

ISSN 0253—2778

中国科学技术大学学报

第18卷

第3期

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 18

No. 3

3

1988

中国科学技术大学学报

第 18 卷 第 3 期 (总60期)

目 录

- 利用四波混频增强压缩效应的研究..... 郭光灿 姚 丹 (293)
- 弦模型及映射空间的几何..... 高怡泓 (299)
- Madey 定理在几种类型自由电子激光中的推广证明
..... 孙 雁 蒋华北 刘盛纲 (306)
- 固体参比电极的研究..... 赵叔晔等 (312)
- 利用辐射接枝技术改善聚氨酯的血液相溶性..... 李希明等 (319)
- 标准映象分歧行为的解析计算..... 汪秉宏 (325)
- 关于 Drucker 公设和塑性本构关系的进一步研究..... 李永池 唐之景 胡秀章 (339)
- 激波管平衡边界层的数值解..... 卢耘耘 陈 笃 (347)
- 滞变阻尼振子的随机响应..... 徐立功 王中东 (352)
- 任意形状截面的均匀介质柱体的电磁散射..... 蒋嘉翔 (359)
- 厚鳍鱼鳍线的色散特性——有限元分析..... 徐善驾 (369)
- 岩石层消减中的密度反转效应..... 许天铭 刘文忠 陈 静 (381)

研 究 简 报

- Mahler 定理的注记..... 余红兵 (388)
- 关于可积系中对称的代数结构的证明..... 程 艺 (390)
- Ba-Sr-Y-Cu-O体系的超导电性..... 张 涛等 (395)
- Ba-Nd-Cu-O体系的高温超导电性..... 夏健生等 (400)
- 在浓度对数图上确定酸碱体系状态的新方法..... 陈玲然 张懋森 (403)
- 金属氧化物之间的相互作用..... 钱逸泰等 (407)
- 常温下新鲜正长石的溶解和比表面关系的初步研究..... 郭 范等 (411)

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 18 No.3 (Sum No. 60)

CONTENTS

- Enhance of the Squeezing Effect via the Four-Wave Mixer
..... Guo Guangcan, Yao Dan (293)
- String Models and the Geometry of Mapping Space.....Gao Yihong (299)
- The Extension of Madey Theorem to Various Types of Free Electron
Lasers.....Sun Yan, Jiang Huabei, Liu Shenggang (306)
- Study on Solid State Reference Electrode.....Zhao Shuxi et al. (312)
- Improvement of Blood Compatibility of Polyurethane Elastomer by
Radiation Graft Copolymerization of 2-Hydroxyethyl Methacrylate
in Polymer Matrix.....Li Ximing et al. (319)
- Analytical Calculation of Bifurcation Behaviours in Standard Mapping
..... Wang Binghong (325)
- Further study on the Drucker Postulate and Plastic Constitutive Relations
.....Li yongchi, Tang Zhijing, Hu Xiouzhong (339)
- Random Response of an Oscillator with Hysteresis Damping
.....Lu Yunyun, Chen Du (347)
- A Numerical Method for Calculating the Equilibrium Boundary Layer
in a Shock Tube..... Xu Ligong, Wang Zhongdong (352)
- Electromagnetic Scattering from Homogeneous Dielectric Cylinders with
General Cross Section Jiang Jiexiang (359)
- Dispersion Characteristics of Thick Fin Lines
—Finite Element Analysis..... Xu Shanxia (369)
- Effects of Density Reversal in the Process of Lithosphere Subduction
..... Xu Tianming, Liu Wenzhong, Chen Jing (381)

Research Notes

- On a Theorem of Mahler..... Yu Hongbing (388)
- A Proof for the Algebraic Structure of Symmetries in Integrable Systems
.....Cheng Yi (390)
- Superconductivity in Ba-Sr-Y-Cu-O System.....Zhang Tao et al. (395)
- High T_c Superconductivity in Ba-Nd-Cu-O
..... Xia Jiansheng et al. (400)
- A New Method for Determining the State of Acid-Base System in the
Logarithmic Concentration Diagram
.....Chen Lingran, Zhang Maosen (403)
- The Interaction Between Metaloxide and Tin Dioxide
..... Qian Yitai et al. (407)
- A Preliminary Study of the Relation Between Specific Surface Area
and Dissolution of Fresh Orthoclase at Room Temperature
..... Guo Fan et al. (411)

中国科学技术大学学报编委会

主 编 龚 昇

副主编 (以姓氏笔划排序)

冯克勤 伍小平 刘耀阳 陈国权

张懋森 郭自强 钱景仁

英文编辑 钱大卫

责任编辑 袁克林 杨延龄

利用四波混频增强压缩效应的研究*

郭光灿 姚丹**

(物理系)

摘要

本文讨论了利用四波混频来增强压缩光场的效应问题,找出在不同条件下使压缩效应达到最强的实验条件。

关键词: 四波混频, 压缩态, 压缩效应的增强, 非经典光场。

1 引言

近年来,压缩光的产生问题越来越引起人们的兴趣。简并四波混频作为一种产生压缩光的途径最早由 Yuen 和 Shapiro^[1] 出来,压缩光是由四波混频介质的两束出射光经过50/50的分束镜组合而产生。尔后 Yurke^[2] 指出,若将四波混频介质放在光腔中,当一束相干光入射时,出射光在振荡的阈值附近将产生很强的压缩效应。

本文讨论当入射光不是相干光而是压缩光时,如何利用四波混频来增强压缩效应。

2 简并四波混频产生压缩光

考虑一个典型的简并四波混频模型,如图1所示, A_1 和 A_2 分别为无色散的泵浦光场的振幅, a_j 和 a_j^\dagger ($j=3,4$)分别是光场的消灭算符及产生算符。假设泵浦光足够强可按经典场来处理,于是 a_3 、 a_4 满足方程^[3]:

$$\frac{da_3}{dz} = ik^* a_4^\dagger \quad (1)$$

$$\frac{da_4}{dz} = -ik^* a_3^\dagger \quad (2)$$

其中

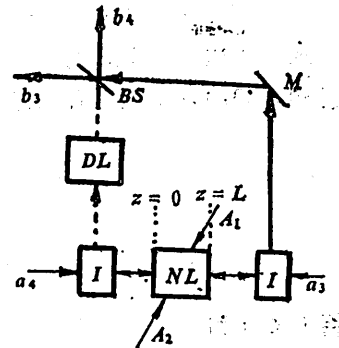


图1 简并四波混频模型

1987年8月26日收到。

* 中国科学院科学基金资助的课题。

** 福建师范大学代培研究生。

$$k^* = 2\pi\omega\lambda A_1 A_2 / cn \quad (3)$$

式中 z 为光轴方向的坐标。方程 (1) 和 (2) 的解为

$$a_s(0) = \sec(kL)a_s(L) - i \tan(kL)a_s^\dagger(L) \quad (4)$$

$$a_s(L) = \sec(kL)a_s(0) - i \tan(kL)a_s^\dagger(0) \quad (5)$$

这里, 为方便起见, 取 k 为实数。我们引进如下厄米算符:

$$a_{s1} = \frac{1}{2}(a_s + a_s^\dagger) \quad (6)$$

$$a_{s2} = \frac{1}{2i}(a_s - a_s^\dagger) \quad (7)$$

假定初始光场分别处于压缩态 $|\alpha_1, re^{i\theta_1}\rangle$ 和 $|\alpha_2, re^{i\theta_2}\rangle$, $a_s(L)$ 和 $a_s(0)$ 为其消灭算符。这里为方便计, 认为两个压缩态具有相同的压缩因子 r , 则有

$$a_{s1}(L) = \frac{1}{2}[a_s(L) + a_s^\dagger(L)]$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta a_{s1}^2(L) \rangle &= \frac{1}{4}[\langle a_s^2(L) \rangle - \langle a_s(L) \rangle^2 + \langle a_s^{\dagger 2}(L) \rangle - \langle a_s^\dagger(L) \rangle^2] \\ &\quad + \langle a_s(L)a_s^\dagger(L) \rangle + \langle a_s^\dagger(L)a_s(L) \rangle - 2\langle a_s^\dagger(L)\langle a_s(L) \rangle] \\ &= \frac{1}{4}[\text{sh}2r \cdot \cos\theta_1 + 1 + 2\text{sh}^2 r] \end{aligned} \quad (9)$$

$$a_{s2}(0) = \frac{1}{2i}(a_s - a_s^\dagger) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta a_{s2}^2(0) \rangle &= -\frac{1}{4}[\langle a_s^2(0) \rangle - \langle a_s(0) \rangle^2 + \langle a_s^{\dagger 2}(0) \rangle - \langle a_s^\dagger(0) \rangle^2] \\ &\quad - \langle a_s(0)a_s^\dagger(0) \rangle - \langle a_s^\dagger(0)a_s(0) \rangle + 2\langle a_s^\dagger(0)\langle a_s(0) \rangle] \\ &= \frac{1}{4}[\text{sh}2r \cdot \cos\theta_2 - 1 - 2\text{sh}^2 r] \end{aligned} \quad (11)$$

压缩光经过四波混频介质相互作用后出射光 $a_s(0)$ 、 $a_s(L)$ 的压缩量为

$$\langle \Delta a_{sm}^2(0) \rangle = \langle \Delta a_{sm}^2(L) \rangle = [1 + 2\tan^2(kL)] \langle \Delta a_{sm}^2(L) \rangle, \quad (m=1,2) \quad (12)$$

上式表明模 $a_s(0)$ 和 $a_s(L)$ 的压缩效应不但不会增强反而减小。但若把模 $a_s(0)$ 与 $a_s(L)$ 经过 50/50 的分束镜组合而得到模 b_s 和 b_s' , 则情况将截然不同。

$$b_s = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_s(0) - ia_s(L)] \quad (13)$$

$$b_s' = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_s(0) + ia_s(L)] \quad (14)$$

将 (4) 和 (5) 代入 (13) 和 (14) 则可得到

$$b_s = \{[\sec(kL)a_s(L) - \tan(kL)a_s^\dagger(L)] - i[\tan(kL)a_s^\dagger(0) + \sec(kL)a_s(0)]\} / \sqrt{2} \quad (15)$$

$$b_s' = \{[\sec(kL)a_s(L) + \tan(kL)a_s^\dagger(L)] - i[\tan(kL)a_s^\dagger(0) - \sec(kL)a_s(0)]\} / \sqrt{2} \quad (16)$$

$$b_{3,1} = \frac{1}{2}(b_3 + b_3^+) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sec(kL) - \tan(kL)][a_{3,1}(L) + a_{4,2}(0)] \quad (17)$$

$$\langle \Delta b_{3,1}^2 \rangle = \frac{1}{2}[\sec(kL) - \tan(kL)]^2 [\langle \Delta a_{3,1}^2(L) \rangle + \langle \Delta a_{4,2}^2(0) \rangle] \quad (18)$$

当 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ 时, $\langle \Delta a_{3,1}^2(L) \rangle$, $\langle \Delta a_{4,2}^2(0) \rangle$ 分别取最小值 $\frac{1}{4}e^{-2r}$, 此时的 $\langle \Delta b_{3,1}^2 \rangle$ 的涨落量最小,

$$\langle \Delta b_{3,1}^2 \rangle = \frac{1}{4}[\sec(kL) - \tan(kL)]^2 e^{-2r} \quad (19)$$

同理可求

$$\langle \Delta b_{3,2}^2 \rangle = \frac{1}{4}[\sec(kL) + \tan(kL)]^2 e^{-2r} \quad (20)$$

光场 b_4 的两分量具有与 b_3 相同的涨落量。因此

$$\langle \Delta b_{j,1}^2 \rangle \langle \Delta b_{j,2}^2 \rangle = \frac{1}{16} \quad (j=3,4) \quad (21)$$

可见模 b_3 和 b_4 均为最小测不准波包。由于两分量涨落量不相等, 所以必定有一个分量的涨落量低于真空涨落, 亦即必有压缩效应产生。根据 (19) 式可以看到, 随着 kL 由零逐渐增大, $\langle \Delta b_{j,1}^2 \rangle$ 由 $\frac{1}{4}e^{-2r}$ 逐渐减小, 当 $kL \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $\langle \Delta b_{j,1}^2 \rangle$ 趋于零。也就是说, 随着 kL 的增

大, b_j ($j=3,4$) 的第一分量出现比入射光更大的压缩, 且在 $kL \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时达到完全压缩的理想情况。

3 腔筒并四波混频产生压缩光

我们考虑如图 2 的腔筒并四波混频模型, 该腔由一个全反射镜构成, 两束泵浦光均为单色场, C_R 和 C_L 分别表示入射光模及出射光模。对于四波混频介质, 有如下关系^[2]:

$$d_R = e^{i\phi}(G_s^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d_L^+ + G_s C_R \quad (22)$$

$$C_L = G_s d_L + e^{i\phi}(G_s^2 - 1)^{\frac{1}{2}} C_R^+ \quad (23)$$

其中 G_s 是介质的增益 (实数)。 ϕ 是光通过介质时位相的改变。由于全反射镜的存在, 有

$$d_L = d_R \quad (24)$$

(24) 代入 (22)、(23) 式有

$$G_s C_R = G_s C_R + e^{i\phi}(G_s^2 - 1)^{\frac{1}{2}} C_R^+ \quad (25)$$

其中

$$G = G_s^2 / (2 - G_s^2) \quad (26)$$

而且

$$X_1 = \frac{1}{2}(C_L + C_L^+) = A_1 C_R + B_1 C_R^+ \quad (27)$$

其中, $A_1 = \frac{1}{4}G + \frac{1}{2}(G^2 - 1)^{1/2}e^{-i\phi}$, $B_1 = \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}(G^2 - 1)^{1/2}e^{i\phi}$.

$$\begin{aligned}
 F_1 \equiv \langle \Delta X_1^2 \rangle &= A_1^2 \langle C_R^2 \rangle - A_1^2 \langle C_R \rangle^2 + B_1^2 \langle C_R^+ \rangle^2 - B_1^2 \langle C_R^+ \rangle^2 \\
 &\quad + A_1 B_1 \langle C_R C_R^+ \rangle + A_1 B_1 \langle C_R^+ C_R \rangle - 2A_1 B_1 \langle C_R \rangle \langle C_R^+ \rangle \\
 &= \frac{1}{2}G^2 \text{shrchr} \cos \theta + \frac{1}{2}(G^2 - 1) \text{shrchr} \cos(\theta + 2\phi) + G(G^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \text{shrchr} \cos(\theta + \phi) + \frac{1}{4}[2G^2 - 1 + 2G(G^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \phi] \times (1 + 2\text{sh}^2 r)
 \end{aligned} \tag{82}$$

另一个正交位相振幅分量有

$$X_2 = \frac{1}{2i}(C_L - C_L^+) \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 \equiv \langle \Delta X_2^2 \rangle &= -\frac{1}{2}G^2 \text{shrchr} \cos \theta - \frac{1}{2}(G^2 - 1) \text{shrchr} \cos(2\phi + \theta) \\
 &\quad + G(G^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \text{shrchr} \cos(\theta + \phi) + \frac{1}{4}[2G^2 - 1 - 2G(G^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \phi] (1 + 2\text{sh}^2 r)
 \end{aligned} \tag{30}$$

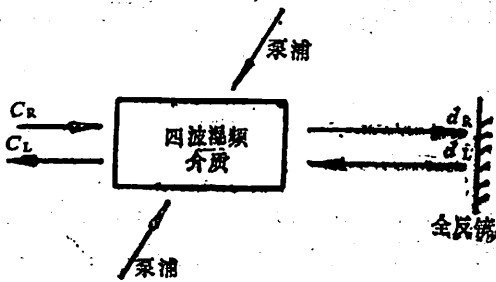


图 2 腔筒并四波混频模型

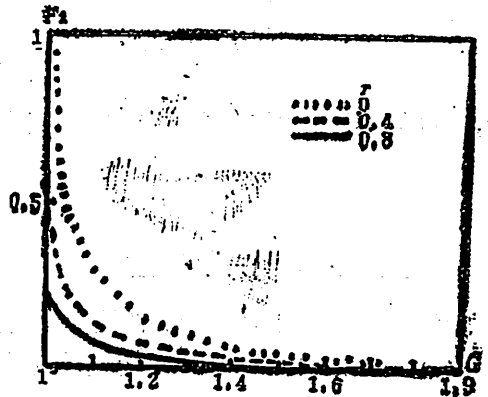


图 3. F_2 随 G^2 的演化图

根据(28)、(30)我们在各种情况下作出 $\langle \Delta X_1 \rangle^2$ 和 $\langle \Delta X_2 \rangle^2$ 的曲线(图3—6)。我们发现在 $1 \leq G^2 < 2$ 的区域中,随着 G 的增大, $\langle \Delta X_1 \rangle^2$ 或 $\langle \Delta X_2 \rangle^2$ 出现压缩效应的增强。当 $G^2 \rightarrow 2$ 时,出现完全压缩。在 $G^2 > 2$ 的区域中,随着 G 的增大, $\langle \Delta X_1 \rangle^2$ 或 $\langle \Delta X_2 \rangle^2$ 出现压缩效应的减弱,且当 G 从 $G^2 < 2$ 区域变为 $G^2 > 2$ 区域时,压缩效应从其中的一个分量转移到另一个分量上,但两个分量在 $G^2 = 2$ 的两边的压缩量并不对称。

我们还发现,只有 G^2 能够独立地影响压缩效应,其他的参量虽对压缩效应产生很大影响,但它们相互关联,共同起作用。例如压缩参量 r 越大,并不意味着 F_1 或 F_2 的压缩量必然增大或减小,这还要由 θ 和 ϕ 的取值及 G^2 的区域来决定。当 $1 \leq G^2 < 2$, $\theta = \phi = 0$ 时,随着 r 的增大, F_2 的压缩量增加,即压缩效应增强, r 越小,则压缩效应越弱(图3);当 $2 < G^2 \leq 3$, $\theta = \phi = 0$ 时,则与上述相反, r 越大压缩效应越弱(图4);然而,若 θ 和

ϕ 改变时, 上述的规律又发生变化, 当 $1 \leq G^2 < 2$, $\theta = 90^\circ$, $\phi = 0$ 时, r 越大, 压缩效应越弱 (图 5), 即相干光入射时出射光的压缩效应比任何压缩光入射的情况都要强。

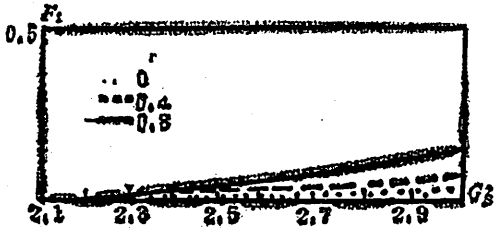


图 4 F_1 随 G^2 的演化图

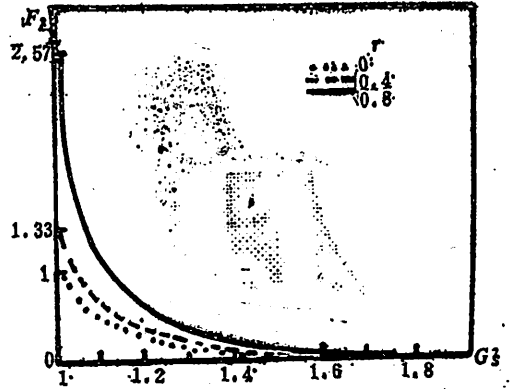


图 5 F_2 随 G^2 的演化图

在图 6 中, 我们看到, 当 $G^2 = 1.1$ 和 r 固定时, 任何一个 θ 值与 $-\theta$ 值的涨落量 F_1 , F_2 都以 $\phi = 180^\circ$ 为轴左右对称。

图 7 为 $G^2 = 1.1$, $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 时, F_2 随 ϕ 的演化, 结果表明 θ 取不同值时相应产生压缩的 ϕ 角范围不同, 而且最佳压缩量和所对应的 ϕ 角也不同。在 $G_1 = 1.1$ 时, 光场在 $\theta = 0$ 场合具有最大的压缩量, $F_2 = 0.09928$, 此时 $\phi = 0$, 压缩范围为 $-45^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$; 而在 $\theta = 45^\circ$ 场合产生压缩效应的范围为 $-30^\circ \leq \phi \leq 115^\circ$, 最佳压缩量 $F_2 = 0.1246$ (在 $\phi = 15^\circ$) 略小于 $\theta = 0$ 的最佳压缩量。

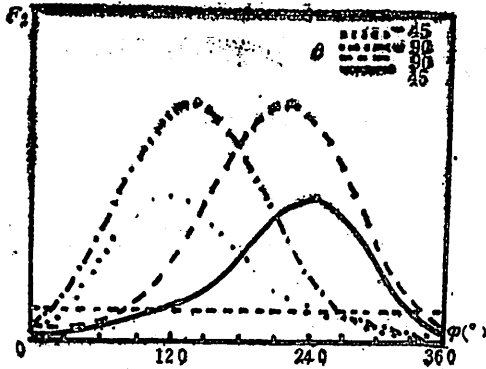


图 6 F_2 随 ϕ 的演化图 ($0 \leq \phi \leq 360^\circ$)

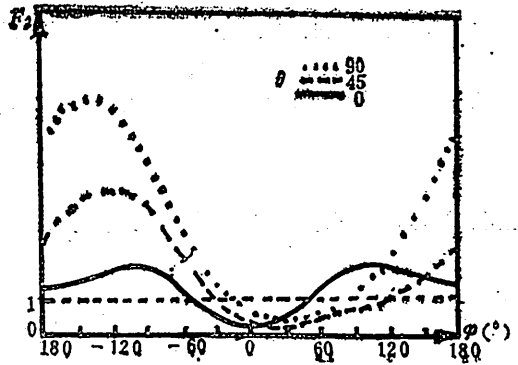


图 7 F_2 随 ϕ 的演化图 ($0 \leq \phi \leq 360^\circ$)

图 8 是在 $G^2 = 1.5$ 时, F_1 的最小值 (最佳压缩量) $F_{1,\min}$ 与 θ 的关系。可以看到, 当 $\theta = 180^\circ$ 时, F_1 具有最强压缩效应值, $F_{1,\min} = 0.0108$, 相应的 ϕ 角为 180° 。

图 9 为 $G^2 = 1.5$ 时, F_2 出现压缩效应所对应的 ϕ 角范围与 θ 的关系, 可以看到: 在 $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ 及 $315^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ 区域中, F_2 具有压缩效应所对应的取值范围最大, 即 $\Delta\phi = 50^\circ$, 在其他的 θ 值时, 压缩区域相对减小。

由上述结果可知, 在实验中对于各种不同的 G^2 值, 都可以选择某一定的压缩角 θ 以便

使输出场达到最强的压缩效应或最大的压缩区域。

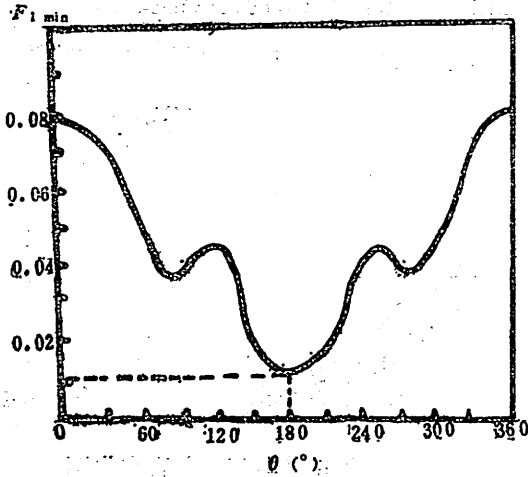


图8 $F_{1, min}$ 随 θ 的演化图

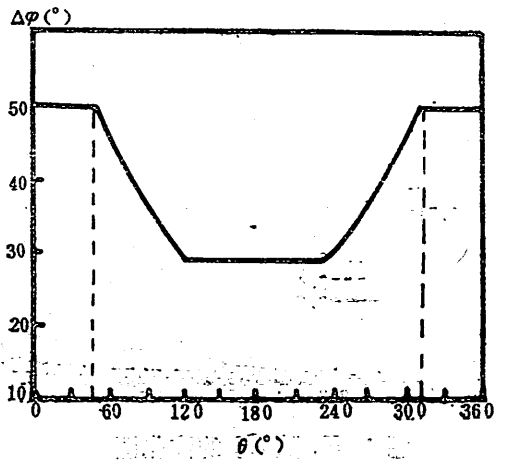


图9 压缩区域大小 $\Delta\phi$ 与 θ 的关系

4 结论

我们的分析结果表明,采用四波混频的两种装置均有可能使输入光场的压缩效应增强,即构成压缩效应放大器。当然要达到此目的,实验参数的选择十分重要。在实验参数选取不当时,压缩效应不但不会增强反而会减少。我们还发现在各种条件下存在有使压缩效应最强的实验参数。这些结果无疑是有实际应用价值的。

参 考 文 献

- [1] Yuen, H. P. and Shapiro, J. H., *Opt. Lett.*, 1 (1979), 334.
- [2] Yurke, B., *Phys. Rev., A*, 29 (1984), 408.
- [3] Yariv, A. and Pepper, D. M., *Opt. Lett.*, 1 (1977), 16.

Enhance of the Squeezing Effect via the Four-Wave Mixer

Guo Guangcan Yao Dan

(Department of Physics)

Abstract

Enhance of the squeezing effect via the four-wave mixer has been discussed. We find the experiment parameters which make the squeezing effect strongest in the different conditions.

Key words: four-wave mixing, squeezed state, enhance of squeezing, non-classical light field.

弦模型及映射空间的几何

高怡泓

(基础物理中心)

摘 要

本文从几何的角度考察弦模型的映射空间,在此映射空间中,进行了泛函张量分析,并给出了弯曲时空中玻色弦协变量子化的一个简单的协变处理。在程式中, Schwinger-De Witt 技术是极有用的工具。作为应用,我们还计算了弯曲时空中玻色弦的有效作用量和迹反常。所有的结果和有关 $2+\epsilon$ 维泛非线性 σ 模型的通常讨论相符合。

关键词: 粒子物理, 统一理论, 弦理论。

1 引言

目前活跃着的超弦是四种基本相互作用统一理论的最佳候选者。然而,包括引力在内的弦理论迄今未能建立在少数基本的几何假设上,如同广义相对论所做到的那样。这意味着作为基本相互作用统一理论的超弦远远没有达到完善。因此,我们必须广泛地研究弦模型的各种几何与拓扑性质。

弦模型的部分几何与拓扑性质在弦模型的映射空间中得到反映。设 (Σ, g) 、 (M, G) 分别是2维 Riemann 面和 D 维时空流形,弦在时空中的运动由世界面

$$x^\mu: \Sigma \rightarrow M, \mu=1, 2, \dots, D \quad (1)$$

描述。数学上,世界面(1)的全体组成映射空间 $M^\Sigma = \{x | x: \Sigma \rightarrow M\}$ 。本文着重于 M^Σ 的几何研究,关于 M^Σ 的拓扑研究我们另文报道^[1]。

2 映射空间的几何

按照 F. Klein 在爱尔兰根提出的纲领,映射空间的几何由它的某一变换群 \mathcal{S} 确定。在弦模型中, \mathcal{S} 应当反映理论的对称性。经典弦模型的对称群包含微分同胚群 $\text{Diff}(\Sigma)$ 、 $\text{Diff}(M)$ 和 Weyl 共形群 \mathcal{C} ,其中 $\text{Diff}(\Sigma)$ 、 $\text{Diff}(M)$ 在映射空间中诱导了如下的自然变换:对于任意的 $f \in \text{Diff}(\Sigma)$ 、 $F \in \text{Diff}(M)$ 、 $x \in M^\Sigma$,定义

$$L_{1,r}: M^2 \rightarrow M^2, L_{1,r}[x] = F \circ x \circ f \quad (2)$$

变换(2)的全体构成映射空间 M^2 的变换群

$$\mathcal{T} = \{L_{1,r} | f \in \text{Diff}(\Sigma), F \in \text{Diff}(M)\} \quad (3)$$

其中群乘法按映射的复合定义。按定义弯曲时空中弦的经典作用量

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{g} G_{\mu\nu}[x] \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} g^{ab} \quad (4)$$

在 $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ 的作用下是标量。

为了得到任意秩的张量,考虑 M^2 在 x 点处的余切空间 $T_x^*(M^2)$, 它有一组自然基

$$\{\delta x^\mu(\xi) | \mu = 1, 2, \dots, D; \xi \in \Sigma\} \quad (5)$$

其对偶基

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta x^\mu(\xi)} | \mu = 1, 2, \dots, D; \xi \in \Sigma \right\} \quad (6)$$

张成切空间 $T_x(M^2)$ 。任意秩的张量定义为若干余切空间和切空间张量积空间的一个元素。例如一个 n 秩协变张量可以写成

$$T(x) = \int \prod_{i=1}^n [d^2\xi_i \sqrt{g(\xi_i)}] T_{\mu_1(\xi_1) \dots \mu_n(\xi_n)}[x] \cdot \bigotimes_{i=1}^n \delta x^{\mu_i}(\xi_i) \quad (7)$$

特别, M^2 上的度规定义为一个 2 秩协变非退化的对称张量。如果 $\mathcal{G}_{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2)}[x]$ 是 M^2 上度规张量的分量, 非退化性要求

$$\mathcal{G}[x] = \det [\mathcal{G}_{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2)}[x]] = \exp \text{Tr} \ln [\mathcal{G}_{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2)}[x]] \neq 0 \quad (8)$$

若以 $[\mathcal{G}^{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2)}[x]]$ 表示度规矩阵 $[\mathcal{G}_{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2)}[x]]$ 的逆:

$$\int d^2\xi_2 \sqrt{g(\xi_2)} \mathcal{G}_{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2)}[x] \cdot \mathcal{G}^{\mu_2(\xi_2) \mu_3(\xi_3)} = \delta_{\mu_1}^{\mu_3} \delta(\xi_1 - \xi_3) \quad (9)$$

那么, 可以通过提升和下降指标在协变和逆变张量之间建立起一个 1:1 对应。

M^2 上标量场 $K[x]$ 的泛函导数 $\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta K}{\delta x^\mu(\xi)}$ 是 \mathcal{T} -协变的, 因为我们有

$$\delta K[x] = \int d^2\xi \sqrt{g} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta K}{\delta x^\mu(\xi)} \cdot \delta x^\mu(\xi) \quad (10)$$

