国科学技术大学学报, 2003, 33(2):127-133.
- [10] Li Qiang, Xi Guang, Wang Shangjin. Some practical approaches of representing circular arcs with NURBS [J]. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 1999, 11(5):467-469.

(下转第 427 页)