但 $K[x]$ 的高阶泛函导数失去了 \mathcal{T} -协变性。为了定义协变的泛函导数, 我们引进仿射联络 $\Gamma[x]$, 其分量记作 $\Gamma_{\mu_2(\xi_2) \mu_3(\xi_3)}^{\mu_1(\xi_1)}[x]$ 。相应的泛函协变导数用 $\nabla_{\mu(\xi)}$ 表示。本文只讨论无挠的映射空间 M^2 , 其 Levi-Civita 联络由方程

$$\nabla_{\mu(\xi)} \mathcal{G}_{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2)}[x] = 0 \quad (11)$$

确定。这时 M^2 的曲率张量定义为

$$[\nabla_{\mu_1(\xi_1)}, \nabla_{\mu_2(\xi_2)}] T_{\mu_3(\xi_3)} = - \int d^2\xi \sqrt{g(\xi)} \mathcal{R}_{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2) \mu_3(\xi_3)} T_{\nu(\xi)} \quad (12)$$

由此可得 M^2 的 Ricci 张量 $\mathcal{R}_{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2)}$ 和曲率标量。

由于弦模型相互作用的定域性, M^2 上的张量泛函必须因子化^[12]:

$$\mathcal{G}_{\mu_1(\xi_1) \mu_2(\xi_2)}[x] = G_{\mu_1 \mu_2}(x) \delta(\xi_1 - \xi_2)$$

$$\mathcal{R}_{\mu_1(\xi_1)\mu_2(\xi_2)\mu_3(\xi_3)\mu_4(\xi_4)}[x] = R_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(x) \times \delta(\xi_1 - \xi_2)\delta(\xi_2 - \xi_3)\delta(\xi_3 - \xi_4), \text{ etc.} \quad (13)$$

其中 $G_{\mu\nu}$ 、 $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ 是时空流形 M 的度规和曲率张量。注意 (13) 式中的度规结构是 Polyakov 弦模型中的度规结构^[9]的自然推广。

在弦模型量子化的微扰处理中，需要将经典作用量 (4) 作 Taylor 展开。不过，普通的泛函 Taylor 展开并不是 \mathcal{S} -协变的，它依赖于 M^2 的特殊坐标系 $\{x^\mu(\xi) | \mu=1, 2, \dots, D, \xi \in \Sigma\}$ 的选择，因而数学上是病态的。为了得到 \mathcal{S} -协变的 Taylor 展开，我们引进 M 上的两点 De Witt 函数 $\sigma^m(y(\xi), x(\xi))$ ，利用数学归纳法可以证明^[21]

$$S[x] = S[y] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int \prod_{i=1}^m [d^2\xi_i \sqrt{g(\xi_i)}] \times \{\nabla_{\mu_1(\xi_1)} \dots \nabla_{\mu_m(\xi_m)} S[y]\} \sigma^{m_1}(y(\xi_1), x(\xi_1)) \dots \sigma^{m_m}(y(\xi_m), x(\xi_m)) \quad (14)$$

(14) 式即作用量 (4) 关于 $x \in M^2$ 的 \mathcal{S} -协变的 Taylor 展开，它在下一节弦模型协变量子化的讨论中起着关键的作用。

3 弯曲时空中玻色弦的协变量子化

弯曲时空中玻色弦的量子化可以纳入路径积分的框架。固定 Riemann 面 Σ 上的度规 g ，弦模型的量子配分函数为

$$Z[g] = \int_{M^2} [dx] \exp \frac{i}{\hbar} S[x, g] \quad (15)$$

正如普通的量子场论，可以采用外源技术来计算 (15) 式。引入外源 J 后，生成泛函为

$$Z[g, J] = \int_{M^2} [dx] \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ S[x, g] + \int d^2\xi \sqrt{g} x^\mu(\xi) J_\mu(\xi) \right\} \quad (16)$$

时空中弦位置 $x^\mu(\xi)$ 的真空期望值为

$$y^\mu(\xi) = \langle x^\mu(\xi) \rangle_I = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta J_\mu(\xi)} \ln Z[g, J] \quad (17)$$

作勒让德变换，定义弦的有效作用量

$$W[y, g] = \frac{\hbar}{i} \ln Z[g, J] - \int d^2\xi \sqrt{g} y^\mu(\xi) J_\mu(\xi) \quad (18)$$

显然

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W[y, g]}{\delta y^\mu(\xi)} = -J_\mu(\xi) \quad (19)$$

(16) - (19) 式给出

$$\exp \frac{i}{\hbar} W[y, g] = \int [dx] \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ S[x, g] - \int d^2\xi \sqrt{g} (x^\mu - y^\mu)(\xi) \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W[y, g]}{\delta y^\mu(\xi)} \right\} \quad (20)$$

正如普通量子场论，(20) 可以确定有效作用量 $W[y, g]$ 到任意圈。例如在单圈近似下

$$W[y, g] = S[y, g] - \frac{\hbar}{2i} \text{Tr} \ln \left[\frac{\delta^2 S[y, g]}{\delta y^\mu(\xi) \delta y^\nu(\xi)} \right] \quad (21)$$

上节曾经指出, M^2 上标量场的二阶或二阶以上的泛函导数并不是 \mathcal{S} -协变的, 因此由 (21) 确定的弦有效作用量不具有 \mathcal{S} -协变性。这一点也可从 (20) 式中直接看出。有效作用量的非协变性将导致 β -函数的歧义, 这在物理上是不能被接受的。为了克服这一困难, 我们将 (20) 推广成协变的形式:

$$\exp \frac{i}{\hbar} W[y, g] = \int_{M^2} d\mu[x] \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ S[x, g] + \int d^2\xi \sqrt{g} \sigma^\mu(y(\xi), x(\xi)) \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W[y, g]}{\delta y^\mu(\xi)} \right\} \quad (22)$$

其中 $\sigma^\mu(\cdot, \cdot)$ 是 M 上的两点 DeWitt 函数, $d\mu[x]$ 是 M^2 上 \mathcal{S} -协变的体积测度:

$$d\mu[x] = [dx] \sqrt{\mathcal{G}[x]} \quad (23)$$

在 (22) 中, 弦有效作用量 $W[y, g]$ 自恰地成为一个 \mathcal{S} -不变的泛函。这时, 真空期望值 (17) 相应地推广为

$$\langle \sigma^\mu(y(\xi), x(\xi)) \rangle_J = 0 \quad (24)$$

此式蕴含着 $\sigma^\mu \sim O(\hbar)$ 是弦的协变量子涨落。

为了对 (22) 式施用协变微扰论, 我们将经典作用量 $S[x, g]$ 作协变的 Taylor 展开 (见 (14) 式)。容易看出, 如在 (22) 式中的路径积分时作下列变量代换

$$x^\mu(\xi) \rightarrow \sigma^\mu(\xi) \equiv \sigma^\mu(y(\xi), x(\xi)) \quad (y \text{ 固定}) \quad (25)$$

则计算上会有很大的便利。变换 (25) 的 Jacobian 为^[2]

$$d\mu[x] = \mathcal{G}^{1/2}[y] \cdot \Delta^{-1}[y, x] \cdot [d\sigma] \quad (26)$$

其中 $\Delta[y, x]$ 是 M^2 上的 Ven Vleck-Morette 行列式, 具有下列性质:

$$\Delta^{-1}[y, y] = 1, \quad \nabla_{\mu(\xi)} \Delta^{-1}[y, x] \Big|_{x \rightarrow y} = 0 \quad (27)$$

$$\nabla_{\mu(\xi)} \nabla_{\nu(\tilde{\xi})} \Delta^{-1}[y, x] \Big|_{x \rightarrow y} = -\frac{1}{3} \mathcal{R}_{\mu(\xi)\nu(\tilde{\xi})}[y]$$

现在, 将 (14)、(26)、(27) 代入 (22), 并按 \hbar 的幂次逐级展开 $W[y, g]$, 我们得到单圈近似下的结果:

$$W[y, g] = S[y, g] + \frac{\hbar}{2i} \text{Tr} \ln [\mathcal{G}_{\mu(\xi)\nu(\tilde{\xi})}[y]] - \frac{\hbar}{2i} \text{Tr} \ln [\nabla_{\mu(\xi)} \nabla_{\nu(\tilde{\xi})} S[y, g]] \quad (28)$$

(28) 式具有明显的 \mathcal{S} -不变性: 其第二项和第三项是权重相同的标量密度, 在进行 \mathcal{S} -变换时两者的权重因子相互抵消。

利用上节建立的张量泛函分析容易算出

$$[\nabla_{\mu(\xi)} \nabla_{\nu(\tilde{\xi})} S[y, g]] = \left[-\frac{1}{2\pi\alpha'} (D^2 + \hat{R})_{\nu(\tilde{\xi})\mu(\xi)} \right] \quad (29)$$

其中

$$D_a = \nabla_a + \gamma_a, \quad (D_a)_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu \cdot \nabla_a + (\gamma_a)_\nu^\mu, \quad (\gamma_a)_\nu^\mu = \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \nabla_a y^\alpha = \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial \xi^a} \quad (30)$$

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\beta\nu}(y) \frac{\partial y^\alpha}{\partial \xi^a} \frac{\partial y^\beta}{\partial \xi^b} g^{ab}$$

Δ_\cdot 是 Σ 上的协变导数。为了讨论方便，我们采用自然单位制 $\hbar = 2\pi\alpha' = 1$ 并在弦的世界面参数空间 Σ 中作 Wick 转动 $\xi_2 \rightarrow -i\xi_0$ 。这时单圈近似下弦的欧几里德有效作用量为

$$W_E[y, g] = S_E[y, g] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln Q_E$$

$$Q_E = -(D^2 + \hat{R})_E \quad (31)$$

在不致于引起混淆的情况下我们总是省略欧氏脚标 E。

弦有效作用量的单圈修正部分 $-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln Q$ 的计算可以方便地借助 Schwinger-De Witt 技术。考虑热核方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Q\right) \mathcal{H}(\xi, \tilde{\xi}; t) = 0 \quad (32)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{H}(\xi, \tilde{\xi}; t) = \delta(\xi - \tilde{\xi})$$

的渐近解：

$$\mathcal{H}(\xi, \tilde{\xi}; t) = \frac{\Delta^{1/2}(\xi, \tilde{\xi})}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\sigma(\xi, \tilde{\xi})/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi, \tilde{\xi}) t^n \quad (33)$$

其中 DeWitt-Seeley 系数 $a_n(\xi, \tilde{\xi})$ ($D \times D$ 矩阵) 满足递推关系

$$\sigma^\circ D_\cdot a_0 = 0, \quad n a_n + \sigma^\circ D_\cdot a_n = -\Delta^{1/2} Q (\Delta^{1/2} a_{n-1}) \quad (34)$$

设 $a_n(\xi) = \lim_{\tilde{\xi} \rightarrow \xi} a_n(\xi, \tilde{\xi})$ ，我们得到

$$a_0(\xi) = 1_{D \times D}, \quad a_1(\xi) = \frac{1}{6} R^{(2)} 1_{D \times D} + \llbracket \hat{R}_{\mu\nu} \rrbracket \quad (35)$$

等等。

将 $d = \dim(\Sigma) = 2$ 解析延拓到 $2 + \epsilon$ ，我们有

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \text{Tr} \mathcal{H}(\xi, \tilde{\xi}; t)$$

$$= \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int d^2 \xi \sqrt{g} \lim_{\tilde{\xi} \rightarrow \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma(\xi, \tilde{\xi})}{2} \right]^{n - (d/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2} - n\right) \text{tr} a_n(\xi, \tilde{\xi}) \quad (36)$$

其中 tr 表示对 $D \times D$ 矩阵求迹。当 $\tilde{\xi} \rightarrow \xi$ 时， $\sigma(\xi, \tilde{\xi}) \rightarrow 0$ ，故 (36) 式中前 $d/2 + 1$ 项发散。弦模型中取 $d \rightarrow 2$ ，容易看出 (36) 式中导致发散的是 $n = 0$ 和 $n = 1$ 项。我们必须在经典作用量 $S[y, g]$ 中引入重整化补偿项将这些发散抵消。显然重整化补偿项应取下列形式：

$$S_1[x, g] = A \int d^2 \xi \sqrt{g} \text{tr} a_0(\xi) + B \int d^2 \xi \sqrt{g} \text{tr} a_1(\xi) \quad (37)$$

这里 A, B 是 (无穷大) 常系数。有效作用量

$$W[y, g] = S[y, g] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln Q \quad (38)$$

可以写成

$$W[y, g] = W_{\text{ren}}[y, g] + W_{\text{div}}[y, g] \quad (39)$$

它的发散部分是

$$W_{\text{div}}[y, g] = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \text{Tr} \left\{ \Delta^{1/2} \sum_{n=0,1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-\sigma/2t} \cdot t^{n-d/2} \right\} \quad (40)$$

经重整化之后, 我们导出弦有效作用量有限部分的 Schwinger-De Witt 表示:

$$W_{\text{ren}}[y, g] = S[y, g] + \frac{1}{8\pi} \int_0^{\infty} dt \ln t \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int d^2\xi \sqrt{g} \text{tra}_n(\xi) \right\} \quad (41)$$

作为上述 Schwinger-De Witt 技术的进一步应用, 我们来考察弯曲时空中弦能量-动量张量的迹反常。迹反常起源于重整化手续, 因为重整化补偿项 (37) 破坏了共形不变性。这一观察导致了下述迹反常的一种简单的计算方法:

$$\langle T_a^a(\xi) \rangle_{\text{ren}} = -\langle T_a^a(\xi) \rangle_{\text{div}} = -\frac{2}{\sqrt{g}} g^{ab} \frac{\delta W_{\text{div}}[y, g]}{\delta g^{ab}(\xi)} \quad (42)$$

在 (40) 式中引入收敛因子 $e^{-\delta t}$ 得

$$W_{\text{div}}[y, g] = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{n=0,1}^{\infty} \Gamma(n-d/2) \delta^{d/2-\delta} \int d^2\xi \sqrt{g} \text{tra}_n(\xi) \quad \text{当 } d \sim 2 \text{ 时, 上}$$

式成为

$$W_{\text{div}}[y, g] = \frac{1}{8\pi} \Gamma(1-d/2) \int d^2\xi \sqrt{g} \text{tra}_1(\xi) \quad (43)$$

(35) 给出

$$\text{tra}_1(\xi) = \frac{D}{6} R^{(2)} + R_{\mu\nu}(y) \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial y^\nu}{\partial \xi^b} g^{ab} \quad (44)$$

其中 $R^{(2)}$ 是 Riemann 面 Σ 的曲率标量。利用变分恒等式

$$\frac{1}{\sqrt{g}} g^{ab} \frac{\delta}{\delta g^{ab}} \int d^2\xi \sqrt{g} R^{(2)} = (1-d/2) R^{(2)} \quad (45)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} g^{ab} \frac{\delta}{\delta g^{ab}} \int d^2\xi \sqrt{g} R_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial y^\nu}{\partial \xi^b} g^{ab} = (1-d/2) R_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial y^\nu}{\partial \xi^b} g^{ab}$$

及 (42)、(44) 式, 我们得到迹反常

$$\langle T_a^a(\xi) \rangle_{\text{ren}} = -\frac{D}{24\pi} R^{(2)} - \frac{1}{4\pi} R_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial y^\nu}{\partial \xi^b} g^{ab} \quad (46)$$

按照 β -函数的定义有

$$\beta_{\mu\nu}^g = -\frac{1}{4\pi} R_{\mu\nu} \quad (47)$$

共形反常的抵消要求 β -函数为零, 故时空必须是 Ricci 平坦的。(47) 式与通常用重整化群方法给出的结果^[4]一致。

4 结论

我们在映射空间的几何框架中运用热核方法和 Schwinger-De Witt 技术研究了弯曲时

空中玻色弦的协变量子化, 导出了单圈近似下的 β -函数。这一程式可以方便地推广到超对称和时空具有挠率的情形, 有关的讨论将另文给出。

作者在完成本文的过程中得到方励之、汤拒非、郭汉英、刘辽及朱毓杰诸先生的指教, 在此致谢。作者还要感谢赵志泳先生, 他热忱地鼓励作者进一步研究本文所涉及的映射空间几何与无限维 Grassmannians 之间的关系。

参 考 文 献

- [1] Gao Yihong and Li Miao, *Phys. Lett.*, **196B** (1987), 339.
- [2] 高怡泓, 中国科学技术大学硕士论文 (1988)。
- [3] Alvarez, O., *Nucl. Phys.*, **B219** (1983), 125.
- [4] Friedan, D., *Phys. Rev. Lett.*, **45** (1980), 1057.

String Models and the Geometry of Mapping Space

Gao Yihong

(Center of Fundamental Physics)

Abstract

The mapping space for string models is considered from the geometrical angle. Functional tensor calculations are developed on this mapping space. Using the geometrical argument, we provide a simple covariant approach to the quantization problem of Bosonic strings in curved spacetime. It is shown that the Schwinger-De Witt technique is a useful tool in our formalism. As an application, we compute the covariant effective action and the trace anomaly for Bosonic strings in curved spacetime. All results are in agreement with the earlier works about generalized nonlinear sigma models in $2+\epsilon$ dimensions.

Key words: particle physics, grand unification theories, string theories.

Madey定理在几种类型自由电子激光中的推广证明

孙雁

蒋华北 刘盛纲

(中国科技大学)

(成都电讯工程学院)

摘要

Madey定理由两部分组成,它们是从静磁泵场自由电子激光分析中得到的。本文针对其它几种常见类型的自由电子激光进行了分析,结果表明,除渡越辐射型外,在其它几种类型中Madey定理第一部分成立。这样,与已推广了的第二部分一起, Madey定理就得到了完整的推广。渡越辐射自由电子激光中也存在相应的形式,但更为复杂。

关键词:自由电子激光, Madey定理。

1 引言

自由电子激光的研究是现代科学技术研究的前沿课题之一,近年来得到了迅速的发展。在自由电子激光的理论及实验研究中, Madey定理都起着重要的作用。在做了较多的假设条件后, Madey证明了以后被称之为 Madey定理的如下关系式^[1]

$$\langle (\gamma_f - \gamma_i) \rangle^2 = 2\pi^2 \frac{E_0^2 T}{m^2 c \omega^2} \cdot \frac{dP(\omega)}{d\Omega} \quad (1)$$

$$\langle (\gamma_f - \gamma_i) \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\gamma_i} \langle (\gamma_f - \gamma_i)^2 \rangle \quad (2)$$

式中 γ_i 为电子进入相互作用区时的相对论因子,而 γ_f 为电子与电场 $E = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi)$ 相互作用后在离开相互作用区时取的值, $\langle \rangle$ 代表对初相位 ϕ 求平均, $\frac{dP(\omega)}{d\Omega}$ 是自发辐射谱。

这个定理由两部分组成,第一部分给出了二阶矩与自发辐射谱的关系;第二部分给出了一阶矩与二阶矩的微分关系。一阶矩与电子所交出的能量,也即与受激辐射相关,所以将两

1987年12月7日收到。

式合并, 就得到受激辐射与自发辐射的关系, 这有助于进一步理解自由电子激光的工作机制。在理论工作方面, 用这个定理可以简化各种类型自由电子激光及光学速调管的小信号增益计算, 在任意磁场结构中能量零散的计算^[2, 3], 以及处理增益——最大能散乘积问题等; 在实验工作方面, 可以用来判断所发出的辐射是自发辐射还是受激辐射, 还可从易测到的自发辐射谱来对不易探测的小信号增益进行诊断^[4]。

鉴于这个定理的重要性, 在提出后得到了进一步的研究与推广。文献 [5]、[6] 在较一般的情况下证明了 (2) 式, 文献 [7] 将此定理推广到了三维、多模情况。实验研究表明^[8], 在低增益、未饱和电子-光子相互作用以及平面电磁波条件下, Madey 定理是成立的。

随着自由电子激光研究的深入, 提出了许多新类型的工作机理, 所以有必要对静磁型以外的自由电子激光研究 Madey 定理。由于可以认为文献 [5]、[6] 实际上已将 (2) 式在一般情况下做了推广, 本文将主要讨论 (1) 式在几种类型自由电子激光中成立的问题。另外, 由于 Madey 对 (2) 式的推导具有物理意义鲜明的特点, 我们在第三节中指出其推导也适用于其它类型的自由电子激光。

2 定理第一部分的推广证明

在低增益区, 将电磁场对电子的作用看作在电子平衡运动基础上所加的一个扰动, 则我们做如下展开^[1]

$$t(z) = \frac{1}{c} \int_0^z \frac{1}{\beta_{11}} dz = \frac{1}{c} \int_0^z dz \left[\frac{1}{\beta_{11}^0} + \frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{1}{\beta_{11}^0} \right) (\gamma - \gamma_i) + \dots \right] \\ = t^0(z) + t^1(z) + \dots \quad (3)$$

$$\frac{\beta}{\beta_{11}} = \frac{\beta_0}{\beta_{11}^0} + \frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{\beta_0}{\beta_{11}^0} \right) (\gamma - \gamma_i) + \dots \quad (4)$$

$$E(z, t, \varphi) = E(z, t^0, \varphi) + \frac{\partial E}{\partial t} (t - t_0) + \dots \\ = E(z, t^0, \varphi) + \frac{\partial E(z, t^0, \varphi)}{\partial t} t^1(z) + \dots \quad (5)$$

式中 t 的上指标对应于展开式的第一及第二项, 即对应于电子的 0 阶、1 阶扰动。

电子在与电磁场相互作用过程中满足

$$\frac{d}{dt} (m_0 \gamma c^2) = e v \cdot E$$

或
$$\gamma - \gamma_i = \frac{e}{m_0 c^2} \int_0^z \frac{\beta^0}{\beta_{11}} \cdot E dz \quad (6)$$

将 (3)、(4) 及 (5) 代入 (6) 式, 有

$$\gamma - \gamma_i = \frac{e}{m_0 c^2} \int_0^z dz \frac{\beta^0}{\beta_{11}} \cdot E(z, t^0, \varphi) + \frac{e}{m_0 c^2} \int_0^z dz \left\{ \frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{\beta^0}{\beta_{11}} \right) \cdot E(z, t^0, \varphi) \right. \\ \cdot \frac{e}{m_0 c^2} \int_0^{z'} dz' \frac{\beta^0}{\beta_{11}} \cdot E(z', t^0, \varphi) + \frac{\beta^0}{\beta_{11}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} E(z, t^0, \varphi) \frac{1}{c} \int_0^{z'} dz' \\ \left. \cdot \left[\frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{1}{\beta_{11}^0} \right) \cdot \frac{e}{m_0 c^2} \int_0^{z'} dz'' \frac{\beta^0}{\beta_{11}} \cdot E(z'', t^0, \varphi) \right] \right\} + \dots = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots \quad (7)$$

这里 γ_1 及 γ_2 分别对应于展开式中的第一及第二项。若相互作用区长度为 L ，则 $\gamma_1 - \gamma_2 = (\gamma_1 - \gamma_2)|_{z=L}$ 。

将 (7) 式代入一阶矩及二阶矩的定义式中，只保留不为零的最高次项，得到

$$\text{一阶矩: } \langle \gamma_1 - \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_2 \rangle \quad (8)$$

$$\text{二阶矩: } \langle (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \rangle = \langle \gamma_2^2 \rangle \quad (9)$$

其中在 (8) 式中由于 γ_1 与 $E(z, t^0, \varphi)$ 成线性关系，对 φ 的平均结果为零。

用上面得到的式子对不同类型的自由电子激光分别讨论如下：

1) 横向泵场型

横向泵场自由电子激光含有静磁致辐射型、横向静电型等。不失一般性，可以假设辐射场为在 X 方向线极化的（圆极化场可分解成两个线极化场的迭加）：

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

将上模型代入 (7) 式，则二阶矩 (9) 成为

$$\langle (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{e}{m_0 c^2} \int_0^L dz \frac{\beta_x^0}{\beta_{11}^0} \cdot E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi) \right]^2$$

将三角函数展开，对 φ 的积分求出，即可得到

$$\begin{aligned} \langle (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \rangle = & \frac{1}{2} \left(\frac{eE_0}{mc^2} \right)^2 \left\{ \left[\int_0^L dz \frac{\beta_x^0}{\beta_{11}^0} \cos(\omega t - kz) \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[\int_0^L dz \frac{\beta_x^0}{\beta_{11}^0} \sin(kz - \omega t) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

自发辐射功率谱分布为 [1, 2]

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{T} \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int dt \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \right] \right|^2 \quad (11)$$

对高能电子的辐射，主要是沿运动方向，取 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ ，由 (11) 式计算出：

$$\begin{aligned} \frac{dP(\omega)}{d\Omega} = & \frac{1}{T} \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_0^L dz \frac{\beta_x^0}{\beta_{11}^0} \exp[-i(\omega t - kz)] \right|^2 \\ = & \frac{1}{T} \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left\{ \left[\int_0^L dz \frac{\beta_x^0}{\beta_{11}^0} \cos(kz - \omega t) \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[\int_0^L dz \frac{\beta_x^0}{\beta_{11}^0} \sin(kz - \omega t) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

比较 (10) 式与 (12) 式，即得到 (1) 式。

2) 纵向泵场型

实现电子注与电磁场纵向交换能量的自由电子激光方案有 Cerenkov 辐射型、纵向静电型等。它们都有两种相互作用模式 [10]：倾斜注入平面波及 TM 波导模式电磁波。波导模式可分解成沿不同方向传播的、不同频率的平面波的迭加。做这种分解的原因除分析方便外，

还由于自发辐射谱 $\frac{dP(\omega)}{d\Omega}$ 是沿某一方向频率为 ω 的辐射功率。为建立 $\frac{dP(\omega)}{d\Omega}$ 与二阶矩

的关系，必须做这种分解。于是，我们只考虑电子注与一倾斜注入的平面波相互作用即可。

如图 1 所示，假设波传播方向与电子运动方向夹角为 θ ，由 (7) 式及 (9) 式得

$$\begin{aligned}
 \langle (\gamma_f - \gamma_i)^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{e}{m_0 c^2} \int_0^L dz \frac{\beta^0}{\beta_{11}^0} E_0 \sin\theta \right. \\
 &\quad \left. \cdot \cos(kz - \omega t + \varphi) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{eE_0}{m_0 c^2} \sin\theta \right)^2 \left\{ \left[\int_0^L dz \frac{\beta^0}{\beta_{11}^0} \cos(\omega t - kz) \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left[\int_0^L dz \frac{\beta^0}{\beta_{11}^0} \sin(kz - \omega t) \right]^2 \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

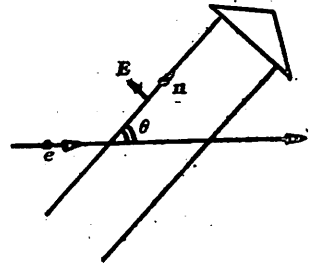


图 1 电子注与一倾斜注入的平面电磁波相互作用

这时的自发辐射谱仍如(11)式所示^[1,9,11], 对图1中所示模型计算, 得

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(\omega)}{d\Omega} &= \frac{1}{T} \cdot \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_0^L dz \frac{\beta^0}{\beta_{11}^0} \sin\theta \exp[i(\omega t - kz)] \right|^2 \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \sin^2\theta \left\{ \left[\int_0^L dz \frac{\beta^0}{\beta_{11}^0} \cos(kz - \omega t) \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left[\int_0^L dz \frac{\beta^0}{\beta_{11}^0} \sin(kz - \omega t) \right]^2 \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$

比较(13)与(14)式, 可见(1)式成立。注意这时式中 E_0 为波导中沿 n 方向传播的频率为 ω 的平面波分量的幅值。

3) 渡越辐射型

渡越辐射自由电子激光可以看做是一种纵向泵场型的, 但由于其自发辐射谱非常复杂, 另外单独分析。这个问题的分析结果另发表^[12], 为完整起见, 将结果给出如下:

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \sin^2\left(\frac{l_2}{l_1}\right) \left(\frac{\sin^2 MX}{\sin^2 X} \right) \frac{1}{T} \cdot \frac{m^2 c^3}{E_0^2} Z_i^2 \cdot \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \langle (\gamma_f - \gamma_i)^2 \rangle \quad (15)$$

式中 l_1 与 l_2 分别是两种介质的厚度, M 为介质对的数目, Z_i 为介质的形成长度, $X = \frac{l_1}{Z_1} + \frac{l_2}{Z_2}$ 。

对比(15)式与(1)式可见, 二者有许多共同的特点, 但(15)式远为复杂。

定理第二部分的推广证明

Madey定理的第二部分(2)式已在较普遍的情况下用分析力学的方法加以证明。由于Madey原始的推导物理意义比较鲜明, 我们这里指出文献[1]的推导也适用于其它几种类型的自由电子激光。

假设电子注没有偏离轴运动的速度分量以及泵场是中心对称或反对称的(对常数wiggler场这是满足的), 我们不必考虑泵场的具体构形即可按文献[1]方法从(7)、(8)及(9)式推出

$$\langle \gamma_f - \gamma_i \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\gamma_i} \langle (\gamma_f - \gamma_i)^2 \rangle + \Delta \quad (16)$$

而 $\Delta = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{e}{m_0 c^2} \operatorname{Re} \int_0^L dz \left[\exp i(kz - \omega t^0 + \varphi) \cdot \frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{\beta^0}{\beta_{11}^0} \right) \cdot E_0 \right. \right.$

$$\left. \cdot \frac{e}{m_0 c^2} \operatorname{Re} \int_0^z dz' \frac{\beta_z^0}{\beta_{11}^0} \cdot E_0 \exp i(kz' - \omega t^0 + \varphi) \right\} \quad (17)$$

以下对不同构形泵场证明(16)式中 Δ 可以略去。

1) 横向泵场型:

对线极化周期静磁场, 其稳态运动为^[13]

$$\beta_{11}^0 = \sqrt{1 - \frac{a_1}{\gamma_i^2}}, \quad \beta_z^0 = \frac{b_1}{\gamma_i}. \quad \text{这里 } a_1 = 1 + \left(\frac{eB_{0\perp}}{m_0 c^2 k_0} \sin k_0 z \right)^2, \quad b_1 = \frac{eB_{0\perp}}{m_0 c^2 k_0} \cdot \sin k_0 z, \quad \text{均与 } \gamma_i \text{ 无关, 对 } \gamma_i \text{ 求微分时可做常数处理.}$$

$$\frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{\beta_z^0}{\beta_{11}^0} \right) = \frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{b_1}{\sqrt{\gamma_i^2 - a_1}} \right) = - \frac{b_1}{(\gamma_i^2 - a_1)^{3/2}} \gamma_i = - \frac{1}{\gamma_i} \cdot \frac{\beta_z^0}{\beta_{11}^0} \quad (18)$$

式中用了高能电子注 $\gamma_i \gg 1$ 的条件。

将(18)代入(17), 可以推出^[11]

$$\Delta = - \frac{1}{2\gamma_i} \langle (\gamma_i - \gamma_i)^2 \rangle \quad (19)$$

这是一个小量^[11], 可以在(16)式中略去。

对横向静电致辐射自由电子激光器, 其泵场可设为

$$E = E_{p0} \sin k_0 z$$

用 Lorentz 方程很容易求得电子在上泵场中的稳态运动是: $\beta_{11}^0 = \sqrt{\frac{\gamma_i^2 - 1}{\gamma_i^2 + a_2}}$,

$$\beta_z^0 = \sqrt{\frac{a_2}{\gamma_i^2 + a_2}} \quad \text{式中 } a_2 = \left(\frac{eE_{p0}}{m_0 K_0 c} \right)^2 (1 - \cos K_0 z)^2, \quad \text{与前相似, 可以导出}$$

$$\frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{\beta_z^0}{\beta_{11}^0} \right) = - \frac{1}{\gamma_i} \frac{\beta_z^0}{\beta_{11}^0} \quad (20)$$

将(20)代入(17)同样可得到(19)式, 说明对静电横向泵场, Δ 可以略去。

2) 纵向泵场型:

对纵向泵场自由电子激光, 电子与电场的纵向分量相耦合而交换能量。这时(17)式中 $\beta^0 \cdot E_0$ 即是 $\beta_{11}^0 E_{0z}$, 故

$$\frac{d}{d\gamma_i} \left(\frac{\beta_{11}^0}{\beta_{11}^0} \right) = 0 \quad (21)$$

从而

$$\Delta = 0 \quad (22)$$

这样(16)式即成为(2)式。

4 结语

从本文第二、三节分析的结果可见, Madey定理(1)、(2)两式不仅对线极化及圆极化静磁泵场自由电子激光成立, 而且对纵向及横向静电泵场自由电子激光, Cerenkov自由电子激光也是成立的, 这就推广了 Madey 定理的应用范围, 为应用 Madey 定理于其它几种泵场的自由电子激光提供了基础。对于渡越辐射自由电子激光, (2)式成立, 但要用(15)式代替(1)式。这个变化是由于渡越辐射的自发辐射谱较具有加速度的电荷的辐射谱及 Cerenkov 辐射谱远为复杂。

参 考 文 献

- [1] Madey, J. M. J., *Nuovo Cimento*, 50B (1979), 64.
- [2] Grover, L. K. and Pantell, R. H., *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-21 (1985), 944.
- [3] Sun Yan, *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-27 (1987), 1642.
- [4] Deacon, D. A. G. and Xie, M., *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-21 (1985), 939.
- [5] Kroll, N. M. et al., *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-17 (1981), 1436.
- [6] Krinsky, S. et al., *J. Appl. Phys.*, 53 (1982), 5453.
- [7] Luchini, P. and Solimeno, S., *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-21 (1985), 952.
- [8] Deacon, D. A. G., et al., *Opt. Commun.*, 40 (1982), 373.
- [9] J. D. 杰克逊著, 朱培豫译, 经典电动力学, 下册, 高等教育出版社, 1980年, 244页.
- [10] Piestrup, M. A. and Finman, P. F., *SPIE*, 453 (1984), 384.
- [11] 尤峻汉, 天体物理中的辐射机制, 科学出版社, 1983年, 340页.
- [12] 刘盛纲、孙雁, 将在物理学报1988.9发表.
- [13] 刘盛纲, 相对论电子学, 科学出版社, 1987年, 413页.

The Extension of Madey Theorem to Various Types of Free Electron Lasers

Sun Yan

(University of science and Technology of China)

Jiang Huabei Liu Shenggang

(Chengdu Institute of Radio Engineering)

Abstract

The two parts of Madey theorem were derived originally from magneto-static wiggler free electron lasers (FELs). In this paper, this theorem is studied in the case of several other types of FELs. The results show that, except transition radiation FELs, the first part of Madey theorem is tenable for the other types of FELs. As the extension of the second part has already been achieved, the Madey theorem is thus extended completely.

Key words: free electron lasers, Madey theorem.

固体参比电极的研究

赵叔晞 胡宁

(中国科技大学)

赵剑曦 王敬农

(福建农学院) (江汉测井研究所)

摘 要

研究了压片烧结的固体隔膜的制备和特性,并用此制备了无明显液流的 Ag/AgCl 固体参比电极。讨论了电极在部分溶液的电化学行为、原料、制备工艺对电极性能的影响,还提出了进一步改善电极性能的途径。

关键词: 固体参比电极, 固体隔膜, 均匀混合。

1 引言

测量电极电位时常常使用甘汞电极或银—氯化银电极作为参比电极。测量时,由于电极内参比液和被研究体系溶液的组成不同,因而形成液接电势。液接电势的大小与构成液接界面的两种溶液性质密切相关,并受多种其他条件的影响,至今尚无法精确测量和计算^[1]。基于过去对简单氯化物液接电位的研究,商品参比电极多以不同浓度的 KCl 溶液为内参比液,并经多孔烧结陶瓷或多孔烧结玻璃与待测液相接。

但是,如果在土壤和石油测井的电化学测量时用上述结构的参比电极,由于介质是泥浆,则会出现一些新的待解决的问题,例如:

(1) 测量电极和泥浆接触,因而可能堵塞多孔陶瓷并吸附于孔隙内壁,这些带电胶粒的影响,使对测量结果的解释更加复杂;

(2) 测井时,由于地层深处压力可高达上百个大气压,内参比液必须加上特殊的压力平衡装置才能工作,电极结构复杂。

为克服上述困难,国外有人研制全固体参比电极^[2],用粉末将 Ag/AgCl 压入片内烧结,工作时电极内无需溶液。参照文献 [2],我们对固体隔膜和固体参比电极的制造工

艺、电化学性能进行了初步研究, 本文报道上述研究的一些结果, 并对有关的问题进行了初步的讨论。

2 实验

2.1 样品混合

制备隔膜主要原料为聚四氟乙烯 (PTFE)、三氧化二铝粉末、氯化钾粉末。粉末粒度的大小及混合均匀与否是决定电极性能的关键问题。由于进一步细化的困难, 研究中粒度的大小主要取决于原料来源。为了尽量混合均匀, 采取下述步骤: 先称取比例量的 Al_2O_3 和 KCl , 在研钵中研匀后加入少量水使 KCl 溶解, 放入烘箱中烘干。这时 KCl 结晶于 Al_2O_3 粉末上。再加入比例量的 PTFE 和适量的非水溶剂, 用磁力搅拌器使之混匀, 随后烘去浆状体的非水溶剂, 留下混合均匀的粉末样品以备压片。

2.2 隔膜制备

将上述样品放入模具中, 以 $2.45 \times 10^7 \text{Nm}^{-2}$ (250kgcm^{-2}) 的压力将粉末压成厚度约 $1 \sim 1.5 \text{mm}$ 的薄片, 并维持压力 15min 以上。将制得的薄片放入管式炉中, 在 360°C 下烧结 1hr , 取出后缓慢冷却, 即为所需要的隔膜。

2.3 固体参比电极的制作

取 0.5mm 直径的纯银丝 $6 \sim 7 \text{cm}$, 用电解法在 HCl 溶液中使银丝表面生成一层薄薄的氯化银, 将之制成 Ag/AgCl 电极^[3]。按 2.1 方法制备 9:9:2 的 PTFE、 Al_2O_3 及 KCl 混合粉末, 取出适量放入模具底层, 轻轻压实。上面再放入同样方法混合的 7:7:6 的混合粉末。将盘成盘状的 Ag/AgCl 电极放入其中, 同样以 $2.45 \times 10^7 \text{Nm}^{-2}$ 压力使之成型。取出后, 在 360°C 下焙烧 1hr , 冷却后取出。压片时, 注意在不同比例的粉末之间形成一个过渡区, 否则易在此处产生裂缝而使整个电极报废。烧结好的电极引出引线, 除隔膜面以外, 四周用环氧树脂封好待用。

2.4 电位的测量

电位测量包括固体隔膜两侧的液接电位和多孔陶瓷隔膜的电位差及固体参比电极和市售甘汞电极的电位差值。对前者进行测量时, 需要将上述隔膜用硅橡胶封入玻璃管中, 管内加入饱和氯化钾溶液作内参比液。选取两支电极电位相同的饱和甘汞电极, 将其中一支内芯取出, 插入带有固体隔膜的玻璃管中, 并与另一支市售甘汞电极构成电池。用对消法测量两者之间的电位差 ΔE , 如图 1 所示。两者电动势差值愈小, 则固体隔膜和多孔陶瓷隔膜性能愈接近。电动势测量用 UJ25 型高电势直流电位差计, 仪器灵敏度为 $1 \mu\text{V}$, 本样品测量时, 可观测到的响应为 $100 \mu\text{V}$ 。后者测量方法与前者相同。

测量溶液分为两组: 一组为 KCl 溶液, 当量浓度为 $0.01, 0.1, 1$ 及 2N ; 另一组为 NaNO_3 溶液, 浓度同上。所有测量都在室温下进行。

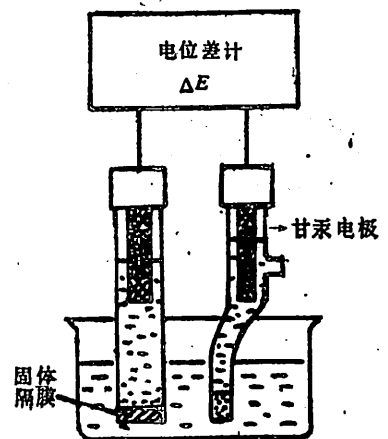


图 1 测量原理图

3 结果和讨论

3.1 隔膜材料组成和 ΔE 的关系

隔膜是固体参比电极的一个关键部分, 3.1~3.4 先讨论影响隔膜性能的各种因素。

组成固体隔膜的两种主要骨架材料为聚四氟乙烯和三氧化二铝, 用以形成网状结构, 以束缚导电组分 KCl。聚四氟乙烯能使隔膜强度增加, 但含量过多, 电极表面亲水性能变差, 不利于水溶液中电位测量。三氧化二铝为亲水性材料, 通过调节两者的比例, 可以改变隔膜表面及内部的亲水性能。选取 KCl 含量为 10% (重量百分比, 下同), 选取 PTFE 含量分别为 30%、40%、50%、60%, 余下的为 Al_2O_3 , 制备不同组成的隔膜, 如下所示:

隔膜编号	1	2	3	4	5
PTFE 含量%	30	40	45	50	60
Al_2O_3 含量%	60	50	45	40	30
KCl 含量%	10	10	10	10	10

分别测量在 KCl 溶液和 $NaNO_3$ 溶液中的 ΔE 值, 结果如表 1。

表 1 不同隔膜在不同浓度的 KCl、 $NaNO_3$ 溶液中的 ΔE 值 (mV)

隔膜编号	KCl 溶液 (N)				$NaNO_3$ 溶液 (N)			
	0.01	0.1	1	2	0.01	0.1	1	2
1	9.4	6.2	2.8	1.4	10.5	6.0	-1.2	-3.0
2	15.2	11.3	3.2	1.8	20	8.4	-0.1	-2.4
3	10.0	10.7	3.4	1.8	20	6.6	-1.6	-3.6
4	11.0	10.5	3.1	1.8	20	6.8	-1.5	-3.1
5	20.5	16.2	4.7	2.3	18.5	9	0.3	-1.8

表 1 结果的基本趋势和文献 [3] 相同, 但 ΔE 普遍大于文献值。溶液为 0.1N 的 $NaNO_3$ 的 ΔE ~组成曲线有一定的代表性, 如图 2 所示。结果表明, 以 45% PTFE 组成为中心, PTFE 含量增加时, 电势差增大; PTFE 含量减小时, ΔE 先变大后变小。PTFE 和 Al_2O_3 的比例约为 1:1 时, ΔE 具有极小值, 且隔膜具有比较稳定的性质。表 1 其余 7 组数据在上

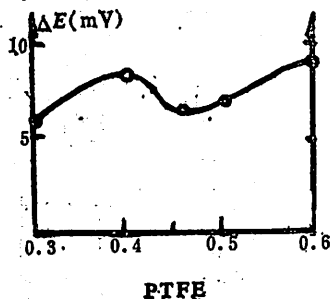


图 2 ΔE ~组成曲线

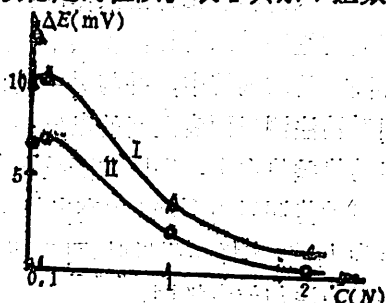


图 3 KCl 粒度大小的影响

述组成时, ΔE 值大都在曲线的极小点上, 在随后的讨论中, 隔膜都以此比例制成。

3.2 溶液组成的影响

测井时接触到的溶液，多为浓度较小的盐溶液。表 1 的结果表明， ΔE 值随浓度 C 的增加而减小，稀溶液时有较大的偏差。3° 电极在 KCl 溶液中测到的 $\Delta E \sim C$ 曲线如图 3 的 I 所示。

3.3 组分粒度大小对隔膜特性的影响

对于制备的隔膜，希望 ΔE 随 C 变化小，且数值在 0mV 左右。实验中隔膜 ΔE 比文献值偏高，可能是我们采用的主要原料粒度大且分布不均，混合过程分散也不均匀所致。为此，我们对 KCl 的处理方法的结果进行了比较。图 3 曲线 I 是三种组分未经再结晶处理，直接在有机液体中研磨所得隔膜的特性曲线；曲线 II 是按 2.1 的方法先将 KCl 进行再结晶的结果。多次实验结果均表明，KCl 以 Al_2O_3 为核再结晶后，分散得更好，测得曲线 II 的 ΔE 值低于曲线 I 的 ΔE 值。

3.4 隔膜厚度的影响

按 3° 隔膜的组成，压成厚度不同的隔膜，按上述条件烧结，测量 ΔE 值的结果表明，在同一溶液中， ΔE 值随厚度的增加而略有增加。如厚度从 1.05mm 增加到 2.25mm 时，0.1N KCl 溶液的 ΔE 仅增加 0.8mV，2N 时几乎不变。所以对隔膜厚度的控制并不是关键问题。

3.5 KCl 含量的影响

隔膜中 KCl 含量的影响，可见于表 2。

表 2 KCl 含量不同的隔膜的 ΔE 值 (mV)

含量	KCl 溶液 (N)				NaNO ₃ 溶液 (N)			
	0.01	0.1	1	2	0.01	0.1	1	2
5.3%	11.7	11.8	4.0	1.6	22.7	9.0	-1.1	-2.9
10.0%	11.5	10.1	3.4	1.4	19.1	8.1	-0.8	-2.6
14.3%	9.7	8.8	3.1	1.2	16.2	7.7	-0.5	-2.2
19.0%	10.8	8.1	2.6	1.0	16.2	7.3	-0.5	-2.2

结果表明，在同一组溶液中，电势差 ΔE 值随 KCl 含量的增加而变小。约在几毫伏到零点几毫伏之间。KCl 含量增高，虽有利于降低 ΔE 值，但影响隔膜在水溶液中的稳定性，本实验中均取 10%。

3.6 固体参比电极的电极电位值及氯离子活度

固体参比电极在使用前需要在水中浸泡令其活化。活化后在 0.1N 的 KCl 溶液中测量其相对于饱和甘汞电极的电极电位值。所制备的不同电极，其电位数值不一，有一定的离散性，说明制备工艺有进一步改进的必要。在 25°C 条件下，固体参比电极的典型电位数值在 $-31 \pm 3mV$ 。相应条件下，固体隔膜和多孔陶瓷隔膜的电位差约 +10mV。由此可以近似计算固体参比电极内部 Ag/AgCl 附近 Cl^- 的活度 a_{Cl^-} 。

令 $\varphi_1^0(T)$ 代表饱和甘汞电极电位； $\varphi_2^0(T)$ 为银-氯化银标准电极电位； ΔE 为固体电极与饱和甘汞电极的电位差， ΔE_1 为两者隔膜电位差，根据 Nernst 公式有

$$\Delta E = \varphi_2^0(T) - \frac{RT}{F} \ln a_{Cl^-} + \Delta E_1 - \varphi_1^0(T)$$

代入相应的数值，可算得室温时，Ag/AgCl 附近氯离子的活度约为 2，该数值的含义

下面将进一步讨论。

3.7 室温下电极的稳定性

室温下将电极浸泡活化后，在 0.1N KCl 溶液中进行稳定性实验。前 36hr 之内，电极电位绝对值上升小于 0.2mV/h，随后四天内，电势上升小于 0.05mV/h。由于电位差计测量的是单一方向数值，电位差绝对值增加意味着固体参比电极电位向负向移动，说明固体电极内部氯离子的活度随时间的变化而略有增加，但在室温下变化很小，即常温下电极电位是比较稳定的。

3.8 变温时电极的稳定性

由于不同地层深处的温度不同，因而要求用于电法测井的电极能适应一定范围内的温度变化，并具有相应的温度稳定性。为此，对固体参比电极进行了温度改变时的稳定性实验研究。两组电极电势随温度变化的测试结果如下：

温度 (°C)	30	40	50	60	70
$\varphi_1^0(t)$ (mV)	241.0	234.2	227.1	219.8	212.3
$\varphi_2^0(t)$ (mV)	219.0	212.1	204.5	196.5	187.8
第一次升温的 ΔE (mV)	38.7	42.5	47.1	52.4	
相应的 a_{Cl^-}	1.9	2.1	2.4	2.8	
第二次升温的 ΔE (mV)		38.6	41.9	47.8	53.0
相应的 a_{Cl^-}		1.8	2.0	2.3	2.6

注：计算氯离子活度时，略去了 ΔE_1 。

结果表明氯离子活度随温度升高而增大。冷却后再升温时，氯离子活度变化趋势相同，但均比前一次循环的同温度下的活度值小。结果也说明电极内部结构经加热后再冷却到原先的温度时，不能完全复原。一些电极在几次温度循环之后，结构被破坏， ΔE 值变得很大。因此，上述方法制备的固体参比电极的温度稳定性需要进一步研究改进。

3.9 对一些问题的讨论

3.9.1 水在电极中的作用

如何理解 G.P. Bound 称之为“固体”电极？虽然在电极制备过程中全部采用固态原料并经烧结，但一些现象表明水在电极工作中仍然起着不可缺少的作用。

首先，电极必须经过水的浸泡活化才能工作，活化中水完全可以通过电极隔膜的结构孔道进入电极内部。这可以由隔膜实验中观察到的晶须加以证明。若将图 1 中带隔膜的玻璃管悬挂在支架上，经过约 24hr，可以看到隔膜下部非水一方有白色胡须状晶体析出，经由 $AgNO_3$ 滴定知是 KCl。这说明，隔膜中存在微孔道，换言之上述电极具有多孔性质。

其次， $Ag/AgCl$ 周围 KCl 若为固体相，则其活度应为 1。根据测量的电极电位值估算的氯离子活度大于 1。这可能暗示我们，电极内部由聚四氟乙烯和三氧化二铝构成的微孔含有微量的束缚水，和 KCl 组成特殊的溶液构成固体电极的内参比液，从而使 $Ag/AgCl$ 活化。由于水含量很少且被束缚，不能形成液流，因而有利于电极的稳定。由此也可以理解，为什么在室温寿命实验中，氯离子活度随时间略有增加，而随温度的增加而增加较快。同时，烘干保存的电极比浸泡在水中的电极具有更好的稳定性也间接支持了上述论点。

3.9.2 关于原料粒度大小的影响

若电极的工作确与水的存在有关,那么单从几何角度考虑,原料粒度的大小对电极性能及稳定性将产生重要作用。粒度较大的 Al_2O_3 ,在密堆积的情况下孔隙也较大(本实验 Al_2O_3 粒度平均直径约在 $80\mu m$),实验表明单靠PTFE的憎水性也不足以防止KCl析出。

另一方面,也可以理解原料混合均匀的重要。若 Al_2O_3 被一层憎水材料均匀覆盖,则相同孔径时渗水性将减小。由此看来,利用粒度小的 Al_2O_3 ,将KCl再结晶,并用聚四氟乙烯乳液混合,是提高电极质量的一个重要途径。

3.9.3 关于提高温度稳定性的探讨

至于温度的稳定性,应和烧结后材料结构的稳定性有关。由于聚四氟乙烯的烧结温度不能高于 $380^\circ C$ ^[4],在此温度不能对 Al_2O_3 产生键合作用,因而支持活性组分KCl的框架结构主要依靠PTFE, Al_2O_3 可能仍具有较大的游离性。曾用添加其它组分方法来改善其性能,但结果均不太理想,因此这方面问起需要进一步研究改进。

综上所述,可以用PTFE和 Al_2O_3 为骨架材料,KCl为活性组分,制成无明显液流的Ag/AgCl固体参比电极,该电极仍须在水的活化下才能工作。材料粒度大小和混合均匀与否是影响电极质量的重要因素。对温度变化的稳定性需要进一步研究解决。

参 考 文 献

- [1] 周伟筋,电化学测量,上海科技出版社,1985年,186.
- [2] Bound,G.P.et al, *J. Sci. Fd. Agric.*, 28 (1977),431.
- [3] 于天仁等,电化学方法及其在土研究中的应用,科学出版社,1984年,118.
- [4] 林尚安等,高分子化学,科学出版社,1987年,782.

Study on Solid State Reference Electrode

Zhao Shuxi

Hu Ning

(University of Science and Technology of China)

Zhao Jianxi

Wang Jingnong

(Institute of Agriculture,Fujian)

(Jiangnan Logging Institute)

Abstract

A pressed pellet liquid junction membrane has been studied to develop a solid state reference electrode which has no solution flow, providing a tool for induced polarization logging. Some electrochemical characters of these

electrodes are discussed in this paper. Experimental results show that the degree of fine powder of raw material and homogeneous mixture is the key to the improvement of electrode qualities.

Key words: solid state reference of electrode, solid membrane, homogeneous mixture.

Improvement of Blood Compatibility of Polyurethane Elastomer by Radiation Graft Copolymerization of 2-Hydroxyethyl Methacrylate in Polymer Matrix

Li Ximing Chen Wenming Yuan Zhijian Li Song Lu Mei

(Department of Applied Chemistry)

Abstract

The γ -radiation induced grafting of 2-hydroxyethyl methacrylate (HEMA) onto polyurethane-elastomers (PUE) tube by preswelling technique to prepare biomedical materials with blood compatibility is studied. The graft yield can be controlled by regulating the preswelling time and temperature, or by change the irradiation dose and dose rate. After antithrombogenic test in vitro it has been confirmed that the blood compatibility of original polyurethane tube has been considerably improved by grafting.

Key words: graft, radiation, blood compatibility, preswelling.

Introduction

Both blood compatibility and appropriate mechanical property are indispensable to materials for artificial organs. One of the methods to yield good biocompatibility of material is radiation-induced graft of hydrophilic monomer onto suitable trunk polymers with good mechanical property.^[1-3]

Radiation graft of PUE with HEMA in swollen state was reported by B.Jansen et al.^[4] However, no attention had been paid to the blood compatibility of those modified PUE. In this paper, preswelling technique was applied

Received Oct.,8, 1987

for radiation induced graft copolymerization. Graft yields on the surface layer of PUE could be regulated easily by varying preswelling conditions. The blood compatibility of the modified PUE evaluated by antithrombogenic test in vitro was remarkably improved.

The Experiment

Commercially available tubular polyurethane elastomer (T-885, Takada Chemical Industries, LTD) was used as trunk polymer. It was swollen with 2-hydroxyethyl methacrylate monomer (extra pure reagent, stabilized with hydroquinone monomethyl ether, Nakarai Chemicals, LTD) in bulk to obtain preswollen PUE with different monomer penetration depths by controlling swelling temperature and swelling time.

Samples were then slightly pressed with filter paper to remove the monomer on the surface before irradiation and were then put into glass tubes. The system was deoxygenated by nitrogen. Irradiation was performed at room temperature using a ^{60}Co γ source. After irradiation the samples were treated with ethanol in order to extract residual monomer and homopolymer from the PUE. The graft yield and swelling degree were defined by the following equations:

$$Y = [(W_s - W_o) / W_o] \times 100\%$$
$$D_s = [(W_s - W_o) / W_o] \times 100\%$$

where W_s , W_s , W_o are the weight of modified, swollen and original PUE respectively.

Antithrombogenic tests in vitro were performed by counting the adhered platelets from the blood of the same rabbit. Three pieces were taken from the original and modified polyurethane elastomers respectively. The pieces were fixed on a cover glass by adhesive with their surfaces up. The cover glass was placed in a petridish and kept at 37°C for 15 min. The blood of the rabbit was drawn with a glass syringe and poured into the dish quickly. All the samples were immersed in the blood for 3 min at 37°C. After addition of saline solution to stop the reaction, the cover glass was taken out and immersed in the 2.5% glutaraldehyde for 10 min at room temperature, then dehydrated with 30%, 50%, 70%, 100% ethanol. The samples were further dehydrated with absolute ether and dried by freeze-thawing method. The samples thus obtained were coated with gold and observed with SEM. The photographs of different surface area of the same sample were taken and six graphs of the three samples were used to count the platelets adhered. The average values of the number of the adhered platelets were obtained from the six

graphs. The antithrombogenicity of silicone and glass was also evaluated in the same way, and compared with the modified PUE.

Results and Discussions

The tubular polyurethane was swollen by HEMA monomer. The swelling degree of PUE in HEMA (D_s) increased with swelling time (t) and reached an equilibrium value (Fig. 1). From $\log D_s - \log t$ plot their relationship can be expressed by the equation $D_s = kt^{0.6}$. The k values in the equation were obtained from the swelling curves under different temperatures. From these data the activation enthalpy was calculated as 30 kJ.mol^{-1} for HEMA diffusion in PUE matrix (Fig. 2).

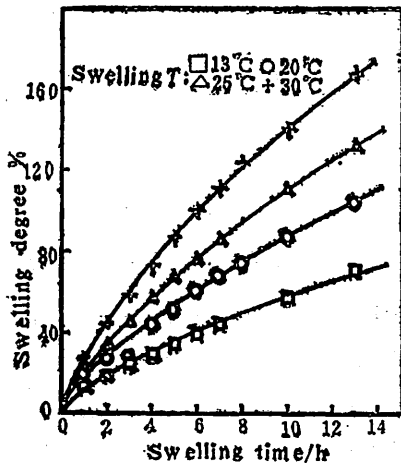


Fig.1 Swelling degree vs. swelling time

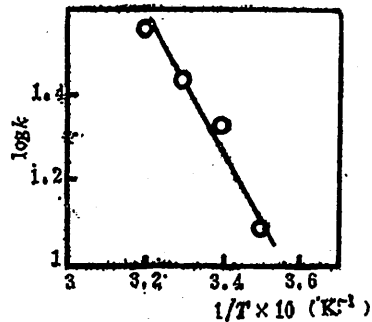


Fig.2 $\log k$ vs. $1/T$

Graft copolymerization curves for the grafting of HEMA to PUE were typical. The graft yield in PUE matrix increases with the irradiation dose and finally reaches saturation (Fig.3). It can be explained by the presence of certain amount of HEMA monomer contained in polymer matrix at fixed condition. The graft yield also increases with the swelling degree. At constant irradiation dose (550Gy) it can be expressed as a function of swelling degree $Y = 0.75 D_s$ (Fig.4). It is shown that by selecting appropriate swelling conditions the graft copolymerization can be achieved not only on the surface layer but also throughout the polymer matrix uniformly. Graft reaction can be controlled easily by this swelling technique.

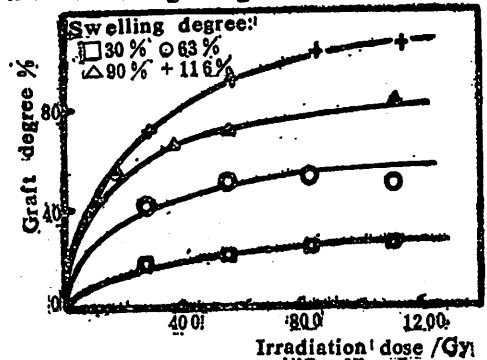


Fig.3 Graft degree vs irradiation dose

Hydrophilicity of the grafted PUE

was evaluated by the determination of the swelling degree of PUE in water. Remarkable improvement of the hydrophilicity of the grafted PUE was obtained (Fig.5) .

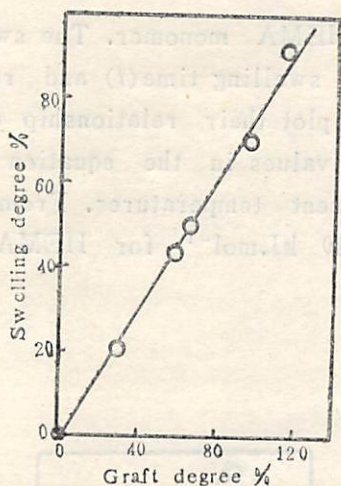


Fig.4 Graft degree vs swelling degree

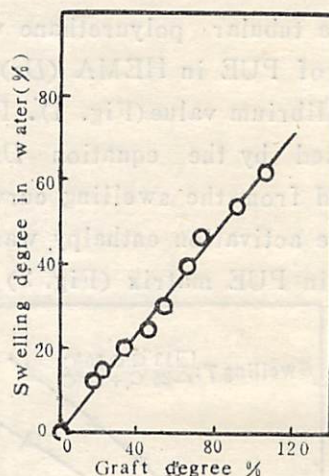


Fig.5 The swelling degree of grafted PUE in water

The antithrombogenicity of the modified PUE was compared with the original PUE, glass and silicone (Fig.6). It has been confirmed that blood compatibility of the grafted PUE is superior to the original PUE, silicone and glass. The antithrombogenicity of PUE has been proved to be excellent by counting adhered platelets (Table 1). This may be resulted from better hydrophilicity of the grafted PUE.

Table 1. Number of adhered platelets

Grafting degree	Number of adhered platelets						average value
	1	2	3	4	5	6	
16.2	0	1	0	0	0	1	0
14.2	7	6	12	17	1	11	9
16.6	12	18	1	3	13	5	9
16.9	8	11	2	22	7	10	10

A detailed study on the structure and property of PUE surface layer and the relationship between hydrophilicity and blood compatibility will be reported in subsequent papers.

The authors would like to gratefully acknowledge the generous support and kind help of Professor Y. Tabata and Dr.K.Otsuhata (Faculty of Eng-

ineering, Tokyo University, Japan), and would also like to thank Professor T. Kagiya (Faculty of Engineering, Kyoto University, Japan), Dr. Xu Li and Ms. Yuan Ji (University of Science and Technology of China) for their kind help.



Fig. 6 The SEM photographs of different materials adhered with platelets
(a) glass (b) silicone
(c) original PUE (d) grafted PUE

References

- [1] Sasak, T. et al., *Am. Chem. Soc. Polym. Prepr.*, 16 (1975), 435—440.
- [2] Hoffman, A.S. et al., *Am. Chem. Soc. Polym. Prepr.*, 13 (1972), 723.
- [3] Otsuhata, K. et al., 5th International Meeting on Radiation Processing (U.S.A 1984).
- [4] Jansen, B., & Ellinghorst, G., *J. Polym. Sci: Polym. Symposium*, 66 (1979), 465—473.

利用辐射接枝技术改善聚氨酯的血液相溶性

李希明 陈文明 袁致俭 黎松 陆梅

(应用化学系)

摘 要

为改善材料的生物相溶性,将亲水性单体甲基丙烯酸 β -羟乙酯辐射接枝到聚氨酯管材上。将聚氨酯在单体中预溶胀然后辐照,通过控制聚氨酯在单体中的溶胀度和照射剂量调节接枝层的深度和接枝率。接枝聚氨酯的亲水性随接枝率的增大明显改善。抗血栓试验表明与未接枝聚氨酯和医用硅橡胶比较,接枝聚氨酯有良好的血液相溶性。

关键词: 接枝, 辐射, 血液相溶性, 预溶胀。

标准映象分歧行为的解析计算

汪秉宏

(近代物理系)

摘 要

对标准映象周期1至周期4轨道的切分歧点,同周期分歧点及倍周期分歧点进行了解析计算,给出标准映象各周期轨道的无穷多稳定性窗口的解析表达式,并对标准映象周期运动的分歧行为提供一个完整的图象。

关键词: 标准映象, 切分歧, 倍周期分歧, 同周期分歧, 稳定性窗口。

1 引言

二维保面积映象作为两个耦合非线性振子运动的抽象表示,是一个最简单的、可以有混沌解的确定性保守力学体系,近年来引起了人们极大的研究兴趣^[1-6]。已经知道,这种体系的KAM轨道的破裂意味着相空间中混沌区的扩大,其破裂与邻近周期轨道的失稳和分歧行为有关^[2,6]。因此,计算二维保面积映象中周期轨道的稳定性转变及分歧行为是研究哈密顿体系中有序与混沌转变的基本方法。

Chirikov^[1]所引入的标准映象

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n \quad (1)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}$$

是一个典型的二维保面积映象。随着可变参数 K 的增长,各阶周期轨道将通过切分歧、倍周期分歧和同周期分歧而发生稳定性转变。

关于同周期分歧的现象和分析方法,首先在[7]中作了论述。标准映象的同周期分歧现象对于除周期1轨道之外的所有周期轨道是普遍存在的,而且随着 K 的增长将反复无穷次地出现,然而又不呈现简单的周期性。采用映射迭代的数值方法,只能给出初始的分歧行为(K 较小)^[8]。对于强的不可积扰动(K 较大),由于周期轨道的稳定性窗口变得很窄,纯粹用数值方法分析其分歧行为和计算各个分歧点是非常困难的。

在本文中,我们将采用[7]中给出的方法导出标准映象的周期 $Q=1, 2, 3, 4$ 轨道的全部分歧点的 K 值的解析表达式,包括切分歧点、倍周期分歧点和同周期分歧点。这个方法的基本思想是计算线性 Jacobi 矩阵的迹: $\text{Tr}M_0|_{K=K_c}$ 及其导数 $\frac{d\text{Tr}M_0}{dK}|_{K_c}$,

$\frac{d^2\text{Tr}M_0}{dK^2}|_{K_c}$, 其中 $M_0 = \frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(x_0, y_0)}$ 以确定分歧的类型。

对于更高周期的周期轨道可以进行类似的讨论。本文中所用的解析方法可以给出标准映象的周期轨道的全部稳定性窗口并对周期运动的分歧行为提供一个完整的图象。

2 周期 1 轨道

对于标准映象,周期 Q 轨道应当包括转动数为 P/Q 、加速模数为 N (其中 Q 为自然数, P 及 N 为整数) 的所有轨道:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 + P \\ y_0 &= y_0 + N \end{aligned} \quad (2)$$

周期 1 轨道的一般形式是

$$\begin{pmatrix} x \\ P-N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+P \\ P \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中 x 满足

$$\frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = N$$

在本文中,我们限定初始点 x 于间隔 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 之中。对于轨道 (3), 我们有

$$\text{Tr}M_1 = 2 + K \cos(2\pi x) = 2 \pm \sqrt{K^2 - (2\pi N)^2} \quad (4)$$

因而,周期 1 轨道的稳定性窗口是 $|\text{Tr}M_1| < 2$, 亦即

$$K_N^{(0)} \leq K \leq K_N^{(1)} \quad (5)$$

其中 $K_N^{(0)} = 2\pi|N|$ 及 $K_N^{(1)} = \sqrt{(2\pi N)^2 + 4^2}$ 。

当 $K = K_N^{(0)}$ ($N = 1, 2, \dots$) 有 $\text{Tr}M_1 = 2$ 及 $\left| \lim_{K \rightarrow K_N^{(0)+0} \frac{d\text{Tr}M_1}{dK} \right| \rightarrow \infty$, 因而 $K_N^{(0)}$ 是

轨道 (3) 的切分歧诞生点。当 $K = K_N^{(1)}$ ($N = 0, 1, 2, \dots$), 因为 $\text{Tr}M_1 = -2$ 及 $\frac{d\text{Tr}M_1}{dK} < 0$, 因而是轨道 (3) 的倍周期分歧失稳点。通常所讨论的间隔 $0 \leq K \leq 4$ 只是非加速模 ($N = 0$) 的周期 1 轨道的稳定性窗口。周期 1 轨道不存在同周期分歧。

3 周期 2 轨道

一般的周期 2 轨道是

$$\begin{pmatrix} x \\ x - \bar{x} + P - N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} - x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+P \\ x - \bar{x} + P \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中 x 及 \bar{x} 满足

$$\bar{x} = x + \frac{K}{4\pi} \sin(2\pi x) + \frac{P-N}{2} \quad (7)$$

$$x = \bar{x} + \frac{K}{4\pi} \sin(2\pi \bar{x}) - \frac{P}{2}$$

它的线性 Jacobi 矩阵的迹是

$$\text{Tr}M_2 = 2 + 2K(C + \bar{C}) + K^2 C \bar{C} \quad (8)$$

其中 $C = \cos(2\pi x)$ 及 $\bar{C} = \cos(2\pi \bar{x})$ 。

对于任何整数 P 、 N 及所给参数 K ，我们可以通过 (7) 与 (8) 式来确定所有模式周期 2 轨道的稳定性及分歧行为。

对于非加速模 $N = 0$ ，可以作进一步的解析讨论。这个条件导致

$$\sin(2\pi x) + \sin(2\pi \bar{x}) = 0 \quad (9)$$

因而 x 与 \bar{x} 的关系只可能是 $\bar{x} = k - x$ ，或者 $\bar{x} = k + \frac{1}{2} + x$ 。在本文中 k 代表任何整数。

第 (I) 类： $\bar{x} = k - x$ ，轨道是

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x + P - k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k - x \\ k - 2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + P \\ 2x + P - k \end{pmatrix} \quad (10)$$

其中 x 满足： $4x + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = 2k - P$ 。因为 $\bar{C} = C$ ，我们有

$$\text{Tr}M_2 = 2 + KC(KC + 4) = -2 + (KC + 2)^2$$

令 $C = -4/K$ 可以得到下列 K 值：

$$K_n^{(0)} = \sqrt{16 + \left[4 \arccos \frac{4}{K_n^{(0)}} + 2\pi(n-1) \right]^2} \quad (11)$$

在 $K_n^{(0)}$ ， $n = 2, 3, 4, \dots$ 各点，因为 $\text{Tr}M_2 = 2$ ，及 $\left| \lim_{K \rightarrow K_n^{(0)+0} } \frac{d\text{Tr}M_2}{dK} \right| \rightarrow \infty$ ，因而轨

道 (10) 将通过切分歧而诞生。但 $K_1^{(0)} = 4$ 并不是切分歧点，因为 $\lim_{K \rightarrow K_1^{(0)+0} } \frac{d\text{Tr}M_2}{dK}$ 是有

限值。实际上，周期 2 轨道 (10) 在 $K = K_1^{(0)}$ 处通过周期 1 不动点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 的倍周期分歧而诞生。

令 $C = 0$ 可以得到

$$K_n^{(1)} = 2n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

在这些 K 值处有 $\text{Tr}M_2 = 2$ 及 $\frac{d\text{Tr}M_2}{dK} = K > 0$ ，因而是轨道 (10) 的同周期分歧失稳点。

令 $C = -2/K$ 可以得到

$$K'_n = \sqrt{4 + \left(4 \arccos \frac{2}{K'_n} + 2n\pi \right)^2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

对于这些 K 值有 $\text{Tr}M_2 = -2$, $\frac{d\text{Tr}M_2}{dK} = 0$ 及 $\frac{d^2\text{Tr}M_2}{dM^2} = \frac{(K^2-8)^2}{2K^3} > 0$, 因而轨道 (10)

将发生倍周期分歧但并不失稳, K'_n 是稳定性边缘点。应当注意到, 在 K'_n 各点, 通过周期 2 轨道的倍周期分歧, 一个椭圆型周期 4 轨道和另一个双曲型周期 4 轨道将同时诞生, 因而虽然周期 2 轨道并不发生稳定性变化, 但 Poincaré 指数仍然保持守恒。

第 (II) 类: $\bar{x} = k + \frac{1}{2} + x$, 轨道是

$$\begin{pmatrix} x \\ P - k - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + k + \frac{1}{2} \\ k + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + P \\ P - k - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中 x 满足 $\frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = 2k + 1 - P$ 。因为 $\bar{C} = -C$, 我们有 $\text{Tr}M_2 = 2 - (KC)^2 = -2 - (KC+2)(KC-2)$ 。

令 $C=0$, 得到与 (12) 式相同的 $K_n^{(1)}$, 对于这些 K 值有 $\text{Tr}M_2 = 2$, $\lim_{K \rightarrow K_n^{(1)+0}} \frac{d\text{Tr}M_2}{dK} = -2K_n^{(1)} < 0$, 因而 $K_n^{(1)}$ 是轨道 (14) 通过轨道 (10) 的同周期分歧的诞生点。

令 $C = \pm \frac{2}{K}$, 得到

$$K_n^{(2)} = \sqrt{4 + (2\pi n)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

对于这些 K 值有 $\text{Tr}M_2 = -2$ 及 $\frac{d\text{Tr}M_2}{dK} = -2K < 0$, 因而是轨道 (14) 的倍周期分歧失稳点。

例如, 在 $K_1^{(0)} = 4$ 处, 周期 1 不动点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 通过倍周期分歧而失稳, 第 (I) 类椭圆

型周期 2 轨道 $\begin{pmatrix} x \\ 2x-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2x-1 \end{pmatrix}$, 其中 x 满足 $x + \frac{K}{8\pi} \sin(2\pi x) = \frac{1}{2}$ 得以诞生。

当 K 增大到 $K_1^{(1)} = 2\pi$, 第 (I) 类轨道变为 $\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, 并发生同周期分歧而失稳, 分岔出两个椭圆型第 (II) 类周期 2 轨道

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{2\pi}{K} \\ -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{2\pi}{K} \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{2\pi}{K} \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{2\pi}{K} \\ -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{2\pi}{K} \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{2\pi}{K} \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

上述两条轨道在 $K_1^{(1)} \leq K \leq K_1^{(2)} = \sqrt{4 + (2\pi)^2}$ 区间中是稳定的, 而在上限 $K_1^{(2)}$ 处通过倍周期分歧而失稳。

从上述解析表达式所计算的分歧点的数值见表 1。表 1 中只保留了五位小数, 但显然本文的解析表达式可以给出任意多有效数字的分歧点数值。

表 1 周期 2 轨道 ($N = 0$ 模) 的分歧点数值

n	$K_n^{(0)}$	K_n'	$K_n^{(1)}$	$K_n^{(2)}$
0			0	2
1	4	5.07312	6.28319	6.59382
2	11.88678	12.06724	12.56637	12.72453
3	18.41336	18.52514	18.84956	18.95536
4	24.80958	24.89148	25.13274	25.21219

非加速模周期 2 轨道的稳定性窗口是 $[0, 2]$ 及 $[K_n^{(0)}, K_n^{(2)}]$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。处在 $K_n^{(0)}$ 及 $K_n^{(2)}$ 之间的 $K_n^{(1)} = 2n\pi$ 则是第 (I) 类周期 2 轨道变为第 (II) 类周期 2 轨道的同周期分歧点。从上述分析可见, 随着 K 值的增加, 标准映象的周期 2 轨道的同周期分歧将发生无穷多次。虽然稳定性窗口变得越来越窄, 但所有这些同周期分歧都属于音叉形分歧类型。

4 周期 3 轨道

作类似的分析, 我们来考虑如下两类周期 3 轨道:

第 (I) 类:

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x + P - 2k - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k + \frac{1}{2} \\ k + \frac{1}{2} - x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2k + 1 - x \\ k + \frac{1}{2} - x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + P \\ 2x + P - 2k - 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中 x 满足 $3x + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = 3k + \frac{3}{2} - P$ 。周期 3 轨道的线性 Jacobi 矩阵之迹为 $\text{Tr}M = 2 - K(KC + 3)[K - 2)C + 1]$ 。

第 (II) 类:

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x + P - 2k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k \\ k - x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2k - x \\ k - x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + P \\ 2x + P - 2k \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中 x 满足 $3x + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = 3k - P$ 。在这种情况下, 有 $\text{Tr}M = 2 + K(KC + 3)[(K +$

2) C+1].

使用上述方法, 我们可以得到使 $\text{Tr}M_n = -2$ 或 2 的所有分歧点的解析表达式如下:

$$K_n^{(0)} = 0$$

$$K_n^{(1)} = \sqrt{9 + \left(3 \arccos \frac{3}{K_n^{(0)}} + 2n\pi\right)^2} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

$$K_0^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{4-3K_0^{(1)}}{K_0^{(1)}-2}\right)^2 + \left[\pi - 3 \arccos \frac{4-3K_0^{(1)}}{K_0^{(1)}(K_0^{(1)}-2)}\right]^2} = 1.51754816$$

$$K_n^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{3K_n^{(1)}-4}{K_n^{(1)}-2}\right)^2 + \left[\pi - 3 \arccos \frac{3K_n^{(1)}-4}{K_n^{(1)}(K_n^{(1)}-2)} + 2n\pi\right]^2} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

$$K_n^{(2)} = \sqrt{\left(\frac{K_n^{(2)}}{K_n^{(2)}-2}\right)^2 + \left[3 \arccos \frac{1}{K_n^{(2)}-2} + 2n\pi\right]^2} \quad (20)$$

$$K_n^{(3)} = \sqrt{1 + \left(3 \arccos \frac{1}{K_n^{(3)}} + 2n\pi\right)^2} \quad (21)$$

$$K_n^{(4)} = \sqrt{9 + \left[3 \arccos \frac{3}{K_n^{(4)}} + (2n+1)\pi\right]^2} \quad (22)$$

$$K_n^{(5)} = \sqrt{\left(\frac{3K_n^{(5)}+4}{K_n^{(5)}+2}\right)^2 + \left[3 \arccos \frac{3K_n^{(5)}+4}{K_n^{(5)}(K_n^{(5)}+2)} + (2n+1)\pi\right]^2} \quad (23)$$

$$K_n^{(6)} = \sqrt{1 + \left[3 \arccos \frac{1}{K_n^{(6)}} + (2n+1)\pi\right]^2} \quad (24)$$

$$K_n^{(7)} = \sqrt{\left(\frac{K_n^{(7)}}{K_n^{(7)}+2}\right)^2 + \left[3 \arccos \frac{1}{K_n^{(7)}+2} + (2n+1)\pi\right]^2} \quad (25)$$

表 2 周期 3 轨道 ($N=0$ 模) 的分歧点数值

n	0	1	2	3	4
$K_n^{(0)}$	0	10.56678	17.01357	23.36912	29.69345
$K_n^{(1)}$	1.51755	10.56959	17.01411	23.36931	29.69354
$K_n^{(2)}$	3	10.72155	17.11766	23.45080	29.75634
$K_n^{(3)}$	4.09651	10.76300	17.13277	23.45533	29.76118
$K_n^{(4)}$	7.22136	13.81002	20.19714	26.53376	32.84964
$K_n^{(5)}$	7.22526	13.81062	20.19734	26.53385	32.84969
$K_n^{(6)}$	7.52068	13.95792	20.29714	26.60957	32.91075
$K_n^{(7)}$	7.58172	13.97668	20.30623	26.61493	32.91429

表 3 周期 3 轨道的稳定性窗口及分歧行为

轨道类别	稳定性窗口	分歧点	C 作为 K 的函数	$\text{Tr}M_n$	$\frac{d\text{Tr}M_n}{dM}$	分歧类型	
(I)	$[K_n^{(0)}, K_n^{(1)}]$	$K_n^{(0)} (n \geq 1)$	$-\frac{3}{K}$	2	$\infty (K \rightarrow K_n^{(0)} + 0)$	切分歧	
		$K_n^{(1)}$	$\frac{4-3K}{K(K-2)}$	-2	$-\frac{(K-1)(K^5-6K^4+3K^3+40K^2-80K+48)}{K(K-2)^2} < 0$	倍周期	
	$[K_n^{(2)}, K_n^{(3)}]$	$n=0, 1, 2, \dots$	$K_n^{(2)} (n \geq 1)$	$\frac{1}{2-K}$	2	$-\frac{K^2(K-3)^2}{(K-2)^2} < 0$	逆同周期
		$K_n^{(3)}$	$-\frac{1}{K}$	-2	$-\frac{(K-1)(K^2-3)}{K} < 0$	倍周期	
(II)	$[K_n^{(4)}, K_n^{(5)}]$	$K_n^{(4)}$	$-\frac{3}{K}$	2	$\infty (K \rightarrow K_n^{(4)} + 0)$	切分歧	
		$K_n^{(5)}$	$-\frac{4+3K}{K(K+2)}$	-2	$-\frac{(K+1)(K^5-6K^4+3K^3+40K^2-80K+48)}{K(K-2)^2} < 0$	倍周期	
	$[K_n^{(6)}, K_n^{(7)}]$	$n=0, 1, 2, \dots$	$K_n^{(6)}$	$-\frac{1}{K}$	-2	$\frac{(K+1)(K^2-3)}{K}$	逆倍周期
		$K_n^{(7)}$	$-\frac{1}{K+2}$	2	$\frac{(K^2(K+3)^2}{(K+2)^2} < 0$	同周期	

从这些解析表达式所计算出来的各分歧点数值见表 2。周期 3 轨道的稳定性窗口及这些分歧点处的分歧行为见表 3。

第 (I) 类周期 3 轨道在 $K_n^{(2)} = 3$ 处是通过周期 1 轨道 $\begin{pmatrix} \pm 1/2 \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k \pm 1/2 \\ k \end{pmatrix}$ 的三倍周期分歧而诞生的。除此之外, 第 (I) 类周期 3 轨道均在 $K_n^{(0)}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 处通过切分歧诞生, 所产生的椭圆型轨道在 $K_n^{(1)}$ 处倍周期分歧失稳, 而孪生的双曲型轨道则在 $K_n^{(2)}$ 处通过逆同周期分歧而转变为椭圆型, 恢复稳定性, 然后在 $K_n^{(3)}$ 处发生倍周期分歧失稳。

第 (II) 类周期 3 轨道则在 $K_n^{(4)}$ 处由切分歧诞生, 所产生的椭圆型轨道在 $K_n^{(5)}$ 处发生倍周期分歧失稳转换为双曲型, 然后在 $K_n^{(6)}$ 处通过逆倍周期分歧获稳又恢复为椭圆型, 最后在 $K_n^{(7)}$ 处通过同周期分歧失稳, 产生两条新的椭圆型周期 3 轨道, 本身变为双曲型。

由此看到, 标准映象的周期 3 轨道也将发生无穷多次同周期分歧。 $K_n^{(1)}$ ($n=1, 2, \dots$) 及 $K_n^{(7)}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 是周期 3 轨道的同周期分歧点。

5 周期 4 轨道

我们讨论下列五类周期 4 轨道 (k, m 是整数):

第 (I) 类: 轨道是

$$\begin{pmatrix} x \\ x+m-k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k+1/2 \\ k+1/2-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2k+1-x \\ k+1/2-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m+k+1 \\ m-k+x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2m+1 \\ x+m-k \end{pmatrix} \quad (26)$$

或者

$$\begin{pmatrix} x \\ x+m-k-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k \\ k-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2k-x \\ k-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m+k-\frac{1}{2} \\ m-k-\frac{1}{2}+x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2m-1 \\ x+m-k-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (27)$$

其中 x 满足 $2x + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = 2k - m + \frac{1}{2}$, 这一类轨道的线性 Jacobi 矩阵之迹为

$$\text{Tr}M_4 = 2 - K(KC + 2)[(K^2 - 4)C + 2K]$$

第 (II) 类: 轨道是

$$\begin{pmatrix} x \\ x+m-k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k \\ k-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2k-x \\ k-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m+k \\ m-k+x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2m \\ x+m-k \end{pmatrix} \quad (28)$$

其中 x 满足 $2x + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = 2k - m$,

我们有

$$\text{Tr}M_4 = 2 + K(K+2)(KC+2)[(K+2)C+2]$$

第 (III) 类: 轨道是

$$\begin{pmatrix} x \\ x+m-k-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k+\frac{1}{2} \\ k+\frac{1}{2}-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2k+1-x \\ k+\frac{1}{2}-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m+k+\frac{1}{2} \\ m-k-\frac{1}{2}+x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2m \\ x+m-k-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (29)$$

其中 x 满足 $2x + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = 2k - m + 1$, 我们有

$$\text{Tr}M_4 = 2 + K(K-2)(KC+2)[(K-2)C+2]$$

第(IV)类: 轨道是

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x+3k-m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+k \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m-x \\ m-k-2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k+m-x \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+4k \\ 2x+3k-m \end{pmatrix} \quad (30)$$

或者

$$\begin{pmatrix} -x \\ m-k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+k \\ 2x+k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+m \\ m-k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3(m-k)-x \\ 2m-3k-2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4(m-k)-x \\ m-k \end{pmatrix} \quad (31)$$

其中 x 满足 $2x + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = m - 2k$, 我们有 $\text{Tr}M_4 = 2 + KC(KC+4)(KC+2)^2$.

第(V)类: 轨道是

$$\begin{pmatrix} x \\ 3k-m-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+k \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+m+\frac{1}{2} \\ m-k+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+m+k+\frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+4k \\ 3k-m-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (32)$$

其中 x 满足 $\frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = m - 2k + \frac{1}{2}$, 我们有 $\text{Tr}M_4 = 2 + (KC)^2[(KC)^2 - 8]$.

使用我们的方法, 可以给出使 $\text{Tr}M_4 = \pm 2$ 的所有分歧点的解析表达式如下:

$$K_n^{(0)} = \sqrt{4 + \left[2 \arccos \frac{2}{K_n^{(0)}} + (2n-1)\pi \right]^2} \quad (33)$$

$$K_n^{(1)} = \sqrt{\left[\frac{2(K_n^{(1)}+1)}{K_n^{(1)}+2} \right]^2 + \left[2 \arccos \frac{2(K_n^{(1)}+1)}{K_n^{(1)}(K_n^{(1)}+2)} + (2n-1)\pi \right]^2} \quad (34)$$

$$K_n^{(2)} = \sqrt{\left[\frac{2(K_n^{(2)})^2}{(K_n^{(2)})^2-4} \right]^2 + \left[2 \arccos \frac{2K_n^{(2)}}{(K_n^{(2)})^2-4} + (2n-1)\pi \right]^2} \quad (35)$$

$$K_n^{(3)} = \sqrt{\left[\frac{2(K_n^{(3)}-1)}{K_n^{(3)}-2} \right]^2 + \left[2 \arccos \left| \frac{2(K_n^{(3)}-1)}{K_n^{(3)}(K_n^{(3)}-2)} \right| + (2n-1)\pi \right]^2} \quad (36)$$

$$K_n^{(4)} = 2 \times \sqrt{1 + \left(\arccos \frac{2}{K_n^{(4)}} + n\pi \right)^2} \quad (37)$$

$$K_n^{(5)} = 2 \times \sqrt{\left(\frac{K_n^{(5)}}{K_n^{(5)}+2} \right)^2 + \left(\arccos \frac{2}{K_n^{(5)}+2} + n\pi \right)^2} \quad (38)$$

$$K_n^{(6)} = 2 \times \sqrt{\left(\frac{K_n^{(6)}}{K_n^{(6)}-2} \right)^2 + \left(\arccos \frac{2}{K_n^{(6)}-2} + n\pi \right)^2} \quad (39)$$

$$K_n^{(7)} = (2n+1)\pi \quad (40)$$

$$K_n^{(8)} = 2 \times \sqrt{4 + \left(\arccos \frac{4}{K_n^{(8)}} + n\pi \right)^2} \quad (41)$$

表 4 周期 4 轨道分歧点数值

n	$K_n^{(0)}$	$K_n^{(1)}$	$K_n^{(2)}$	$K_n^{(3)}$	$K_n^{(4)}$	$K_n^{(1)}$	$K_n^{(II)}$	$K_n^{(5)}$
0			0	1.23973	2	2.24387	3.41421	2.47610
1	5.94339	5.94933	5.94961	5.96795	9.20668	9.20847	9.21108	9.21388
2	12.40479	12.40559	12.40491	12.40632	15.57941	15.57983	15.58012	15.58110
3	18.74275	18.74230	18.74276	18.74313	21.89976	21.89992	21.89999	21.90040
4	25.05287	25.05298	25.05287	25.05302	28.20339	28.20347	28.20349	28.20370

续表 4

n	$K_n^{(6)}$	$K_n^{(III)}$	$K_n^{(IV)}$	$K_n^{(7)}$	$K_n^{(8)}$	$K_n^{(9)}$	$K_n^{(10)}$	$K_n^{(11)}$
0	4	2.77931	3.41421	3.14159	4	3.22576	4.16338	4.22725
1	9.22429	9.31739	9.32256	9.42478	9.43902	9.45317	9.81277	9.84004
2	15.58225	15.64403	15.64505	15.70796	15.71083	15.72501	15.94378	15.96058
3	21.90069	21.94558	21.94594	21.99115	21.99217	22.00333	22.16021	22.17229
4	28.20381	28.23892	28.23909	28.27433	28.27481	28.28381	28.40602	28.41545

$$K_n^{(9)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + [(2n+1)\pi]^2} \quad (42)$$

$$K_n^{(10)} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3} + [(2n+1)\pi]^2} \quad (43)$$

$$K_n^{(11)} = \sqrt{8 + [(2n+1)\pi]^2} \quad (44)$$

$$K_n^{(I)} = 2 \times \sqrt{\left(\frac{K_n^{(I)} + 1}{K_n^{(I)} + 2}\right)^2 + \left[\arccos \frac{2(K_n^{(I)} + 1)}{K_n^{(I)}(K_n^{(I)} + 2)} + n\pi\right]^2} \quad (45)$$

$$K_n^{(II)} = 2 \times \sqrt{\left(\frac{K_n^{(II)} - 1}{K_n^{(II)} - 2}\right)^2 + \left[\arccos \frac{2(K_n^{(II)} - 1)}{K_n^{(II)}(K_n^{(II)} - 2)} + n\pi\right]^2} \quad (46)$$

$$K_n^{(III)} = 2 \times \sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\arccos \frac{2 - \sqrt{2}}{K_n^{(III)}} + n\pi\right)^2} \quad (47)$$

$$K_n^{(IV)} = 2 \times \sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\arccos \frac{2 + \sqrt{2}}{K_n^{(IV)}} + n\pi\right)^2} \quad (48)$$

当 $n=0, 1, 2, 3, 4$, 从这些分歧点解析表达式所得到的数值见表 4。五类周期 4 轨道的稳定性窗口及这些分歧点处的分歧行为见表 5。

我们用解析方法所得到的结果与用映射迭代的数值方法所得到的结果是完全一致的^[6]。

在 $K_0^{(4)} = 2$ 这一分歧点处, 第 (II) 类周期 4 轨道从周期 2 轨道

$$\begin{pmatrix} \pm 1/2 \\ k \pm 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k \\ k \mp 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2k \mp 1/2 \\ k \mp 1/2 \end{pmatrix}$$

的倍周期分歧中诞生, 同时第 (III) 类周期 4 轨道从周期 1 轨道

$$\begin{pmatrix} \pm 1/2 \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1/2 + k \\ k \end{pmatrix}$$

的四倍周期分歧中诞生。

分歧点 $K_n^{(0)}, K_n^{(2)}, K_n^{(4)}, K_n^{(7)}, K_n^{(10)}$ 是周期 4 轨道的稳定性窗口的下限, $K_n^{(1)}, K_n^{(3)}, K_n^{(5)}, K_n^{(6)}, K_n^{(7)}, K_n^{(8)}, K_n^{(9)}, K_n^{(11)}$ 则是稳定性窗口的上限。 $K_n^{(1)}, K_n^{(6)}, K_n^{(11)}, K_n^{(7)}$ 是周期 4 轨道的边缘稳定点, 在这些分歧点处发生倍周期分歧, 椭圆和双曲型的一对孪生的周期 8 轨道得以诞生, 但周期 4 轨道并不失稳, 经过边缘稳定点后仍然恢复为椭圆型。对于这些分歧点 Poincaré 指数仍然是守恒的, 因而类似于周期 2 轨道的分歧点 K'_n 。

我们可以看到周期 4 轨道的同周期分歧现象比周期 2 和周期 3 轨道更为丰富。 $K_n^{(5)}, K_n^{(6)}, K_n^{(7)}, K_n^{(11)}$ 是同周期分歧点, $K_n^{(2)}, K_n^{(4)}$ ($n \geq 1$) 及 $K_n^{(7)}$ 则是逆同周期分歧点。具体地说: 在 $K_n^{(7)}$ 分歧点处, 第 (IV) 类周期 4 轨道的 (A) 分支通过同周期分歧变为第 (V) 类周期 4 轨道。例如, 第 (IV) 类轨道 (30) 当 $k=0, m=1$ 是

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1-x \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2x-1 \end{pmatrix}$$

其中 $2x + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) = 1$, 当 $K = K_0^{(7)} = \pi$, 不动点方程的解是 $x = 1/4$, 轨道变为

表 5 周期 4 轨道的稳定性窗口及分岔点行为

轨道类别	稳定性窗口	分岔点	C 作为 K 的函数	T, M _s	$\frac{dT, M_s}{dK}$	$\frac{d^2 T, M_s}{dK^2}$	分岔类型
(I)	$[0, K^{(0)}]$	$K^{(0)} (n \geq 1)$	$-\frac{2}{K}$	2	$\infty (K \rightarrow K^{(0)} + 0)$		切
	$[K^{(0)}, K^{(1)}]$	$K^{(1)} (n \geq 1)$	$-\frac{2(K+1)}{K(K+2)}$	-2	$-\frac{2(K^5 + 6K^4 + 8K^3 - 12K^2 - 28K - 16)}{(K+2)^2} < 0$		倍周期
	$[K^{(2)}, K^{(3)}]$	$K^{(2)} (n \geq 1)$	$-\frac{2K}{K^2 - 4}$	2	$-\frac{K^2[(K^2 - 8)^2 + 16]}{(K^2 - 4)^2} < 0$		逆同周期
	$n = 1, 2, \dots$	$K^{(3)}$	$-2 \frac{K-1}{K(K-2)}$	-2	$-\frac{2(K^5 - 6K^4 + 8K^3 + 12K^2 - 28K + 16)}{(K-2)^2} < 0$		倍周期
(II)	$[K^{(4)}, K^{(5)}]$	$K^{(4)} (n \geq 1)$	$-\frac{2}{K}$	2	$\infty (K \rightarrow K^{(4)} + 0)$		切
		$K^{(1)}$	$-2 \frac{K+1}{K(K+2)}$	-2	0	> 0	倍周期
	$n = 0, 1, 2, \dots$	$K^{(5)}$	$-2 \frac{1}{K+2}$	2	$\frac{K(K^2 + 6K^2 + 12K - 8)}{K+2} > 0$		同周期

(III)	$[K_{(n)}^{(4)}, K_{(n)}^{(6)}]$ $n=0,1,2,\dots$	$K_{(n)}^{(4)} (n \geq 1)$	$-\frac{2}{K}$	2	$\infty (K \rightarrow K_{(n)}^{(4)} + 0)$		切
		$K_{(n)}^{(6)}$	$-\frac{2(K-1)}{K(K-2)}$	-2	0	> 0	倍周期
		$K_{(n)}^{(8)}$	$-\frac{2}{K-2}$	2	$\frac{K(K^3 - 6K^2 + 8K + 8)}{K-2} > 0$		同周期
(IV)	$A_1 [K_{(n)}^{(4)}, K_{(n)}^{(6)}]$	$K_{(n)}^{(4)} (n \geq 1)$	$-\frac{2}{K}$	2	$8\left(\frac{4}{K} - K\right) < 0$		逆同周期
		$K_{(n)}^{(6)}$	$-\frac{2-\sqrt{2}}{K}$	-2	0	> 0	倍周期
	$B_1 [K_{(n)}^{(4)}, K_{(n)}^{(8)}]$	$K_{(n)}^{(4)}$	0	2	$8K > 0$		同周期
		$K_{(n)}^{(8)}$	$-\frac{2+\sqrt{2}}{K}$	-2	0	> 0	倍周期
(V)	$[K_{(n)}^{(7)}, K_{(n)}^{(9)}]$	$K_{(n)}^{(7)}$	0	2	$-16K < 0$		逆同周期
		$K_{(n)}^{(9)}$	$\pm \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{K}$	-2	$-8\sqrt{3}K < 0$		倍周期
	$[K_{(n)}^{(10)}, K_{(n)}^{(11)}]$	$K_{(n)}^{(10)}$	$\pm \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{K}$	-2	$8\sqrt{3}K > 0$		逆倍周期
		$K_{(n)}^{(11)}$	$\pm \frac{\sqrt{8}}{K}$	2	$16K > 0$		同周期

$$\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

并发生同周期分歧而失稳。同周期分歧后所产生的两条周期 4 轨道是

$$\begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

其中 $x = \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{\pi}{K}$ 或 $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{\pi}{K}$, 这两条轨道就是 $k=m=0$ 的第 (V) 类周期 4 轨道。

参 考 文 献

- [1] Chirikov, B. V., *Phys. Reports*, 52(1979), 263.
- [2] Greene, J. M., *J. Math. Phys.*, 20(1979), 1183.
- [3] Collet, P., Eckmann J. P., Koch H., *Physica*, 3D(1981), 457.
- [4] Greene, J. M. et al., *Physica*, 3D(1981), 468.
- [5] Schmidt, G., *Phys. Rev.*, A22(1980), 2849.
- [6] Schmidt, G., Bialek J., *Physica*, 5D(1982), 397.
- [7] 汪秉宏, 物理学报, 37(1988), 77.
- [8] 刘军贤, 陈光旨, 王光瑞, 陈式刚, 物理学报, 37(1988), 119.

Analytical Calculation of Bifurcation Behaviours in Standard Mapping

Wang Binghong

(Department of Modern Physics)

Abstract

For standard mapping, we calculate analytically the values of non-integrable parameter K where the orbits of periods 1 to 4 variate their stability via tangent bifurcation, period doubling bifurcation and period equal bifurcation. Hence, the analytical stable windows of periodic orbits are given and a complete picture can be seen for the behaviour of bifurcation of periodic motion in standard mapping.

Key words: standard map, tangent bifurcation, period doubling bifurcation, period equal bifurcation, stable window,

关于 Drucker 公设和塑性本构关系的 进一步研究*

李永池 唐之景 胡秀章

(近代力学系)

摘 要

本文对 Drucker 公设的表述进行了修正,使之既可处理稳定材料又可处理非稳定材料。同时以应力空间中的加载函数为基础,直接得到了以应变增量表达应力增量的塑性本构关系,这更便于在实际问题特别是在动态数值方法中应用。

关键词: Drucker 公设, 塑性本构关系, 稳定和非稳定材料, 屈服函数。

1 引言

塑性本构关系的探求一直是固体力学的重要研究课题之一。人们希望所得到的本构关系既在理论上有坚实的基础和广泛的适用性,又在实际应用上有其方便性。迄今为止,人们先后以 Drucker 公设^[1]和 Ильюшин 公设^[2]为基础,得到了时率无关材料的塑性本构关系。对此,文献^[3]已进行了深入细致的讨论。从 Drucker 公设出发讨论塑性本构关系的优点是,它所依据的是人们通常由实验所得到的并在理论上惯于采用的应力空间中的加载函数;其缺点是,它只适用于处理稳定材料,而不能处理非稳定材料,而且,所得到的以应力增量表达应变增量的本构关系,对动态数值方法来说,应用起来并不方便。本文受到 Palmer^[4]等的启发,对 Drucker 公设的提法进行了修正,使之同时可处理稳定的和非稳定的材料,并且以应力空间中的加载函数为基础,直接得到了以应变增量表达应力增量的塑性本构关系,这对实际应用,特别是对动态数值方法中的应用是非常方便的。

2 Drucker 公设和稳定材料的塑性本构关系

当以塑性应变 ϵ^p 和硬化参量 k 为内变量时,应力空间中的加载面,即后继屈服面,可以

1987年9月28日收到。

* 国家自然科学基金资助课题。

表达为

$$f(\sigma, \epsilon^p, k) = 0 \quad (1)$$

这里 σ 是应力张量, ϵ^p 是塑性应变张量, 硬化参数 k 可视为累积塑性功 W^p 或累积塑性应变强度 $\bar{\epsilon}^p$ 的函数, $k = k(W^p)$ 或 $k = k(\bar{\epsilon}^p)$, 而

$$W^p = \int dW^p = \int \sigma \circ d\epsilon^p, \quad \bar{\epsilon}^p = \int d\bar{\epsilon}^p = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon^p \circ d\epsilon^p} \quad (2)$$

本文将交叉使用张量的直接记法、指标记法和矩阵记法, (2) 中的记号 “ \circ ” 是张量二次点积的简缩记法, 即 $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$.

Drucker 公设通常的表述是: 对处于任一应力状态 σ^0 的材料元, 施加外部作用使之产生塑性变形并随后卸除其附加应力时, 在材料元的这一应力循环中, 附加应力 $\sigma(t) - \sigma^0$ 的功是非负的。

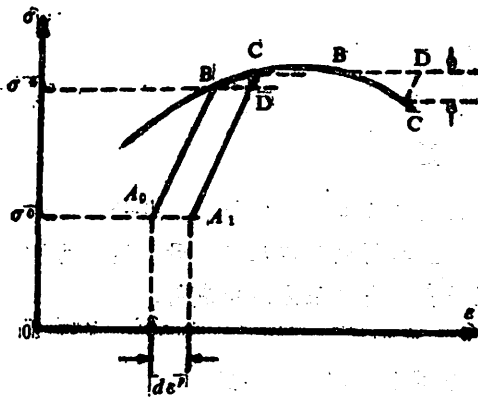


图1 一维应力下的应力应变曲线及应力循环

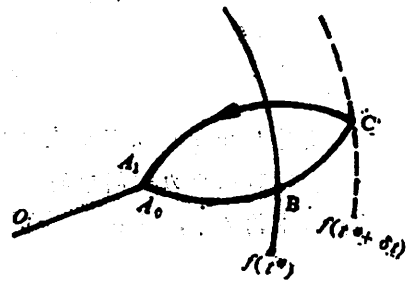


图2 应力空间中的加载面及应力循环

图1和图2分别是对一维应力情况及复杂应力情况下应力循环的图示。其中 $A_0(t_0)$ 、 $B(t^*)$ 、 $C(t^* + \delta t)$ 和 $A_1(t_1)$ 分别表示应力循环中材料元的初态、屈服态、后继屈服态和终态。由于弹性变形是可逆的, 在一个应力循环中, 附加应力的弹性功等于弹性势函数自由能的减少量零 (不考虑热效应时, 此功即是弹性应变能的增加量零), 因此 Drucker 公设的数学表示是

$$W_\sigma = \int_{t_0}^{t_1} (\sigma - \sigma^0) \circ \dot{\epsilon} dt = \int_{t^*}^{t^* + \delta t} (\sigma - \sigma^0) \circ \dot{\epsilon} dt \geq 0 \quad (3)$$

将积分在 $t = t^*$ 展开为 Taylor 级数, 并略去高阶小量有

$$W_\sigma = \int_{t^*}^{t^* + \delta t} (\sigma - \sigma^0) \circ \dot{\epsilon}^p dt = (\sigma^* - \sigma^0) \circ d\epsilon^p(t^*) + \frac{1}{2} d\sigma \circ d\epsilon^p \geq 0 \quad (4)$$

其中 $d\sigma$ 和 $d\epsilon^p(t^*)$ 分别是 t^* 到 $t^* + \delta t$ 期间的应力增量和塑性应变增量。当 σ^0 在屈服面之内即 $\sigma^* \neq \sigma^0$ 时, 由于第二项是高阶小量, 式 (4) 给出最大塑性功原理

$$(\sigma^* - \sigma^0) \circ d\epsilon^p(t^*) \geq 0 \quad (5)$$

并由此可推出应力加载面的外凸性和确定增量塑性应变沿应力加载面外法向的正交法则,

$$d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (d\lambda > 0) \quad (6)$$

当 σ^0 在屈服面之上即 $\sigma^* = \sigma^0$ 时, (4) 给出稳定材料的定义:

$$\frac{1}{2} d\sigma \circ d\epsilon^p \geq 0 \quad (7)$$

其含意是, 满足 Drucker 公设的材料, 应力加载面随着塑性变形的发展而扩大, 即硬化(包括理想塑性为其特例)。为简单计, 称此种稳定材料为 Drucker 材料。根据塑性变形发展时的一致性条件, 即

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \circ d\epsilon^p + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon^p} \circ d\epsilon^p = 0 \quad (8)$$

以及正交法则(6), 立即可以得到

$$d\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ d\sigma \quad (9)$$

其中

$$h = - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon^p} \right) \circ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (10)$$

于是有

$$d\epsilon^p = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ d\sigma \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \circ d\sigma \quad (11)$$

如以 \mathbf{C} 表示材料的弹性柔度张量, 它是一个完全对称的四阶张量, 由

$$d\epsilon^e = \mathbf{C} \circ d\sigma \quad (12)$$

所定义, 则对非弹塑性耦合材料便有

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p = \left(\mathbf{C} + \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \circ d\sigma \quad (13)$$

(11) 和 (13) 便是在应力空间中表述加载面时, 人们通常所见到的增量形式的弹塑性本构关系。它有如下的缺点: 第一, 对理想塑性材料有 $\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ d\sigma = df = 0$ 及 $h = 0$ (因为 $\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} = 0$

$\frac{\partial k}{\partial \epsilon^p} = 0$), 故确定塑性应变增量发展的参数 $d\lambda$ 成为 $\frac{0}{0}$ 型不能确定, 因此, 无法根据给定过程的

$d\sigma$ 由 (11) 求出相应的塑性增量应变 $d\epsilon^p$ 。这在物理上是自然的, 因为不受约束的理想塑性体, 只要应力状态保持在屈服面上, 塑性变形就可以任意发展。因此, 正如文[3]所指出的, (11) 或 (13) 无法应用于理想塑性材料或者先硬化后软化的材料。同时须指出, 对软化材料, 当应力初态在屈服面上或离屈服面很近时, 应力循环并非永远可以实现。第二, (13) 对动态数值方法的程序应用起来并不方便。众所周知, 一切动态的有限元或有限差分程序, 总是基于以下的计算流程运行的: 先由一个时刻 t 的应力场和运动方程求出加速度和 $t + \Delta t$ 时刻的速度场; 再由连续方程求出 Δt 期间的增量应变; 继之由增量形式的本构方程求出 Δt 期间的增量应力, 从而得到 $t + \Delta t$ 时刻的新应力场; 最后根据稳定性条件求出保证计算稳定进行的时间增量 Δt ; 然后重复前面的步骤把问题推向前进。由此可见, 对动态计算的应用更为方便的, 不是由 $d\sigma$ 表达 $d\epsilon$ 的本构关系 (13) (而且它并非总是适用), 而是由 $d\epsilon$ 表达 $d\sigma$ 的增量本构关系。我们当然可以从 Ильюшин 公设出发, 以应变空间中的加载函数为

基础得出由 $d\epsilon$ 表达 $d\sigma$ 的塑性本构关系。对此, 文 [3] 已进行了深入细致的讨论, 并指出在应变空间中表述的 Ильюшин 公设和由此而得出的由 $d\epsilon$ 表达 $d\sigma$ 的塑性本构关系, 同时适用于硬化 (稳定) 和软化 (不稳定) 的材料。但是通常由实验所得到的以及在实践上所应用的加载函数都是在应力空间中表述的, 而由此将之转化为应变空间中的加载函数, 在实用上是非常麻烦的。下面将指出, 只要将 Drucker 公设对应力循环的要求适当放松, 就可以将稳定材料和非稳定材料都包括进来, 而且可以直接利用应力空间中的加载函数得到各类材料由 $d\epsilon$ 表达 $d\sigma$ 的增量型本构关系。这对实际应用特别是对各类动态数值方法的应用是非常方便的。

3 Drucker 公设的新表述和普适的塑性本构关系

容易看出, 前述的 Drucker 公设对材料有着较严苛的要求。它要求对处于任一应力状态 σ° 的材料元及任一产生塑性变形过程的应力循环, (4) 式都要成立。这就导致材料稳定的性质 (7)。所以, 前述的 Drucker 公设只适用于稳定材料而不适用于随着塑性变形发展应力加载面缩小, 即软化的非稳定材料 (见图 1 中的右半部)。可以说, Drucker 公设给出了材料稳定即硬化的定义, 因之, 常称其为硬化公设。

但是 Palmer^[4] 曾提及, 应力加载面的外凸性和赖以导出塑性本构关系的正交法则 (6) 对非稳定的即软化的材料, 事实上, 也是可以得到的。因此, 在应力空间中表述加载函数时应该可以得到普遍适用的弹塑性本构关系, 而不管材料是否稳定。为此, 我们把 Palmer 的说法更加系统化和明确化, 提出对 Drucker 公设的新表述:

对处于弹性应力状态 σ° 的材料元, 施加外部作用使其产生足够小的塑性变形, 然后卸除其附加应力, 在这一应力循环中附加应力的功是非负的。今后称具有此类性质的材料为广义的 Drucker 材料。

由于这里要求 σ° 是在屈服面之内的弹性应力状态, 因此不管 σ° 离屈服面多么近, 只要塑性变形过程足够小, 则 (4) 中的第二项总是比第一项更高阶的小量。因此由修正的 Drucker 公设总可导出最大塑性功原理 (5), 从而得出应力加载面外凸的性质和正交法则 (6), 而不管材料是硬化还是软化。当我们规定一类应力循环并要求材料在循环中满足某些性质时应力循环所包含的“元素”越多, 则对材料的要求越苛刻, 具有这些性质的材料范围便越小。由于我们增加了对 Drucker 公设中材料元初态和应力循环形式的限制, 就自然地减少了应力循环所包含的“元素”, 从而放松了对材料性质的限制, 因而 (7) 并不构成所述材料的必要条件。所以, 广义的 Drucker 材料同时包括稳定和非稳定的材料。

现在, 我们直接利用应力加载面 (1) 和正交法则 (6) 来得出广义 Drucker 材料的由 $d\epsilon$ 表达 $d\sigma$ 的弹塑性本构关系。

当塑性变形发展时, 应力点应保持在加载面 (1) 之上, 因此, 不管 $d\epsilon^p$ 如何发展, 下面的一致性条件成立:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \circ d\epsilon^p + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon^p} \circ d\epsilon^p = 0 \quad (14)$$

将正交法则 (6) 代入 (14), 有

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ d\sigma = h d\lambda \quad (15)$$

其中 (15) 和 (16) 式对二次点积 (18) 式, 对任意微过程中微量, 引张式 (17) 式

$$h = - \left[\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon^p} \right] \circ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (16)$$

(15) 式总是成立的, 而不管材料是硬化、理想塑性还是软化。为了避免对理想塑性和软化材料求 $d\lambda$ 时的不确定性, 我们不直接由 $d\sigma$ 和 (15) 式来确定 $d\lambda$, 而考虑弹性应变 ϵ^e 的发展和应力 σ 的发展之间的如下关系:

$$d\sigma = \mathbf{E} \circ d\epsilon^e = \mathbf{E} \circ (d\epsilon - d\epsilon^p) = \mathbf{E} \circ \left(d\epsilon - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \quad (17)$$

其中 \mathbf{E} 是材料的弹性张量, 它也是一个完全对称的四阶张量, 对非弹塑性耦合材料, 它与塑性变形的发展无关, 即与内变量无关, 以下我们只考虑此种情况。将 (17) 两边同时与 $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ 进行二次点积, 得

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ d\sigma = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \left[\mathbf{E} \circ \left(d\epsilon - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \right] \quad (18)$$

将 (15) 代入 (18) 之左端, 其解出 $d\lambda$, 有

$$d\lambda = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \circ d\epsilon \quad (19)$$

其中

$$h_1 = h + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \circ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (20)$$

于是

$$d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \circ d\epsilon \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (21)$$

将 (21) 代入 (17), 得

$$d\sigma = \mathbf{E} \circ \left[d\epsilon - \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \circ d\epsilon \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] = \left[\mathbf{E} - \frac{1}{h_1} \left(\mathbf{E} \circ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \right) \right] \circ d\epsilon \quad (22)$$

如果利用 \mathbf{E} 的完全对称性, 则有 $\mathbf{E} \circ \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E}$, 可见 (22) 的第二项正比于二阶张量

$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E}$ 自并乘所得到的四阶张量 $\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \right)$ 。

公式 (21) 和 (22), 即是由任一微过程中增量应变 $d\epsilon$ 确定塑性增量应变 $d\epsilon^p$ 和相应的应力增量 $d\sigma$ 的公式。它的物理意义是非常清楚的: 对任一产生增量应变 $d\epsilon$ 的微过程, 我们可以先将其当作弹性过程, 计算出相应的应力增量; 如果这一微过程包含着塑性变形的话, 则所得应力点必然超出合理的应力加载面之外, 于是就应扣除由塑性变形引起的附加应力, 这就是 (22) 中第二项的意义。当变形过程确实没有塑性变形发生的话, 应该令 (22) 的第二项为零。下面, 我们写出判别是否有塑性加载出现的数学公式, 以便于在动态数值计算中应用。

对任一微变形过程 $d\epsilon$, 如果由 (19) 式所算出的 $d\lambda > 0$, 则说明该微过程有塑性变形发生, 可由 (22) 式计算微过程中的相应应力增量 $d\sigma$; 如果由 (19) 所算出的 $d\lambda \leq 0$, 则说明此微过程为弹性变载或中性变载过程, 应令 (22) 中的第二项为零。所以可以将 (22) 式写为

$$d\sigma = \mathbf{E} \circ \left[d\epsilon - H(x) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \quad (23)$$

其中 $H(x)$ 和 x 分别为下列函数:

$$H(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \\ 0 & \text{当 } x \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$x = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \circ d\epsilon$$

因此, 广义 Drucker 材料的塑性加载条件是 $x > 0$, 这一条件是由一微过程的应变增量表达的, 同样适用于稳定和非稳定的材料, 比通常人们由 Drucker 公设所得出的, 由微过程应力增量判别塑性加载的条件, 更合理更普遍。另外, 由塑性变形发展时 $d\lambda > 0$ 的条件以及公式 (15), 可以看出, 对硬化材料, 理想塑性材料和软化材料, 分别有 $h > 0$, $h = 0$ 和 $h < 0$ 。

4 与应变空间表述之间的关系

以 ϵ^p 和 k 为内变量时, 应变空间中的加载面可表达为

$$F(\epsilon, \epsilon^p, k) = 0 \quad (26)$$

由于

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p = \mathbf{C} \circ \sigma + \epsilon^p, \quad \sigma = \mathbf{E} \circ \epsilon^e = \mathbf{E} \circ (\epsilon - \epsilon^p) \quad (27)$$

所以加载函数 f 和 F 之间有如下关系

$$F(\epsilon, \epsilon^p, k) = f[\mathbf{E} \circ (\epsilon - \epsilon^p), \epsilon^p, k], \quad f(\sigma, \epsilon^p, k) = F[\mathbf{C} \circ \sigma + \epsilon^p, \epsilon^p, k] \quad (28)$$

故

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E}, & \frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} &= \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E}, & \frac{\partial F}{\partial k} &= \frac{\partial f}{\partial k} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \circ \mathbf{C}, & \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} &= \frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon}, & \frac{\partial f}{\partial k} &= \frac{\partial F}{\partial k} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

利用 (29) 式, 容易证明:

$$\begin{aligned} h_1 &= h + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \circ \frac{\partial f}{\partial \sigma} = - \left[\frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} + \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon^p} \right] \circ \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon} \circ \mathbf{C} \right) \\ &= - \left[\frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} + \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon^p} \right] \circ \left(\mathbf{C} \circ \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \circ d\epsilon = \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \circ d\epsilon \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \circ \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \circ d\epsilon \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \left(\mathbf{E} \circ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \right) \circ d\epsilon = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \circ \mathbf{E} \right) \circ d\epsilon = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right) \circ d\epsilon \end{aligned} \quad (32)$$

这里利用了 \mathbf{C} 和 \mathbf{E} 的完全对称性。于是 (19) 和 (22) 可分别写为

$$d\lambda = \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \cdot d\epsilon \quad (33)$$

$$d\sigma = \left[\mathbf{E} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right] \cdot d\epsilon \quad (34)$$

其中 h_1 按 (30) 式可由应变加载面求出。(33) 和 (34) 是通常以 Ильюшин 公设为基础, 从应变空间中的加载面出发所导出的弹塑性本构关系。而我们在第 3 节中不依赖于 Ильюшин 公设, 而由修正的 Drucker 公设为基础, 直接由应力空间中的加载函数得出了普适的本构关系, 这当然是更为方便的。

最后我们指出, 所得本构关系不但适用于稳定和非稳定材料, 而且加载函数 (1) 可包含各种类型的硬 (软) 化规律, 如各向同性硬 (软) 化 ($\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} = 0$) 随动硬化 ($\frac{\partial f}{\partial k} = 0$), 或联合的各向同性—随动硬化等等。我们将通过一些波传播和材料动态响应的数值计算实例, 来具体应用本文所得本构关系的形式, 并说明其优越性。这些正在进行的工作将在它处发表。

参 考 文 献

- [1] Drucker, D.C., Proc. 1st U.S. National Conf. of Appl. Mech., New York (1951), 487~491.
- [2] Ильюшин, А. А. ПММ, 24 (1960), 663—666.
- [3] 曲圣年, 殷有泉. 力学学报, 第 5 期 (1981), 465—472.
- [4] Palmer, A.C., Maier, G., Drucker, D.C., *J. Appl. Mech.*, 34 (1967), 464—470.
- [5] Malvern L. E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1969), 346—378.
- [6] 王仁、熊祝华、黄文彬, 塑性力学基础, 1982, 科学出版社, 北京, 149—187.

Further Study on the Drucker Postulate and Plastic Constitutive Relations

Li Yongchi Tang Zhijing Hu Xiuzhang

(Department of Modern Mechanics)

Abstract

This paper presents a modified formulation of the Drucker postulate which

can be applicable to treating both stable and unstable materials. Moreover, we have obtained the plastic constitutive relations with the incremental stress being expressed by the incremental strain directly based on the yield functions in the stress space. This is more convenient for its application to practical problems, especially to the dynamic numerical methods.

Key words: Drucker postulate, plastic constitutive relations, stable and unstable materials, yield functions.

滞变阻尼振子的随机响应

卢耘耘 陈 笃

(近代力学系)

摘 要

本文讨论滞变阻尼振子的随机响应,通过计算机上的数值模拟,给出了滞变阻尼振子在平稳理想高斯白噪声激励下,位移及速度的平稳均方响应,以及响应的概率密度函数和功率谱密度函数。

关键词:滞变阻尼,随机响应,数值模拟。

1 引言

若干工程材料经受往复变形时,在相当宽的频率范围内,每周滞后能损均表现为正比于应变幅度的平方,而与往复变形的频率无关。依据于这一事实, Soroka, Myklestad 等人提出了谐运动情况下的“复刚度”阻尼(结构阻尼)模型^[1-3]。该模型形式上相当于将通常线性振子中的实刚度系数换成某个复值的刚度系数,因而仍能保持线性模型一套处理方法。不过对于非谐运动情况,复刚度的概念将失去意义,该模型也不再适用。

能保持复刚度模型的能耗特征同时又适用于一般运动情况的阻尼模型是 Reid 所定义的一种阻尼力与速度反相,而与位移成比例的模型,通常称为滞变阻尼模型或 Reid 模型^[4]。在谐振响应分析中,该模型经常与复刚度模型相混淆而被视为等同(其实是不同的)。直到七十年代初, Caughy 等人才详细研究了 Reid 模型在自由和强迫振动时的特性,特别强调了 Reid 模型的非线性性质^[5,6]。

本文的目的是讨论滞变阻尼系统的随机响应问题,通过计算机上的数值模拟,给出了滞变阻尼振子在平稳理想 Gauss 白噪声激励下,位移及速度的平稳均方响应,以及位移响应的概率密度函数和功率谱密度函数,并将所得结果与等效线性化处理的某些结果以及复刚度模型的结果作了比较。

2 数学表述

设 Reid 振子质量参数为 m , 刚度参数为 k , 阻尼参数为 ξ , 以 X 表示振子质量的位

移。在随机载荷 $N(t)$ 作用下，振子的运动微分方程为

$$m\ddot{X} + \xi \frac{|X|}{|\dot{X}|} \dot{X} + kX = N(t) \quad (1)$$

式中 (\cdot) 表示对时间 t 求导， $N(t)$ 假设为平稳理想 Gauss 白噪声，它有均匀的谱密度 W ，其自相关函数

$$R_N(t_1) = E[N(t)N(t+t_1)] = 2\pi W\delta(t_1)$$

式中 $E(\cdot)$ 表示数学期望算符， $\delta(t_1)$ 是 Dirac 函数。

注意到滞变阻尼力 $f = -\xi \frac{|X|}{|\dot{X}|} \dot{X}$ 可写成 $f = -gK \operatorname{sgn}(X\dot{X})X$ ，其中 $g = \frac{\xi}{K}$ ，

$$\operatorname{sgn}v = \begin{cases} 1 & v > 0 \\ 0 & v = 0 \\ -1 & v < 0 \end{cases}$$

再记振子的固有频率为 $\omega_0 (= \sqrt{\frac{K}{m}})$ ，并作如下尺度变换

$$\tau = \omega_0 t, \quad x = X / \sqrt{\frac{\pi W \omega_0}{K^2}} \quad (2)$$

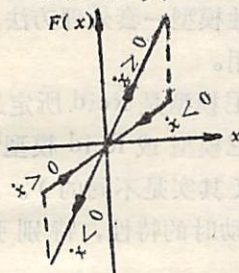
于是有相应的无量纲运动方程（以下对新的时间变量仍采用记号 t ）

$$\ddot{x} + [1 + g \operatorname{sgn}(x\dot{x})]x = n(t) \quad (3)$$

及

$$E[n(t)n(t+t_1)] = 2\delta(t_1)$$

方程 (3) 表明，无量纲化后的 Reid 系统，其性质仅依赖于无量纲参数 g （注意此参数与激励强度无关）。



如果定义

$$F(x) = x[1 + g \operatorname{sgn}(x\dot{x})]$$

为总的恢复力，则它在系统作往复运动时的变化情况可用图 1 表示，这显然与谐运动情况下的复刚度总恢复力 $F(x) = x(1 + ig)$ 在性态上大不相同。

3 等价线性化方法

图 1 滞后恢复力模型

非线性方程 (3) 难以得到精确解，用等价线性方程取代，有

$$\ddot{x} + \xi_{e,q} \dot{x} + K_{e,q} x = n(t) \quad (4)$$

其中系数 $\xi_{e,q}$ ， $K_{e,q}$ 待定。

若采用均方误差最小准则，选取 $\xi_{e,q}$ 和 $K_{e,q}$ 值，使 (4) 式尽可能逼近 (3) 式，可得^[7]：

$$\xi_{e,q} = gE[\dot{x}x \operatorname{sgn}(x\dot{x})] / E[\dot{x}^2] \quad (5)$$

$$K_{e,q} = 1 + gE[x^2 \operatorname{sgn}(x\dot{x})] / E[x^2]$$

假定系统的响应能用 Gauss 过程近似, 即响应的概率密度函数为

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)\right] \quad (6)$$

按 (6) 式计算出 (5) 式中的平均值, 最终有

$$\xi_{e,q} = 2g/\pi, \quad K_{e,q} = 1 \quad (7)$$

由等价方程 (4) 得出的位移及速度的平稳均方响应为

$$\sigma_x = \sqrt{\pi/2g}, \quad \sigma_{\dot{x}} = \sqrt{2\pi^3/g} \quad (8)$$

顺便指出, 如果用随机平均法^[8]求方程 (3) 的近似解, 将得到与以上等价线性化方法相同的结果。

4 数值模拟及讨论

为了考察等效线性化处理的可靠程度, 用电子计算机进行数值模拟对以上结果加以检验是必要的。模拟中的激励函数取分段常量形式, 每段常量值由独立抽取的 Gauss 随机数确定。对应的时段 Δt (也是响应计算中的积分步长) 应取得充分小, 以保证激励谱密度在相当宽的频带中, 近似保持常数。对这样构造的近似的平稳白噪声激励过程, 用四阶精度 Runge-Kutta 法逐步积分方程 (3), 再由确定性动态分析方法获得响应的统计量^[9]。

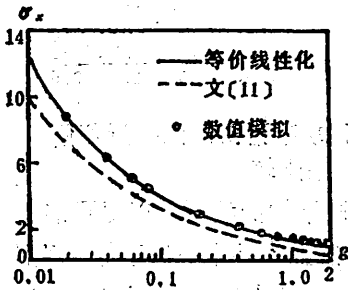


图 2 近似解和模拟结果比较 (位移响应)

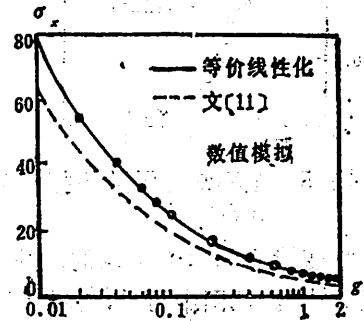


图 3 近似解和模拟结果比较 (速度响应)

本文计算中取 $\Delta t = 0.02$ 。对线性振子的验证性计算表明, 当振子阻尼比小于 0.2 时, 数值模拟给出的响应位移和响应速度的均方根值, 误差均不超过 5%; 当振子阻尼比小于 0.1 时, 误差均不超过 3% (与理论值比较)。有关计算机上的数值模拟的详细讨论和具体实现, 可参看 [8]、[10]。

图 2 及图 3 分别是 Reid 模型在白噪声激励下, 无量纲位移和速度的均方响应的数值模拟结果与等效线性化结果的对比, 图中还同时给出了复刚度阻尼模型 (取复刚度系数为 $1+ig$ 的结果)^[11]。显然, 复刚度阻尼模型的结果, 即使在 g 很小时, 也不能很好地预测响应量, 而当 g 很小时 ($g \ll 1$), 等价线性化方法则给出了非常精密的近似; 从图 4 可以看到, 随着 g 值的增大, 位移均方响应的误差也在增大, 这表明了等价线性化方法的精度依赖于非线性项的大小。值得注意的是, 与模拟结果对比, 等价线性化得到的位移及速度均方响应中, 后者的精度较高。(图 4 中, 当 g 值增大时, 速度均方响应的近似程度几乎不变)。

图 5 是 Reid 模型在白噪声激励下, 无量纲位移一阶概率密度函数的模拟结果与高斯分布的比较。作图时用 σ_x 使其规格化, 因而对不同的参数 g , 密度函数都归结到同一条曲线。这里也可看出, 当 g 值很小时, 理论估计与模拟结果非常一致, 随着 g 值增大, 响应明显偏离 Gauss 分布, 特别表现在分布的“顶端”, 模拟结果远远小于理论值。

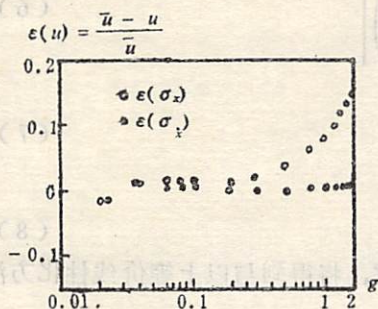


图 4 近似解误差比较

u : 等价线性化, \bar{u} : 模拟解

图 6 是响应移的功率谱密度函数, 其中实线是等价线性化结果; 虚线是模拟结果。模拟结果是根据响应样本的直接快速

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi^2 \left[1 + \left(\frac{4g^2}{\pi^2} - 2 \right) \omega^2 + \omega^4 \right]} \quad (9)$$

傅里叶变换 (FFT) 得到的, 并且采用了三角窗加权及分段平均的技巧, 以尽可能减少统计误差^[1,2]。从图中可见, 模拟得到的所有功率谱曲线, 形态上也基本类似于等效线性化的结果, 它的峰值仍然出现在 $\omega \approx \omega_n$ 处。对较小的 g 值 (如 $g=0.1$), 该峰值较为显著, 表明此时响应具有窄带性质。当 g 较大时 (如 $g=1.2$), 峰值消失, 响应为宽带性质。

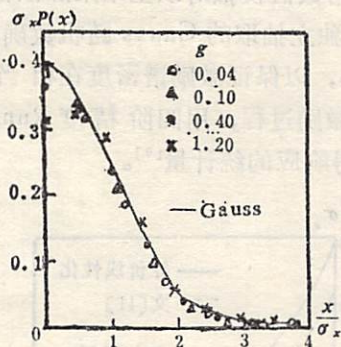


图 5 概率密度函数模拟与 Gauss 分布比较

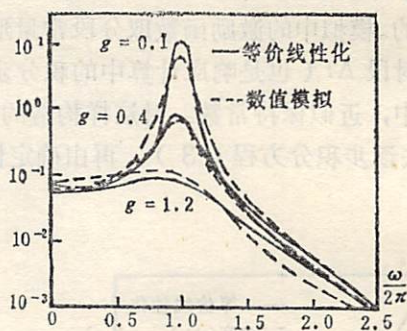


图 6 响应位移功率谱密度函数近似解与模拟结果比较

富里叶变换 (FFT) 得到的, 并且采用了三角窗加权及分段平均的技巧, 以尽可能减少统计误差^[1,2]。从图中可见, 模拟得到的所有功率谱曲线, 形态上也基本类似于等效线性化的结果, 它的峰值仍然出现在 $\omega \approx \omega_n$ 处。对较小的 g 值 (如 $g=0.1$), 该峰值较为显著, 表明此时响应具有窄带性质。当 g 较大时 (如 $g=1.2$), 峰值消失, 响应为宽带性质。

5 结论

所论滞变阻尼系统的非线性特性取决于无量纲参数 g 。当 g 值很小时, (例如使 $g < 0.2$), 系统对平稳理想 Gauss 白噪声的位移响应, 仍可认为服从 Gauss 分布, 此时等价线性化方法对位移和速度的均方值均能提供较为精密的理论估计 (结合所用数值模拟方法的精度来判断, 误差不超过 5%)。当 g 值较大时, 非线性效应较为明显, 位移响应不再是 Gauss 分布, 等效线性化处理带来的误差也将较大。考虑到 g 值小的情况 (弱阻尼情况) 在实践中最为常见, 公式 (8) 和 (9) 可以作为这种情况下的一个实用公式。

参 考 文 献

[1] Soroka, W.W., *J. Aero. Sci.*, 16 (1949), 409.

- [2] Myklestad, N.O., *J. Appl. Mech.*, 19 (1952), 284.
- [3] Bishop, R.E.D., *J. R. Aero. Soc.*, 59 (1955), 738.
- [4] Reid, T.J., *J. R. Aero. Soc.*, 69 (1956), 283.
- [5] Caughey, T.K. & Vijayaraghavan, A., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 5(1970), 533.
- [6] Caughey, T.K. & Vijayaraghavan, A., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 11(1971), 127.
- [7] Caughey, T.K., *J. Acoust. Soc. Amer.*, 35 (1963), 1706.
- [8] Iwan, W.D. & Spanos, P-T., *J. Appl. Mech.*, ASME, 45 (1978), 171.
- [9] Bendat, J.S. & Piersol, A.G., *Random Data: Analysis and Measurement Procedure*, Wiley-Interscience, NY, (1971), 257.
- [10] 卢耘耘, 有限滑动体系的随机响应(近似方法及数字模拟), 中国科学技术大学硕士学位论文, 1984.
- [11] Robson, J.D., *An Introduction to Random Vibration*, Edinburgh at the University Press, London, (1963), 33.
- [12] Rabiner, L.R. & Gold, B., *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1975), 189.

Random Response of an Oscillator with Hysteresis Damping

Lu Yunyun Chen Du

(Department of Modern Mechanics)

Abstract

The random response of an oscillator with hysteresis damping under a stationary Gauss white excitation is studied. By means of computer simulation, the mean square response, probability density function and power spectral density function for the response are given.

Key words: hysteresis damping, random response, numerical simulation.

激波管平衡边界层的数值解

徐立功 王中东

(近代力学系)

摘 要

本文研究了激波管中运动激波诱导的可压缩层流边界层。以氮气为试验气体，在强激波 Mach 数下，给出了平衡真空气体效应时的一种数值方法，并在 $M_1 = 2 \sim 12$ 的范围内得出了边界层内的速度分布和速度梯度分布以及温度分布和温度梯度分布的计算结果。还讨论了粘性因子 $l(\eta) = \rho\mu/(\rho\mu)$ 对层流边界层特性的影响。

关键词：边界层，激波管，平衡流，真实气体效应。

1 前言

在实际激波管流动中，由于气体的粘性效应，管壁上会形成运动激波诱导的非定常边界层，它随着运动激波的运动而发展（如图 1a 所示）。激波诱导边界层的存在，是引起运动

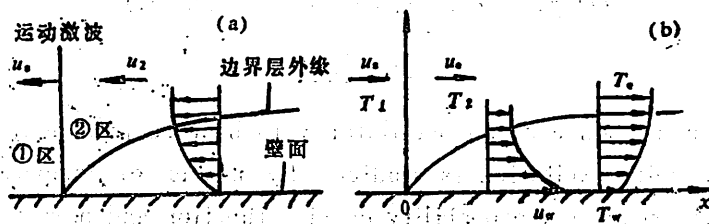


图 1 激波管壁面边界层

激波衰减、波后气体非均匀和激波风洞有效试验时间缩短的根本原因。Mirels^[1]计算了理想情况下（比热比 $\gamma = 1.4$, $\rho\mu = \text{常数}$ ）层流边界层的速度和温度分布，这种计算方法只适用于弱激波诱导的边界层。后来，他又利用经验公式将这种方法推广至强激波诱导的边界层^[2]。Mirels 的研究均以空气作介质。实际上用激波管作气体动力学研究时常用氮气作为试验气体，本文直接根据高温氮气的热物化特性，用数值方法，求解了氮气平衡边界层，并与 Mirels 的结果进行了比较。

1987年11月28日收到。

2 边界层方程

如果把坐标系取在运动激波上(见图1b),那么激波管壁面的非定常边界层流动转化成定常问题。在这一坐标系中,激波前的来流速度 u_0 和壁面速度 u_w 相同,激波后的边界层外缘速度为 u_0 。对于等截面的直激波管,假定激波后的壁面温度 T_w 是常数,那么不计轴向压力梯度的真实气体层流平衡边界层方程^[6]为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3)$$

相应的边界条件是:

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ 时, } u(x,0) &= u_w, v(x,0) = 0, T(x,0) = T_w \\ y \rightarrow \infty \text{ 时, } u(x,\infty) &= u_0, T(x,\infty) = T_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 k 和 μ 分别为试验气体的导热系数和粘性系数, c_p 为定压比热。上述方程对流体性质的变化未作任何假定。然而,考虑到真实气体效应时,上述方程组并不封闭,还须补充气体的热力学关系式。对氮气而言,不同温度范围的热力学关系为:

当 $T < 3000\text{K}$ 时,氮气可视为热完全气体,其定压比热 c_p 的表达式^[3]是

$$c_p = a + bT \quad (\text{J/kg} \cdot \text{K}) \quad (5)$$

式中 $a = 995.67$, $b = 0.15249$ 。当 $3000\text{K} \leq T \leq 8000\text{K}$ 时,氮气出现明显的离解。描述离解氮气的状态方程是

$$p = (1 + \alpha) \rho RT \quad (6)$$

式中 α 为离解度, $R = 296.94 \text{ (J/kg} \cdot \text{K)}$ 为氮气的气体常数。对于平衡流动,离解度由压力 p 和平衡常数 $K_p(T)$ 确定^[4],其关系式是:

$$\alpha = \left[\frac{K_p(T)}{4p + K_p(T)} \right]^{1/2} \quad (7)$$

和

$$K_p(T) = C T \exp(-113200/T) \quad (\text{N/m}^2) \quad (8)$$

其中 $C = 1.4966 \times 10^8$ 。这一温度范围内的定压比热由

$$c_p = dh/dT \quad (9)$$

确定。离解氮气的热焓表达式为

$$h = \frac{7 + 3\alpha}{2} RT + \frac{(1 + \alpha) R \theta_0}{\exp(\theta_0/T) - 1} + \alpha R \theta_0 \quad (10)$$

式中 $\theta_0 = 3390\text{K}$ 为氮气的振动特征温度, $\theta_d = 113200\text{K}$ 为氮气的离解特征温度。

3 相似变换和计算格式

引入新的独立变量

$$\left. \begin{aligned} \xi(x) &= (\rho\mu)_{\infty} u_c x \\ \eta(x, y) &= \frac{u_c}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

并取流函数 $\psi = \sqrt{2\xi} f(\eta)$, 使其满足

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v \quad (12)$$

这样, 上述边界层方程相似变换成下列形式:

$$\frac{d}{d\eta} \left(l \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(l c_p \frac{d\theta}{d\eta} \right) + P_r c_p f \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{P_r u_c^2}{T_c} l \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)^2 = 0 \quad (14)$$

边界条件变为

$$\left. \begin{aligned} \eta=0 \text{ 时, } f(0) &= 0, \quad f'(0) = \frac{u_v}{u_c}, \quad \theta(0) = \frac{T_w}{T_c} \\ \eta \rightarrow \infty \text{ 时, } f'(\infty) &= 1, \quad \theta(\infty) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中, $f'(\eta) = df/d\eta = u(\eta)/u_c$, $\theta(\eta) = T(\eta)/T_c$, Prandtl 数 $P_r = \mu c_p/k$, 粘性因子 $l(\eta) = \rho\mu/(\rho\mu)_{\infty}$. 利用 Sutherland 粘性公式, $l(\eta)$ 还可以表示为

$$l(\eta) = A(\alpha) \left(\frac{114 + T_w}{114 + T_c \theta(\eta)} \right) (T_c \theta(\eta)/T_w)^{1/2} \quad (16)$$

其中

$$A(\alpha) = \begin{cases} 1 & (T < 3000\text{K}) \\ (1 + c_{\infty}) / (1 + c_w) & (3000\text{K} \leq T < 8000\text{K}) \end{cases}$$

对方程 (13) 和 (14) 进行差分数值求解。首先将方程中的变量进行离散化, 这些变量分别记为: $f(\eta) = f_n$, $f'(\eta) = f'_n$, $f''(\eta) = f''_n$, $\theta(\eta) = \theta_n$, $\theta'(\eta) = \theta'_n$, $l(\eta) = l_n$, $c_p(\eta) = c_{p,n}$. 并取变步长 $\delta_n = (n+1)^2 \times 10^{-5}$. 以上 $n = 0, 1, 2, \dots$. 用差商逼近微商, 即

$$f'_n = (f_{n+1} - f_n) / \delta_n, \quad f''_n = (f'_{n+1} - f'_n) / \delta_n, \quad \theta'_n = (\theta_{n+1} - \theta_n) / \delta_n$$

从而得到边界层方程 (12) 和 (13) 的差分格式

$$l_{n+1} f''_{n+1} - l_n f''_n + \delta_n f_n f''_n = 0 \quad (17)$$

$$l_{n+1} c_{p,n+1} \theta'_{n+1} - l_n c_{p,n} \theta'_n + \delta_n P_r c_{p,n} f_n \theta'_n + \frac{P_r u_c^2}{T_c} \delta_n l_n (f''_n)^2 = 0 \quad (18)$$

而差分初值为 $f_0 = 0$, $f'_0 = \frac{u_v}{u_c}$, $\theta_0 = \frac{T_w}{T_c}$.

在数值计算过程中, 值指出的是: 方程中的 u_c , T_c 等边界层外缘参数 (即激波管②区参数), 可以通过正激波守恒方程和 (5) ~ (10) 诸关系式得到; 方程中的 f'_0 和 θ'_0 需要

以 $f''_{\infty} \rightarrow 1$ 和 $\theta_{\infty} \rightarrow 1$ 为判别条件, 在计算机上作反复的预估校正才能得到, 方程(17)与(18)是耦合的, 联立求解时要估算两个参数, 运算量太大。本文采用 $l(\eta)$ 分布迭代法^[5], 以 $\rho\mu = \text{常数}$ 作为初值, 取 $(l_{\infty})_0 = 1$, 由方程(17)和(18)解出 $(\theta_{\infty})_0$, 代入式(16), 得到 l_{∞} 的一次迭代值 $(l_{\infty})_1$, 再将 $(l_{\infty})_1$ 代入方程(17)和(18), ……以此过程反复循环, 直到 $|f''(0)_{i+1} - f''(0)_i| \leq 10^{-5}$ 和 $|\theta'(0)_{i+1} - \theta'(0)_i| \leq 10^{-5}$ 为止。计算结果表明, l_{∞} 趋于某一确定的分布。

4 计算结果和讨论

计算过程中, 取 $p_1 = 10132.5 \text{N/m}^2$, $T_1 = T_{\infty} = 298 \text{K}$, $c_w = 0$, $P_r = 0.72$, 运动激波 Mach 数的范围为 $M_1 = 2 \sim 12$ 。

1) 利用运动激波关系式和氮气的化学热力学特性(5)~(10)式, 计算得到的边界层外缘参数列于表1。与文献[3]对平衡空气的计算值相比, 两者的压力比 p_c/p_1 (或 p_2/p_1) 随 M_1 的变化值十分接近, 相对误差小于2%。然而两者的速度比 u_w/u_c (即密度比 ρ_w/ρ_c) 却有较大的差别, 图2画出了 u_w/u_c 随 M_1 的变化曲线, 随着 M_1 的增大, 两者的差别也增大, 这是由于在强激波情形下, 空气与氮气的离解特性不同造成的。

表1 边界层外缘参数

M_1	p_c/p_1	u_w/u_c	h_c/h_1	T_c/T_1
2	4.521	2.6934	1.7039	1.6785
4	18.774	4.8417	4.1264	3.8774
6	43.010	6.0069	8.1441	7.1601
8	77.166	6.6697	13.5123	11.5696
10	121.192	7.0678	20.5996	17.1471
12	175.049	7.3173	29.2621	23.9223

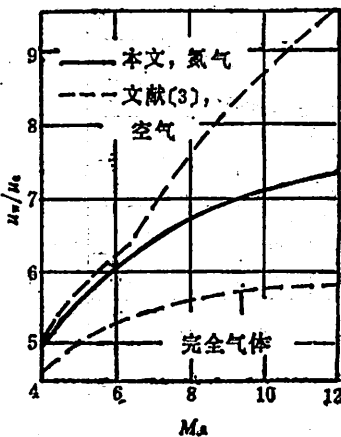


图2 边界层外缘速度随 M_1 的变化

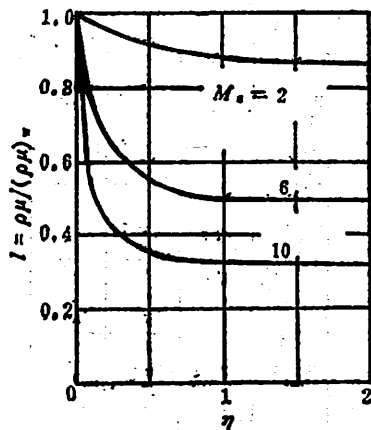


图3 粘性因子 $l(\eta)$ 在边界层内的分布

2) 文献[1]将方程(13)和(14)中的粘性因子 l 值假定为1, 即假定 $\rho\mu$ 在边界

层内为常数，这样做给解方程带来方便，但其解只能看作是弱激波情形的一种近似，不适用于强激波情形。图3是氮气边界层内粘性因子 $l(\eta) = \rho\mu/(\rho\mu)_\infty$ 的分布曲线。显然，随着 M_s 的增大， $l(\eta)$ 值对 $l=1$ 的偏离越大，由此可见在高 M_s 时，粘性因子 $l(\eta)$ 对边界层特性有重要影响（参看图4至图8），不能简单地认为 $l=1$ 。

3) 给定激波 Mach 数 M_s ，用上述差分方法可以解出氮气边界层内的速度分布 $f'(\eta) = u(\eta)/u_c$ ，速度梯度 $f''(\eta)$ ，温度分布 $\theta(\eta) = T(\eta)/T_c$ 和温度梯度 $\theta'(\eta)$ ，表2列出了 M_s 为6和10时的计算结果。由于在方程(2)中未考虑压力梯度项，所以这些结果适用于运动激波波后压力梯度较小的流动区域。

表2 边界层内的参数分布

η	$M_s = 6.0$				$M_s = 10.0$			
	$f'(\eta)$	$-f''(\eta)$	$\theta(\eta)$	$\theta'(\eta)$	$f'(\eta)$	$-f''(\eta)$	$\theta(\eta)$	$\theta'(\eta)$
0	6.007	10.384	0.1397	1.9116	7.068	16.042	0.05832	2.2536
0.10	4.978	10.057	0.3291	1.8100	5.484	15.305	0.1232	2.3099
0.20	4.012	9.032	0.5003	1.5377	4.047	12.867	0.5114	1.8846
0.40	2.489	5.741	0.7453	0.8691	2.091	6.098	0.7953	0.9098
0.60	1.614	2.780	0.8815	0.4376	1.290	1.899	0.9240	0.3695
0.80	1.217	1.098	0.9441	0.2121	1.061	0.442	0.9749	0.1333
1.00	1.067	0.368	0.9761	0.0970	1.010	0.0799	0.9928	0.0415
1.50	1.002	0.0122	0.9980	0.0095	1.000	0.0003	0.9998	0.0011
2.00	1.000	0.0001	0.9999	0.0005	1	0.0000	0.9999	0.0000
2.50	1	0.0000	0.9999	0.0000	1	0.0000	0.9999	0.0000
3.00	1	0.0000	0.9999	0.0000	1	0.0000	0.9999	0.0000

4) 图4和图5分别画出了边界层内的速度分布 $f'(\eta)$ 和温度分布 $\theta(\eta)$ 。图上同时

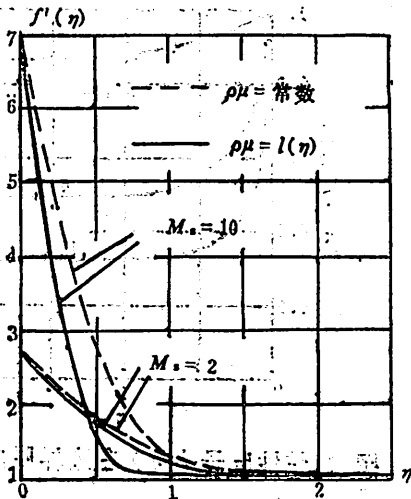


图4 边界层内的速度分布

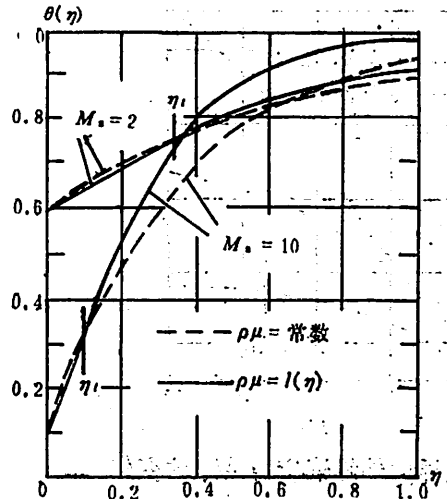


图5 边界层内的温度分布

画出了 $\rho\mu = \text{常数}$ (即 $l=1$) 的计算结果。两者之间有明显的差异, 并且随着 M_s 的增大差异增大。另外由图 5 可见, 在同一 M_s 下, 两条温度分布曲线相交, 若将交点的 η 坐标记为 η_c , 则 η_c 值随 M_s 的增大而减小。

5) 壁面摩擦力与壁面处的速度梯度成正比。激波管壁面速度梯度 $f''(0)$ 随 u_w/u_c 的变化示于图 6、随 M_s 的变化示于图 7。图中也画出了文献 [1] 的结果。由图可见, 粘性因子 $l(\eta)$ 的效应使 $f''(0)$ 的绝对值增大。对于 $\rho\mu = \text{常数}$ 的特殊情形, 本计算得到的 $f''(0)$ 随 u_w/u_c 变化曲线与文献 [1] 相重合 (见图 6), 这是显而易见的, 因为这种情形下两者的守恒方程及其边界条件相同 (见方程 (13) 至 (15))。然而, 在同一 M_s 下本计算与文献 [1] 的 $f''(0)$ 值却不相同 (见图 7), 这是由于不同介质的 u_w/u_c 值不同所造成的。

6) 壁面传热率与壁面处的温度梯度 $\theta'(0)$ 成正比。 $\theta'(0)$ 随 M_s 的变化示于图 8。由图可见, 在同一 M_s 下粘性因子 $l(\eta)$ 的效应使 $\theta'(0)$ 减小。

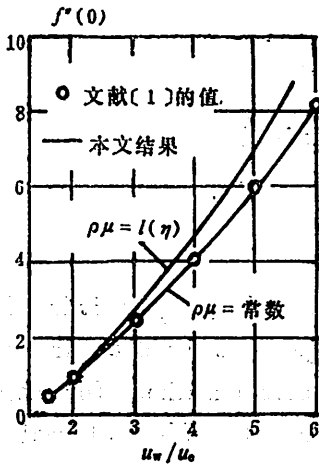


图 6 壁面速度梯度

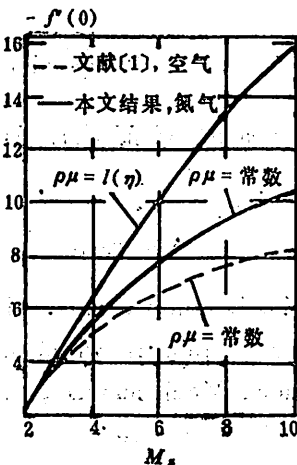


图 7 壁面速度梯度随 M_s 的变化

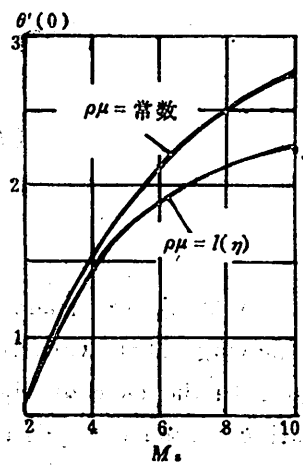


图 8 壁面温度梯度随 M_s 的变化

5 结论

①用激波管作气动研究时, 在强激波情形下, 由于试验气体固有的振动松弛特性和离解特性, 因此用不同介质作试验气体时所得到的气动参数和边界层特性是不同的。以氮气和空气为例, 虽然两者的压力值相接近, 但两者的粘性力和气动热有较大的差异。在同一 M_s 下, 激波管壁面氮气平衡边界层的壁面速度梯度 $f''(0)$ 和温度梯度 $\theta'(0)$ 值大于理想空气边界层的值。

②在激波管边界层研究中, 粘性因子 $l(\eta) = \rho\mu/(\rho\mu)_w$ 对边界层特性有重要影响, 与 $\rho\mu = \text{常数}$ 的结果相比, $l(\eta)$ 的效应使 $f''(0)$ 增大, $\theta'(0)$ 减小。

参 考 文 献

- [1] Mirels, H., NACA TN-3401, 1955.
- [2] Mirels, H., Boundary Layer Research, Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics (edited by Gortler, H.),

Springer Verlag, Berlin, 1958, 283—293.

- [3] 激波风洞实验室, 中国科学技术大学学报, 10 (1980), 68—98.
- [4] Vincenti, W.G. and Kruger, Jr. C.H., Introduction to Physical Gas Dynamics, John Wiley, New York, 1965, 157—177.
- [5] Prolstorin, R.F., *Jet Propulsion*, 26 (1956), 497—499.
- [6] 卞荫贵, 钟家康, 高温边界层传热, 科学出版社, 北京, 1986, 87—90

A Numerical Method for Calculating the Equilibrium Boundary Layer in a Shock Tube

Xu Ligong Wang Zhongdong

(*Department of Modern Mechanics*)

Abstract

A study was made of the laminar compressible boundary layer induced by a moving shock wave in a shock tube in which nitrogen was used as the test gas. In the case of high shock Mach number, a numerical method for calculating a kind of equilibrium boundary layer considering the effect of real gases is given. Numerical results of velocity and temperature profiles as well as velocity and temperature gradients at the wall are presented for a wide range of shock Mach number from 2 to 12. The effect of viscous factor $l = \rho\mu / (\rho\mu)_\infty$ on the boundary layer properties is also discussed.

Key words, boundary layer, shock tube, equilibrium flow, effect of real gas.

任意形状截面的均匀介质柱体的电磁散射

蒋嘉翔

(无线电电子学系)

摘 要

本文使用等效原理建立了描述均匀有损介质体的电磁散射的微分—积分方程组。在二维介质柱体情况下,用数值方法—矩量法,求解了这一积分方程组。对于圆形及矩形截面形状给出了介质柱体表面等效电流及磁流分布的计算结果并加以验证和讨论。

关键词: 电磁散射, 积分方程, 数值方法, 矩量法。

1 引言

关于任意形状介质体的电磁散射问题,已经有若干种方法处理,其中比较典型的有感应极化法^[1]、扩展边界条件法^[2]、互易相关法^[3]和表面源的积分方程法^[4],尤以积分方程法最为基本及便于应用。

我们知道,当电磁波被理想导体散射时,只要知道了导体表面的感应电流密度,就可以通过面电流的面积分求得散射场。在已知入射场的情况下,这个表面电流分布可以通过求解磁场积分方程(MFIE)或电场积分方程(EFIE)(它们的区别在于使用导体表面的不同边界条件)来确定。在介质体的情况下,我们可以在介质体表面定义一等效表面电流,与此同时,将会有一等效表面磁流出现,电场边界条件及磁场边界条件必须同时被满足。采用与导体散射的积分方程相同的建立方法,我们可以建立介质体散射的积分方程,只是未知函数为表面电流密度及表面磁流密度两者,构成一个由两个方程组成的微分—积分方程组。

本文从等效原理出发,使用位函数表达场,从而得到一组微分—积分方程,然后将介质体简化为二维情况,即任意形状截面而轴向无限延伸的柱体,将外加激励场分成两种情况,即相对于柱体轴向仅有横向磁场的TM和仅有横向电场的TE情况。应用数值方法—矩量法来求解方程组,其中含有未知量的微分的项是通过展开函数及试验函数的适当选择来解决

的。本文给出了两种典型截面形状的介质柱体等效表面电流及磁流的分布的具体计算结果。

2 微分-积分方程组的建立

原始散射的结构如图 1 (a)。外加激励的简谐电流及磁流源为 J^i 及 M^i ，其所产生的入射电场及磁场为 E^i 及 H^i ；均匀有损介质的结构参数为 μ_b, ϵ_b ，而介质体外空间的参数为 μ_a, ϵ_a ； \hat{n} 为介质体表面 S 指向外部空间的单位法线向量。按照等效原理^[5]，我们可以建立对原始散射的两个电磁等效模型：介质体外部区域等效模型及介质体内部区域等效模型。在前一模型中，见图 1 (b)，等效源 J_a 及 M_a 由 S 面上的入射场与散射场的切向分量唯一地确定

$$J_a = \hat{n} \times (H_a^s + H^i)$$

$$M_a = (E_a^s + E^i) \times \hat{n}$$

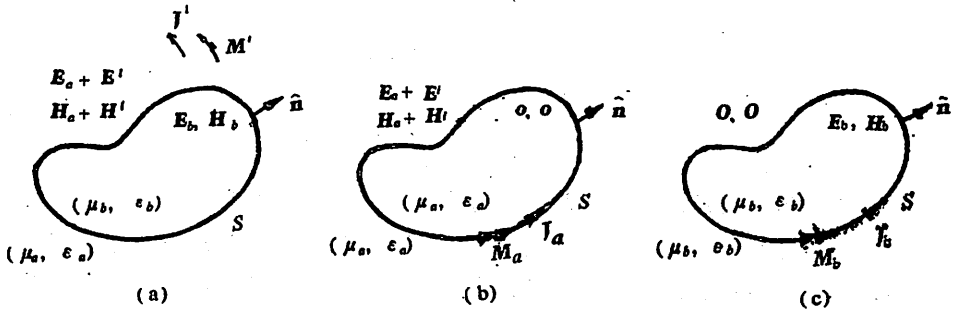


图 1 (a) 原始散射；(b) 介质体外部区域的等效模型；
(c) 介质体内部区域的等效模型

在后一等效模型中 (图 1 (c))，等效源 J_b 及 M_b 是由 S 面上散射场的切向分量确定，

$$J_b = \hat{n} \times (-H_b^s)$$

$$M_b = (-E_b^s) \times \hat{n}$$

由于原始散射中介质体表面 S 上电磁场切向分量的连续性条件，我们可将两个等效模型中 S 面上的电磁等效源连系起来，得

$$J_a = -J_b \text{ 及 } M_a = -M_b$$

于是，入射场和散射场在 S 面上所满足的关系式为

$$-(E_a^s + E_b^s) \times \hat{n} = E^i \times \hat{n} \quad (1a)$$

$$-\hat{n} \times (H_a^s + H_b^s) = \hat{n} \times H^i \quad (1b)$$

等效电流或磁流所产生的电场或磁场都可以借助均匀媒质的磁矢量位 A 及电矢量位 F 来表达 (假定所有场量的时间因子被表达为 $e^{i\omega t}$ ， ω 为角频率)：

$$E_r^s(J_a) = -j \frac{\omega}{K_r^2} (K_r^2 + \nabla \nabla \cdot) A_r(J_a)$$

$$E_r^s(M_a) = -\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times F_r(M_a)$$

$$H_r^s(J_a) = \frac{1}{\mu_r} \nabla \times A_r(J_a)$$

$$\vec{H}_r^s(M_s) = -j \frac{\omega}{K_r^2} (K_r^2 + \nabla \nabla \cdot) \vec{F}_r(M_s)$$

应当注意的是，由于含有旋度算子的各项的值在越过边界时将是不连续的，因此下标为 r 的量的旋度计算是取场点在参数为 μ_r 和 ϵ_r 的区域内趋近于边界的极限情况来完成的，这些极限的详细计算过程见文献 [6]。

对于二维散射体情况，均匀媒质的磁矢量位及电矢量位可分别表达为

$$\vec{A}_r(J_s, \rho) = \frac{\mu_r}{4j} \int_c J_s(\rho') H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) dl'$$

$$\vec{F}_r(M_s, \rho) = \frac{\epsilon_r}{4j} \int_c M_s(\rho') H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) dl'$$

上列各式中， $K_r = \omega \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ ， r 分别代表下标 a 或 b ， c 为柱体截面的边界轮廓线。 ρ 及 ρ' 分别表示场点及源点的矢径， $H_0^{(2)}$ 代表零阶第二类 Hankel 函数。

在以下的讨论中，我们将外加激励场区分为 TM 及 TE 两种情况，分别对应于入射电场或入射磁场仅有轴向分量的情况。

对于 TM 激励， $J_s = J_z \hat{z}$ 和 $M_s = M_z \hat{z}$ ，使用磁及电矢量位的表达式可以得到散射场的积分表达：

$$E_{rz}^s(J_s, \rho) = -\frac{K_r \eta_r}{4} \int_c J_z(\rho') H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) dl'$$

$$H_{rz}^s(M_s, \rho) = -\frac{K_r}{4\eta_r} \int_c M_z(\rho') (\hat{z} \cdot \hat{l}') H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) dl'$$

$$-\frac{1}{4K_r \eta_r} \frac{d}{dl} \int_c \frac{d}{dl'} M_z(\rho') H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) dl'$$

$$E_{\theta z}^s(M_s, \rho) = \frac{M_z(\rho)}{2} + \frac{K_a}{4j} \int_c M_z(\rho') \cos\theta' H_1^{(2)}(K_a |\rho - \rho'|) dl'$$

$$E_{\phi z}^s(M_s, \rho) = -\frac{M_z(\rho)}{2} + \frac{K_b}{4j} \int_c M_z(\rho') \cos\theta' H_1^{(2)}(K_b |\rho - \rho'|) dl'$$

$$H_{\theta z}^s(J_s, \rho) = \frac{J_z(\rho)}{2} + \frac{K_a}{4j} \int_c J_z(\rho') \cos\theta' H_1^{(2)}(K_a |\rho - \rho'|) dl'$$

$$H_{\phi z}^s(J_s, \rho) = -\frac{J_z(\rho)}{2} + \frac{K_b}{4j} \int_c J_z(\rho') \cos\theta' H_1^{(2)}(K_b |\rho - \rho'|) dl'$$

以上各式中， $H_1^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|)$ 为一阶第二类 Hankel 函数， $\cos\theta = \hat{n} \cdot \hat{n}$ ， $\cos\theta' = \hat{n}' \cdot \hat{n}$ ，这里 $\hat{n} = (\rho - \rho') / |\rho - \rho'|$ ， \hat{n}' 及 \hat{n} 分别为边界轮廓线上源点及场点的外向法线单位向量， \hat{l}' 及 \hat{l} 分别表示边界线上源点及场点的切向单位向量， η_r 为 r 媒质中的波阻抗。

对于 TE 激励， $J_s = J_z \hat{z}$ 和 $M_s = M_z \hat{z}$ ，同样可得到散射场的积分表达公式，这里从略。

将上述散射场的各表达式代入从等效原理得到的 (1) 式，就可建立起以下描述介质柱体散射问题的微分-积分方程组。

TM 激励:

$$\int_c J_z(\rho') \left[\sum_{r=a,b} \frac{K_r \eta_r}{4} H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' + \int_c M_z(\rho') \cdot \left[\frac{j}{4} \cos \theta' \sum_{r=a,b} K_r H_1^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' = E_z^i(\rho) \quad (2a)$$

$$\int_c J_z(\rho') \left[\frac{j}{4} \cos \theta \sum_{r=a,b} K_r H_1^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' + \int_c M_z(\rho') \left[\frac{1}{4} (\hat{l}' \cdot \hat{l}) \sum_{r=a,b} \frac{K_r}{\eta_r} H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' + \frac{d}{dl} \int_c \frac{d}{dl'} M_z(\rho') \cdot \left[\sum_{r=a,b} \frac{1}{4K_r \eta_r} H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' = H_z^i(\rho) \quad (2b)$$

TE 激励:

$$\int_c M_z(\rho') \cdot \left[\sum_{r=a,b} \frac{K_r}{4\eta_r} H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' - \int_c J_z(\rho') \cdot \left[\frac{j}{4} \cos \theta' \sum_{r=a,b} K_r H_1^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' = H_z^i(\rho) - \int_c M_z(\rho') \left[\frac{j}{4} \cos \theta \sum_{r=a,b} K_r H_1^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' + \int_c J_z(\rho') \left[\frac{1}{4} (\hat{l}' \cdot \hat{l}) \sum_{r=a,b} K_r \eta_r H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' + \frac{d}{dl} \int_c \frac{d}{dl'} J_z(\rho') \left[\sum_{r=a,b} \frac{\eta_r}{4K_r} H_0^{(2)}(K_r |\rho - \rho'|) \right] dl' = E_z^i(\rho)$$

这些方程组的右端项为外加激励场, 外加激励可以从区域 a 入射的平面波或者为放置于区域 a 任何位置的线源。为了简化, 我们假定外加激励为以入射角 ϕ' 从区域 a 入射的平面波。对于 TM 情况, 入射场为

$$E_z^i = E_0 e^{iK_a(x \sin \phi' + y \cos \phi')} \\ H_z^i = H_0 [-(\hat{l} \cdot \hat{x}) \cos \phi' + (\hat{l} \cdot \hat{y}) \sin \phi'] e^{iK_a(x \sin \phi' + y \cos \phi')}$$

TE 情况, 入射场为

$$E_z^i = E_0 [(\hat{l} \cdot \hat{x}) \cos \phi' - (\hat{l} \cdot \hat{y}) \sin \phi'] e^{iK_a(x \sin \phi' + y \cos \phi')} \\ H_z^i = H_0 e^{iK_a(x \sin \phi' + y \cos \phi')}$$

3 数值解方法

我们在这里以 TM 激励的情况为例说明矩量法求解积分方法组 (2) 的方法, TE 激励的情况可以用类似的方法得到解决。

首先, 介质柱体的截面边缘轮廓线 c 用长度为 Δ 的 N 个直线段来近似。等效表面电流 J_z 和磁流 M_z 用三角形函数展开:

$$I_n(\rho) = \sum_{n=1}^N J_n A_n(\rho)$$

$$M_n(\rho) = \sum_{n=1}^N M_n A_n(\rho)$$

其中的 J_n 和 M_n 是待求的复数常量, A_n 是如下定义的三角形函数

$$A_n(\rho) = \begin{cases} 1 - \frac{|\rho - \rho_n|}{\Delta}, & \rho \in (\rho_{n-1}, \rho_{n+1}) \\ 0 & \rho \text{ 为其余值} \end{cases}$$

在积分方程组的第一个方程(2a)中, 对中心位于 I_n 的子线段使用点匹配方法, 可以导出一 N 元代数方程组

$$\sum_{n=1}^N J_n S_{mn}^{ee} + \sum_{n=1}^N M_n S_{mn}^{em} = F_m^e \quad (m=1, 2, \dots, N)$$

其中

$$S_{mn}^{ee} = \frac{1}{4} \int_{I_{n-1}}^{I_{n+1}} A_n(\rho') \left[\sum_{r=a,b} K_r \eta_r H_0^{(2)}(K_r |\rho_n - \rho'|) \right] dl'$$

$$S_{mn}^{em} = \frac{j}{4} \int_{I_{n-1}}^{I_{n+1}} A_n(\rho') \cos \theta' \left[\sum_{r=a,b} K_r H_1^{(2)}(K_r |\rho_n - \rho'|) \right] dl'$$

$$F_m^e = E_z^i(\rho_n)$$

式中的 ρ' 为源点的矢径, ρ_n 为第 m 段子线段中点的矢径 (见图 2)。

第二个方程 (2b) 为一二阶微分-积分方程, 当磁流 M_n 用三角形函数展开时, 它的一阶导数有如下的形式:

$$\frac{d}{dl} M_n(\rho) = -\frac{1}{\Delta} \sum_{n=1}^N M_n [\Pi_{n+1}(\rho) - \Pi_{n-\frac{1}{2}}(\rho)]$$

这里的 $\Pi_{n \pm \frac{1}{2}}(\rho)$ 是矩形函数

$$\Pi_{n \pm \frac{1}{2}}(\rho) = \begin{cases} 1 & \rho \in (\rho_n, \rho_{n \pm 1}) \\ 0 & \rho \text{ 为其余值} \end{cases}$$

在方程 (2b) 中应用上述关系, 再以矩形函数 Π_n 试验此方程, 然后对场点求出一阶导数, 我们就可以获得另一个 N 元代数方程组。

$$\sum_{n=1}^N J_n S_{mn}^{ee} + \sum_{n=1}^N M_n S_{mn}^{em} = F_m^e \quad (m=1, 2, \dots, N)$$

其中

$$S_{mn}^{em} = \frac{j}{4} \int_{I_{n-1}}^{I_{n+1}} A_n(\rho') \cos \theta \left[\sum_{r=a,b} K_r H_1^{(2)}(K_r |\rho_n - \rho'|) \right] dl'$$

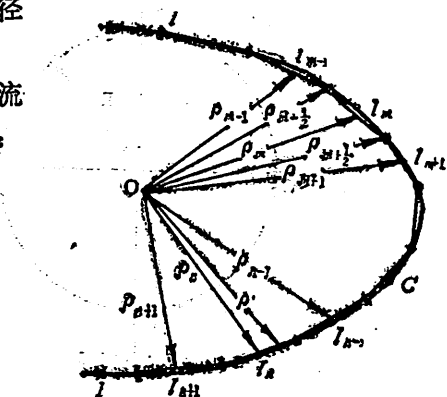


图 2 介质柱体截面边界轮廓线的直线段近似及矢径表示

$$S_{mn}^{mm} = \frac{1}{4} \int_{l_{n-1}}^{l_{n+1}} (i \cdot l') A_n(\rho') \left[\sum_{r=a,b} \frac{K_r}{\eta_r} H_0^{(2)}(K_r |\rho_n - \rho'|) \right] dl' \\ + \frac{1}{4\Delta^2} \int_{l_{n-1}}^{l_n} \sum_{r=a,b} \frac{1}{K_r \eta_r} [H_0^{(2)}(K_r |\rho_{n+\frac{1}{2}} - \rho'|) - H_0^{(2)}(K_r |\rho_{n-\frac{1}{2}} - \rho'|)] dl' \\ - \frac{1}{4\Delta^2} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \sum_{r=a,b} \frac{1}{K_r \eta_r} [H_0^{(2)}(K_r |\rho_{n+\frac{1}{2}} - \rho'|) - H_0^{(2)}(K_r |\rho_{n-\frac{1}{2}} - \rho'|)] dl' \\ F_m^m = H_0^m(\rho_n)$$

这里的 $\rho_{n \pm \frac{1}{2}}$ 表示第 m 个子线段与第 $m \pm 1$ 个子线段交点的矢径, 如图 2 所示。

上述两个代数方程组的组合, 即可获得一个 $2N$ 元的代数方程组, 以矩阵形式可表示为

$$\begin{bmatrix} S_{nn}^{ee} & S_{nn}^{em} \\ S_{nn}^{me} & S_{nn}^{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_n \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n^e \\ F_n^m \end{bmatrix}$$

用数值方法求解这一代数方程组是十分方便的。

4 结果及讨论

我们对两种典型的介质柱体用上节所述方法数值计算得到了柱体表面等效电流及磁流的分布状况。这两种均匀有损介质柱体的截面形状为圆形及矩形, 其尺寸如图 3 所示, 在所有情况下我们把介质体及外部空间的磁导率选为相同 ($\mu_o = \mu_s$), 将区域 a 选为无损的自由空间 ($\epsilon_s = \epsilon_o$), 介质柱体的相对介电常数为 ϵ_r ($\epsilon_s = \epsilon_r \epsilon_o$), 计算可得的表面电流或磁流分别用入射平面波的磁场幅值 H_o 或电场幅值 E_o 归一化。

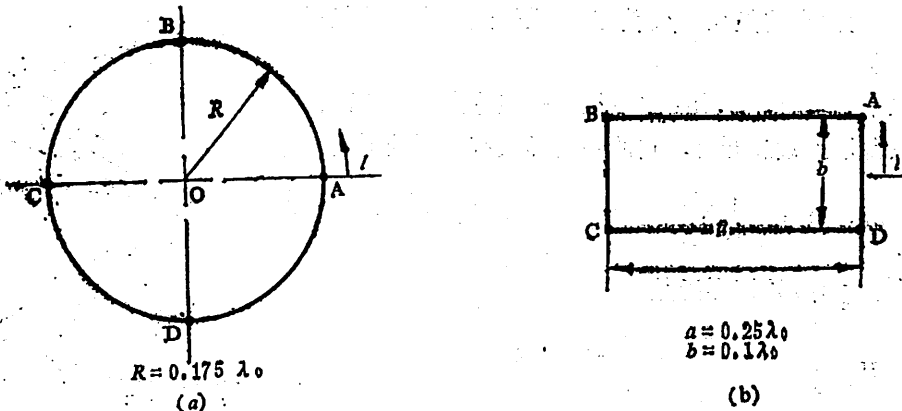


图 3 二种不同形状截面的介质柱体的选择
(a) 圆形; (b) 矩形 (λ_o 为入射平面波自由空间波长)

图 4 和图 5 给出了介质圆柱表面的等效电流及磁流的幅值分布及相位分布, 同时给出了同样参数的圆柱表面的电磁流的解析解也就是级数解^[5]的计算结果。数值解与解析解之间的良好符合可以证明本文所采用的方法的正确性。

从图 6 中可以观察到, 在柱体表面的折点 (矩形截面的 A、B、C、D 点, 图 3), 表面电流 J_s (TM 情况) 或表面磁流 M_s (TE 情况) 将出现不连续, 这一现象可以用所谓“楔形条件”^[7]来解释。当从介质楔形的两个边趋向顶点时, 其表面横向磁场 (TM 情况) 或横

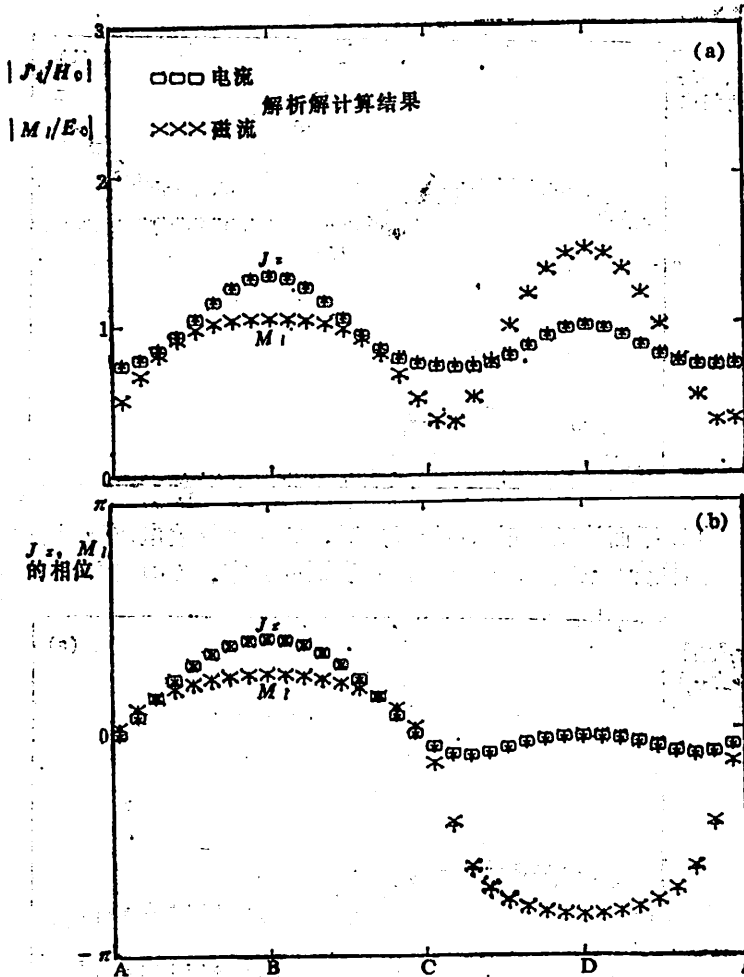
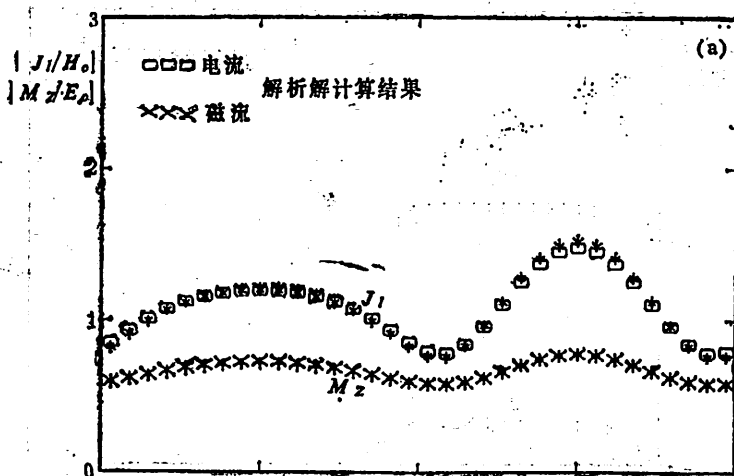


图 4 TM 平面波正入射 ($\phi' = 0$) 时, 归一化等效电流及磁流在圆柱介质体 ($\epsilon_r = 4 - j0.5$) 表面的分布, (a) 幅值, (b) 相位



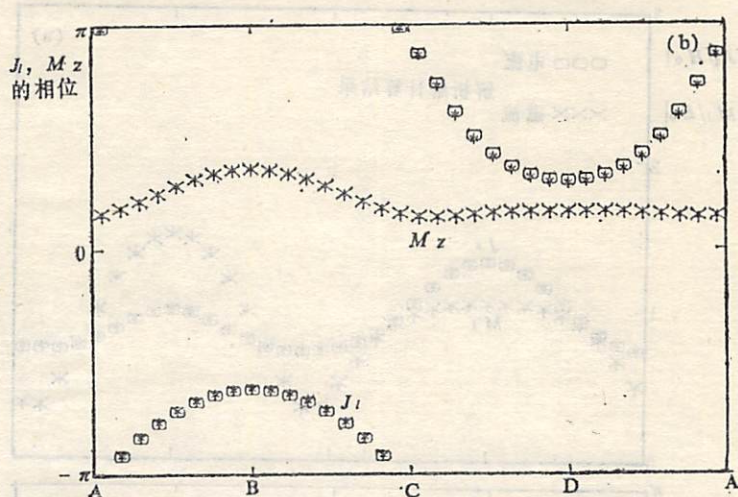


图 5 TE 平面波正入射 ($\phi^i = 0$) 时, 归一化等效电流及磁流在圆柱介质体 ($\epsilon_r = 4 - j0.5$) 表面的分布。(a) 幅值; (b) 相位

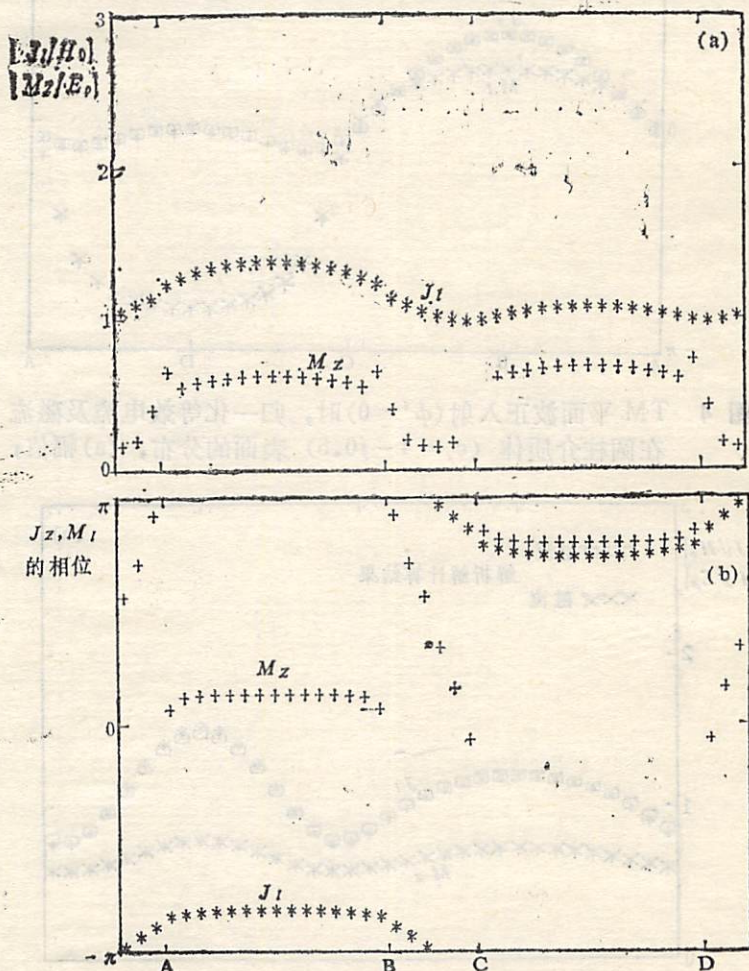


图 6 TE 平面波正入射 ($\phi^i = 0$) 时, 归一化等效电流及磁流在矩形介质柱体 ($\epsilon_r = 4 - j0.5$) 表面的分布。(a) 幅值; (b) 相位

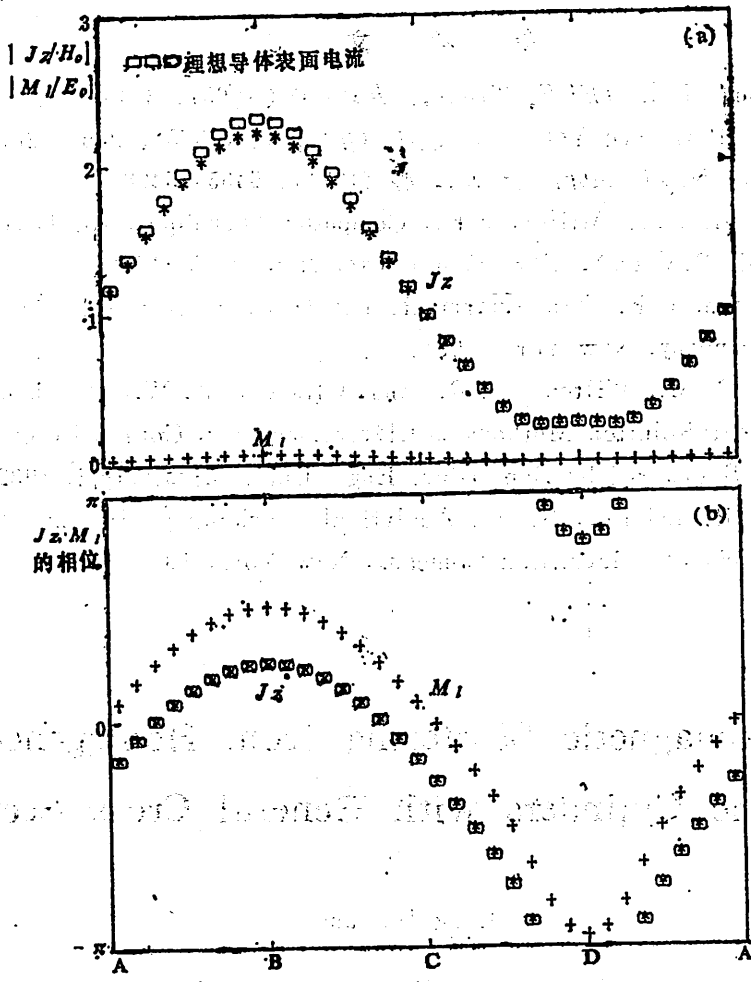


图 7 TM 平面波正入射 ($\phi' = 0$) 时, 归一化等效电流及磁流在圆柱介质体 ($\epsilon_r = 1 - j1000$) 表面的分布。(a) 幅值; (b) 相位

向电场 (TE 情况) 将趋近于不同的值, 于是使拐点成了 J_z 或 M_1 的间断点。在理想导体的情况下, TM 入射场的表面电流 J_z 在拐点将趋于无穷大, 这是与介质体的情况不同的。

作为本文方法的一种检验, 我们考虑一种极限情况, 即把介质体的相对介电常数的实部选为 1 而虚部选为很大的数值 ($\epsilon_r = 1 - j1000$), 这接近于理想导体的情况, 图 7 表示了 TM 激励的计算结果, 其中的 M_1 接近于零, 而 J_z 十分接近理想导体的电流值, 这说明本文的计算方法适用于从介质体到导体的所有情况。

在本文的完成过程中, 作者曾与 C.M. Butler 教授进行过多次有益的讨论, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Richmond, J.H., *IEEE Trans.*, AP-13 (1965), 334—341.
- [2] Barber, P.W. and Yeh, C., *Appl. Opt.*, 14 (1975), 2864—2872.
- [3] Okamoto, N., *J. Appl. Phys.*, 42 (1971), 5465—5468.
- [4] Poggio, A.J. and Miller, E.K., *Computer Techniques for Electromagnetics* (ed. R.Mitra), Pergamon Press, New York, 1973.
- [5] Harrington, R.F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
- [6] Butler, C. M., Wilton, D. R. and Glisson, A. W., *Fundamentals of Numerical Solution Methods in Electromagnetic*, Course Notes for Short Course Sponsored by Dep. Elec. Eng., Univ. Mississippi, 1982.
- [7] Mittra, R. and Lee, S. W., *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*, Macmilian Company, New York, 1971.

Electromagnetic Scattering from Homogeneous Dielectric Cylinders with General Cross Section

Jiang Jiexiang

(Dept. of Radio and Electronics)

Abstract

A set of surface integral equations for problems involving electromagnetic scattering from homogeneous lossy dielectric bodies is developed via the equivalence principle. For two-dimensional dielectric bodies a numerical method for solving the set of equations is developed. For circular and rectangular cylinders, data are presented, verified and discussed for selected parameters.

Key words: electromagnetic scattering, integral equation, numerical method, moment method.

Dispersion Characteristics of Thick Fin Lines

—Finite Element Analysis

Xu Shan-jia

(Department of Radio and Electronics)

Abstract

The dispersion characteristics of various fin-line structures are calculated by the method of finite element, with a particular attention directed to the effect of the fin thickness on the guided wavenumber. A new scheme of element division is developed. The computer program based on the finite element method is generally applicable to structures of any fin-line configurations. The results are compared with those previously obtained for the idealized case of vanishing thickness to develop a general rule of the effect of the fin thickness. Experimental results are also given to confirm the theory.

Key words: thick fin-line, dispersion, finite element method.

1 Introduction

In recent years the fin-line structures have been more extensively used in microwave and millimeter wave integrated circuits. Various methods for calculating the propagation characteristics of fin-lines have been published. Some dispersion curves or effective dielectric constants for fin-lines are available in the literature^[1-3]. A blemish in an otherwise perfect thing is that zero fin thickness is assumed by most authors. Only little has been published so far on the effect of finite metallization thickness on the dominant and higher order modes in fin-lines^[4,5], and the previously employed methods are difficult or much complicated for the development of a universal program that

Received Oct., 22, 1987.

*The Project Supported by Natural National Science Foundation of China.

is applicable to a large class of the fin-lines of practical interest. The purposes of this paper are two-fold: one is to develop a unified computer program which can be used in analyzing dispersion characteristics for various kinds of fin-lines, slab loaded waveguides and ridged waveguides. The other is to present numerical data to illustrate the effect of finite fin thickness on the dispersion characteristics.

Evidently, fin-line structures can be viewed as ridged waveguides filled with inhomogeneous dielectrics. The dispersion calculation of the former can be ended in the solution of eigenvalue problem for the latter. Starting with solving eigenvalue problem of waveguides filled with inhomogeneous dielectrics, the dispersion characteristics are calculated by the unified finite element analyzing program for various types of fin-lines with zero fin thickness. The calculated results are quite consistent with those obtained by other methods, and the experimental results of dispersion for the unilateral fin-line are in good agreement with computed results which the fin thickness is considered, the proposed program is thus proved to be reliable and useful.

2 Finite Element Analysis

In general, the eigenmodes in guided wave structures filled with inhomogeneous dielectrics are hybrid modes which possess both longitudinal electric and magnetic field components. These longitudinal fields are coupled at the boundaries between dielectrics so that the eigenvalue problem for such a class of wave-

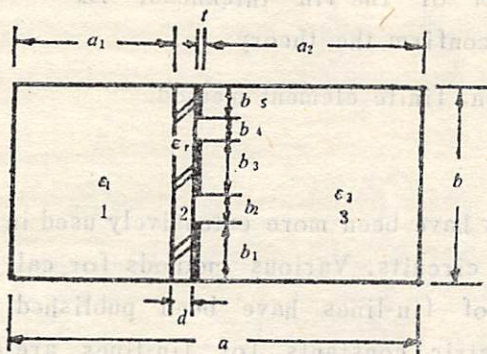


Fig. 1 Cross section view of unilateral double slot fin-line

guide structures generally requires two scalar functions, here taken to be the longitudinal component $\phi_p = H_{z,p}$ and $\psi_p = \frac{\omega \epsilon_0}{\beta} E_{z,p}$. Fig. 1 shows the cross sectional geometry of a unilateral double slot fin-line. The dielectric substrate divides the cross section into three subregions. In each of these subregions p , scalar functions ϕ_p and ψ_p satisfy Helmholtz equation

$$\begin{aligned} \nabla_{z,p}^2 \phi_p + K_{z,p}^2 \phi_p &= 0 \\ \nabla_{z,p}^2 \psi_p + K_{z,p}^2 \psi_p &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$K_{z,p}^2 = k^2 \epsilon_{r,p} - \beta^2 = \chi^2 / \epsilon_{r,p} \quad (2)$$

$$\epsilon_{r,p} = (\epsilon_0 - 1) / (\epsilon_0 - \epsilon_{r,p}) \quad (3)$$

$$\epsilon_{r,p} = (\beta/k)^2 \quad (4)$$

$$\chi^2 = k^2 - \beta^2 \quad (5)$$

where ∇_t^2 is the transverse Laplacian operator; k is wavenumber in free space; β is propagation constant of hybrid mode; χ is its eigenvalue; ϵ_0 is effective dielectric constant and $\epsilon_{,p}$ is relative dielectric constant in subregion p . Where $\epsilon_{,p}$ is a computing parameters. Obviously, here $p=1, 2, 3$; $\epsilon_1 = \epsilon_{,1}\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_{,2}\epsilon_0$, $\epsilon_3 = \epsilon_{,3}\epsilon_0$, $\epsilon_{,1} = \epsilon_{,3} = 1.0$, $\epsilon_{,2} = \epsilon_{,p}$, where ϵ_0 is dielectric constant in free space.

In the matrix form, the two equations in (1) can be written as:

$$\sum_{p=1}^3 \left(\begin{bmatrix} \epsilon_{,p} \nabla_t^2 & 0 \\ 0 & \epsilon_{,p} \epsilon_{,p} \epsilon_{,p} \nabla_t^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_p \\ \Psi_p \end{pmatrix} + \chi^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_{,p} \epsilon_{,p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_p \\ \Psi_p \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (6)$$

On the waveguide wall Ω , the tangential electric field and normal magnetic field are zero, i. e.

$$\left. \frac{\partial \phi_p}{\partial n} \right|_{\Omega} = 0 \quad (7)$$

$$\Psi_p|_{\Omega} = 0 \quad (8)$$

whereas at the dielectric interfaces the tangential electric and magnetic fields, which are proportional to Ψ_p and ϕ_p , must be continuous from one region to another, i. e.

$$\phi_{,p}, \Psi_{,p}, \epsilon_{,p} \left(\omega \mu_0 \frac{\partial \phi_p}{\partial n} - \frac{\beta^2}{\omega \epsilon_0} \frac{\partial \Psi_p}{\partial l} \right), \epsilon_{,p} \beta \left(\epsilon_{,p} \frac{\partial \Psi_p}{\partial n} + \frac{\partial \phi_p}{\partial l} \right)$$

are continuous at the dielectric interfaces. The symbols l and n are, respectively, the tangential and normal directions along an interface and $n \times l = i_z$, where i_z is the unit vector along the z axis. All transverse field components are derivable from the longitudinal electric and magnetic fields as follows:

$$E_{,p} = \frac{j \epsilon_{,p}}{\chi^2} \omega \mu_0 [i_z \times \nabla_t \phi_p - \epsilon_{,p} \nabla_t \Psi_p] \quad (9)$$

$$H_{,p} = -j \frac{\epsilon_{,p}}{\chi^2} [\epsilon_{,p} i_z \times \nabla_t \Psi_p + \nabla_t \phi_p] \quad (10)$$

Eq.(6) together with above mentioned boundary conditions constitutes the eigenvalue problem of waveguide filled with inhomogeneous dielectrics. It has been proved that this eigenvalue problem is equivalent to the variational problem of the following functional^[6]:

$$J(\phi, \Psi) = \sum_p [J_1(\phi_p, \Psi_p) + J_2(\phi_p, \Psi_p) - \chi^2 J_3(\phi_p, \Psi_p)] \quad (11)$$

where

$$J_1(\phi_p, \Psi_p) = \frac{1}{2} \left[\epsilon_{,p} \int_p |\nabla_t \phi_p|^2 ds + \epsilon_{,p} \epsilon_{,p} \epsilon_{,p} \int_p |\nabla_t \Psi_p|^2 ds \right] \quad (12)$$

$$J_2(\phi_p, \Psi_p) = \epsilon_{\sigma p} \epsilon_{\tau p} \int_{S_p} \mathbf{i}_z \cdot (\nabla_t \Psi_p \times \nabla_t \phi_p) ds \quad (13)$$

$$J_3(\phi_p, \Psi_p) = \frac{1}{2} \left[\int_{S_p} |\phi_p|^2 ds + \epsilon_{\sigma p} \epsilon_{\tau p} \int_{S_p} |\Psi_p|^2 ds \right] \quad (14)$$

In finite element analysis, the primary dependent variables are replaced

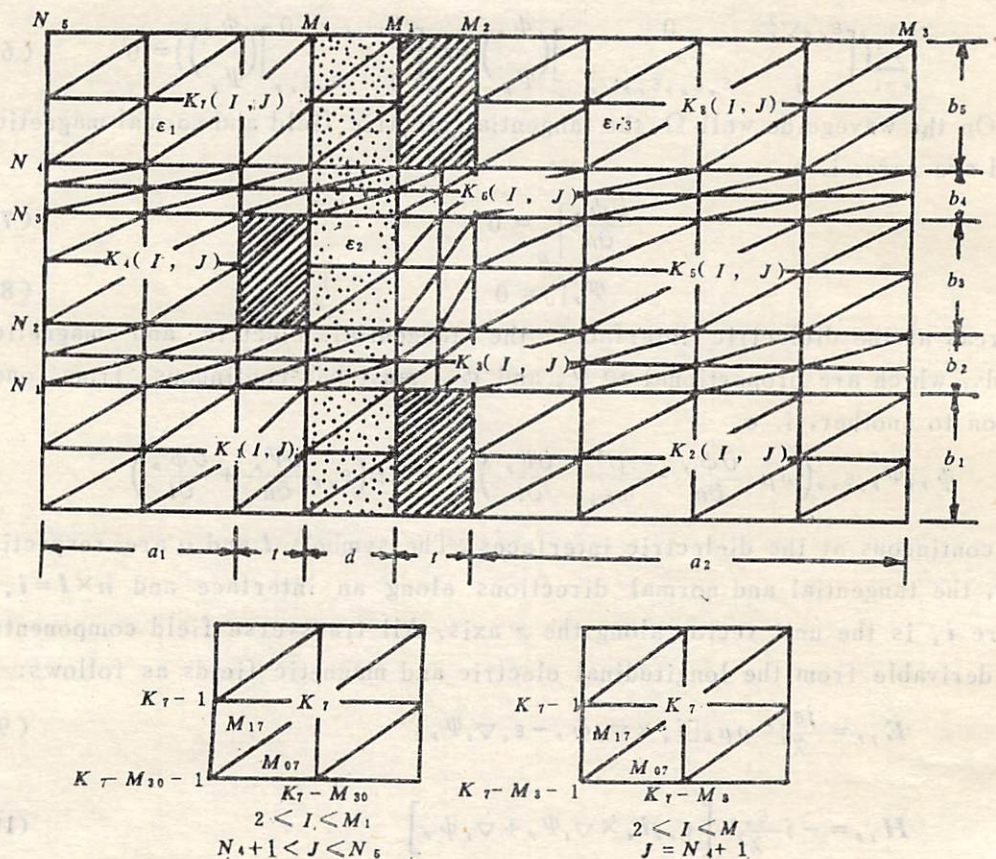


Fig.2 Geometrical divisions for a antipodal double slot fin-line

by a system of discretized variables over the domain of consideration. Therefore, a discretization of the original domain into many subregions is an essential procedure. For the present analysis, a more advantageous division technique for making universal program is given. For example, as shown in Fig. 2, the cross section of the antipodal double slot fin-line is divided into 8 rectangular regions. Each of these regions is discretized into a number of smaller

triangular subregions interconnected at a finite number of points called nodes. The size of every triangle called element depends on selecting different division number $M_1, M_2, M_3, M_4, N_1, N_2, N_3, N_4$ and N_5 , so that it can flexibly be controled to increase the number of nodes in the key or regions of interest and reduce the nodes in the others, in order to represent the physical behavior properly.

The relations between the node labels K_7 , (for 7th rectnagular area) and I and J , the discrete variables of X, Y directions, are found:

$$\left. \begin{aligned} K_7 &= M_{3,0} * (N_3 + N_1 - N_2 - N_4 - 3 + J) + M_3 * (N_2 - N_1 + N_4 - N_3 + 2) + I \\ 1 \leq I \leq M_1, N_4 + 1 \leq J \leq N_5 \\ K_7 &= M_{3,0} * (N_3 + N_1 - N_2 - 2) + M_3 * (N_2 - N_1 - N_3 + 1 + J) + I \\ 1 \leq I \leq M_1, J = N_4 \\ M_{3,0} &= M_3 - M_2 + M_1 + 1 \end{aligned} \right\} (15)$$

and the relations between element labels and node and vertex lables of the triangle are determined by:

$$M_{0,7} = 2 * (M_3 - 1) * (N_4 + N_2 - N_3 - N_1) + 2 * (M_{3,0} - 2) * (N_3 + N_1 - N_2 - N_4 - 2 + J) + I - 1$$

$$M_{1,7} = M_{0,7} + M_{3,0} - 2$$

$$L(1, M_{0,7}) = L(1, M_{1,7}) = \begin{cases} K_7 - M_{3,0} - 1 & (J \neq N_4 + 1) \\ K_7 - M_3 - 1 & (J = N_4 + 1) \end{cases}$$

$$L(2, M_{0,7}) = \begin{cases} K_7 - M_{3,0} & (J \neq N_4 + 1) \\ K_7 - M_3 & (J = N_4 + 1) \end{cases}$$

$$L(3, M_{0,7}) = L(2, M_{1,7}) = K_7$$

$$L(3, M_{1,7}) = K_7 - 1$$

$$2 \leq I \leq M_1, N_4 + 1 \leq J \leq N_5$$

where $L(i, M_{0,7})$ ($i=1,2,3$) denotes the i -th vertex lable of the element labled as $M_{0,7}$. Similar formulae can be obtained for other rectangular regions. The total number of nodes K_n and elements K_m are

$$K_n = M_{3,0} * (N_3 + N_1 - N_4 - N_2 + N_5 - 2) + M_3 * (N_2 + N_4 - N_3 - N_1 + 2)$$

$$K_m = 2 * ((M_3 - 1) * (N_4 - N_3 + N_2 - N_1) + (M_{3,0} - 2) * (N_3 - N_4 + N_2 - N_2 + N_1 - 1))$$

After finishing the division of the domain, let eigenfunction ϕ_i and Ψ_i be interpolated linearly over each triangular element. This can be expressed as:

$$\phi_i^e = \sum_i^3 N_i^e(x, y) \phi_i \quad (17)$$

$$\Psi_e^i = \sum_j N_j^i(x, y) \Psi_j^i \quad (18)$$

where ϕ_j^i and Ψ_j^i are the nodal values of eigenfunctions in e -th element. The $N_j^i(x, y)$ is interpolate base function in triangle e . For linear interpolate, one can obtain

$$N_i^i(x, y) = (a_i + b_i x + c_i y) / (2\Delta e) \quad (i=1, 2, 3) \quad (19)$$

where Δe is area of triangle e , and the constant coefficients a_i , b_i , and c_i can be determined by the Cartesian coordinates.

Substituting Eq. (19) into Eq. (11) and integrating over the element's area, one can show that variational problem is discretized by finite element method as follows^[6]:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{e=1}^{K_m} ([A_{1\phi}^e](\phi^e) + [A_{2\psi}^e](\Psi^e) - \chi^2 [B_\phi^e](\phi^e)) &= 0 \\ \sum_{e=1}^{K_m} ([A_{1\psi}^e](\Psi^e) + [A_{2\phi}^e](\phi^e) - \chi^2 [B_\psi^e](\Psi^e)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

where (ϕ^e) and (Ψ^e) are eigenfunctions in e -th element. The element coefficient matrices $[A_{1\phi}^e]$, $[A_{1\psi}^e]$, $[A_{2\phi}^e]$, $[A_{2\psi}^e]$, $[B_\phi^e]$ and $[B_\psi^e]$ are given by

$$\left. \begin{aligned} (A_{1\phi}^e)_{ij} &= (b_i b_j + c_i c_j) \epsilon_{e,r} / 4\Delta e \\ (A_{1\psi}^e)_{ij} &= (b_i b_j + c_i c_j) \epsilon_{e,r} \epsilon_{e,s} / 4\Delta e \\ (A_{2\phi}^e)_{ij} &= (c_i b_j - c_j b_i) \epsilon_{e,r} \epsilon_{e,s} / 4\Delta e \\ (A_{2\psi}^e)_{ij} &= (b_i c_j - c_i b_j) \epsilon_{e,r} \epsilon_{e,s} / 4\Delta e \\ (B_\phi^e)_{ij} &= (1 + \delta_{ij}) \Delta e / 12 \\ (B_\psi^e)_{ij} &= (1 + \delta_{ij}) \epsilon_{e,r} \epsilon_{e,s} \Delta e / 12 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

where $i, j = 1, 2, 3; \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

According to the initial input information, including division, geometric and physical parameters, i. e. $M_1, M_2, M_3, M_4, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, t, d, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5; \epsilon_{r,1}, \epsilon_{r,2}$ and $\epsilon_{r,3}$, computer will automatically number the labels of nodes, elements and vertices of the triangles. After determining the coordinates of all the nodes, the computer will analyze every element on the basis of Eq. (21) and sum the contributions of all the elements over the regions of the fin-line cross section through Eq. (20), which gives the following generalized algebraic eigenvalue problem

$$[A](u) = \chi^2 [B](u)$$

where $[A]$ and $[B]$ are $2K_e \times 2K_e$ square symmetrical band matrices. $2K_e$ equations arise because both ϕ and Ψ must be used at each point. It is

defined here that vector (u) , and (ϕ) and (Ψ) have the relation:

$$(u) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{K_n} \\ \Psi_{K_n+1} \\ \vdots \\ \Psi_{2K_n} \end{pmatrix}$$

So far, the matrices $[A]$ and $[B]$ can not be used as the coefficient matrices of the deterministic problem, because Eq.(8) is a constraint boundary condition. Hence the matrices $[A]$ and $[B]$ must be modified. There are several technique to treat matrices $[A]$ and $[B]$ for constraint boundary condition. In order to avoid renumbering the lables of the nodes, here the $[A]$ and $[B]$ could be modified by computer in the following way:

$$A_{ij} = B_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ but } i \text{ or } j = h_s, \\ & K = 1, 2, \dots, m; \quad i, j = 1, 2, \dots, 2K_n. \\ 1 & i = j, \quad i = h_s \end{cases}$$

where m denotes the numbers of nodes which are on the metal boundary Q . The serial number of these nodes are, respectively, h_1, h_2, \dots, h_m .

Having modified the matrices $[A]$ and $[B]$, the computer will solve the generalized algebraic eigenvalue problem and output the eigenvalues χ^2 . Substituting χ^2 into Eq. (5), one can obtain the numerical solution of dispersion for ϵ_s . It can be seen from Eq. (21), matrices $[A]$ and $[B]$ are functions of ϵ_s . Thus Eq.(22) must be solved several times to obtain a dispersion curve.

3 Numerical Examples

The finite element formulae and program which has been developed in the previous section were applied to computing the dispersion characteristics of dominant and higher order modes in some fin-lines and other guided wave structures. The numerical results and the comparison with those obtained by other methods are given here.

Fig.3 and Fig.4 show, respectively, the dispersion of dominant and higher order modes in the unilateral fin-line with zero and finite fin thick. It indicates that the effective dielectric constant decreases because of the effect of the fin thickness. The reason for this is that the thickness of the fin

reduces the ratio of the field energy in the dielectric to that in the air. Also,

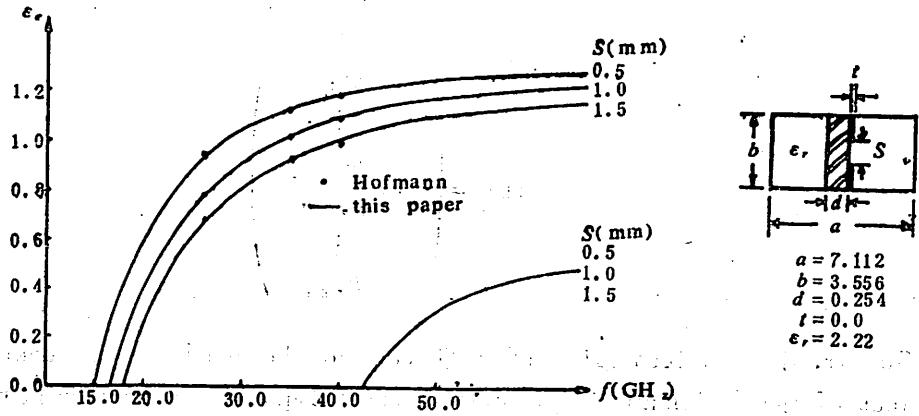


Fig. 3 Dispersion curves of the dominant and first higher order mode in the unilateral fin-line with zero fin thickness.

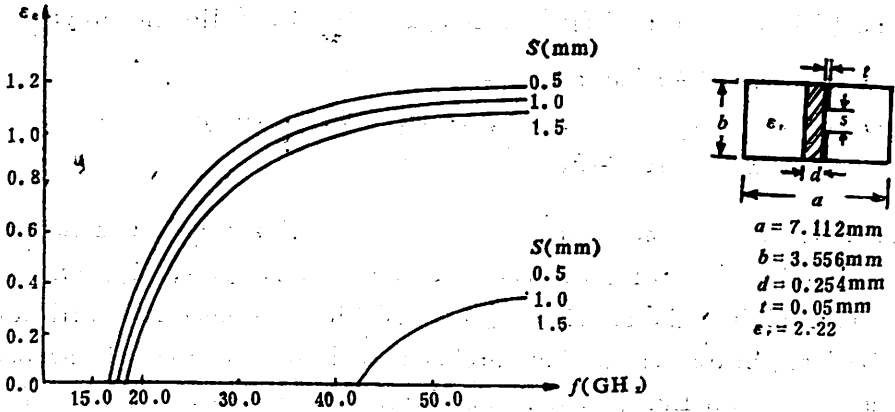


Fig. 4 Dispersion curves of the dominant and first higher order mode in the unilateral fin-line with fin thickness $t=0.05$ mm.

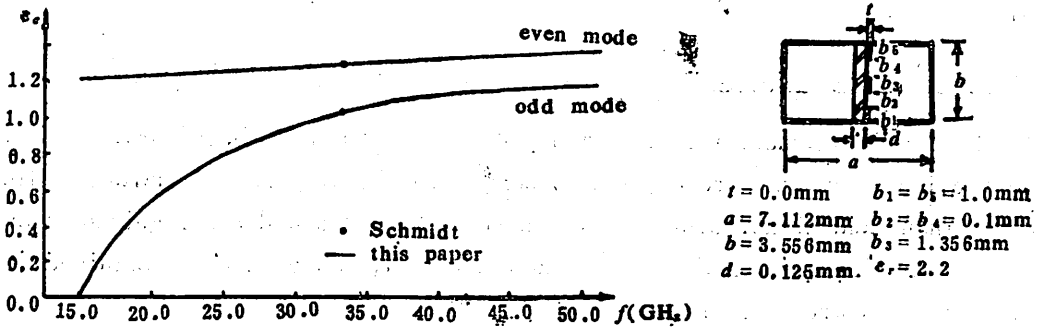


Fig. 5 Dispersion curves of the even and odd modes in the symmetrical unilateral double slot fin-line

this reduction of the ratio rises while the slot is narrowed, hence the smaller

is the slot, the greater is the decrease of the effective dielectric constant. Fig.3 also shows the comparison between the finite element results and Hofmann's. The agreement is good.

Fig. 5 shows the dispersion characteristics of symmetrical unilateral fin-line with two slots. In this kind of fin-line, the even or odd hybrid mode can be excited depending on different exciting conditions. When the structure is symmetrical, the plane $y=b/2$ is magnetic wall for even exciting and is electric wall for odd exciting. Taking advantage of this property, one can simplify the computing procedure. It can be seen in Fig.5 that the effective dielectric constant for even mode is larger than that for odd mode. This is because the field of even mode concentrates more densely in the substrate than the field of odd mode does. On the other hand, Fig.5 shows the dispersion of odd mode is stronger than that of even mode, for the former is nearer to the waveguide type mode, whereas the latter is much like the microstrip type mode.

If a magnetic wall is placed at $x=a/2$ in the unilateral fin-line, then the bilateral fin-line is formed. Also, if an electric wall is placed at $y=b/2$ in the antipodal double slot fin-line, the antipodal fin-line with single slot is formed. Fig.6 and Fig. 7 show respectively, the dispersion curves of dominant and higher order modes in bilateral fin-line and antipodal fin-line. The results have been compared with Schmidt's and Hofmann's and excellent agreement has been found. The dispersion curves for higher order modes are not available in some literature. These curves can be used to determine the single mode range of frequency. For practical applications, the knowledge of higher order modes is important, because a single mode operation is often required.

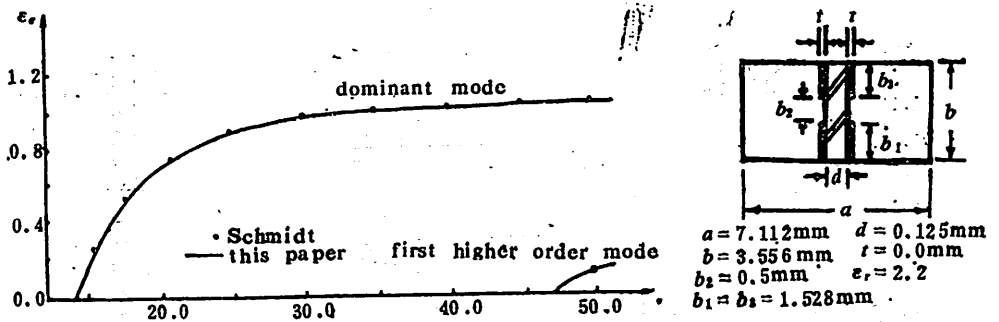


Fig.6 Dispersion curves of the dominant and first higher order mode in the bilateral fin-line

As the fin-line structure may be viewed as a ridged waveguide with dielectric or a slab loaded rectangular waveguide with fins, the unified program

proposed here can easily be used in dispersion calculation for ridged wave-

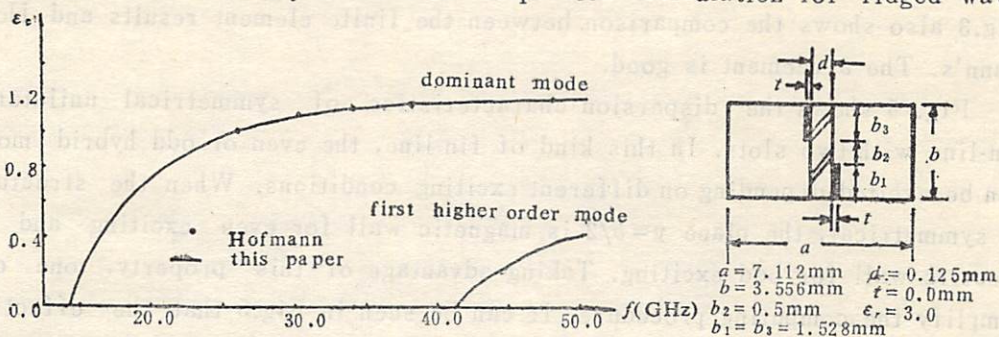


Fig. 7 Dispersion curves of the dominant and first higher order mode in the antipodal fin-line

guide, when $\epsilon_{r,2} = 1$, and for slab loaded rectangular waveguide, when slot width $s = b$. The results together with the comparison with those obtained by others are shown in Fig. 8 and Fig. 9. Again no noticeable differences can be seen.

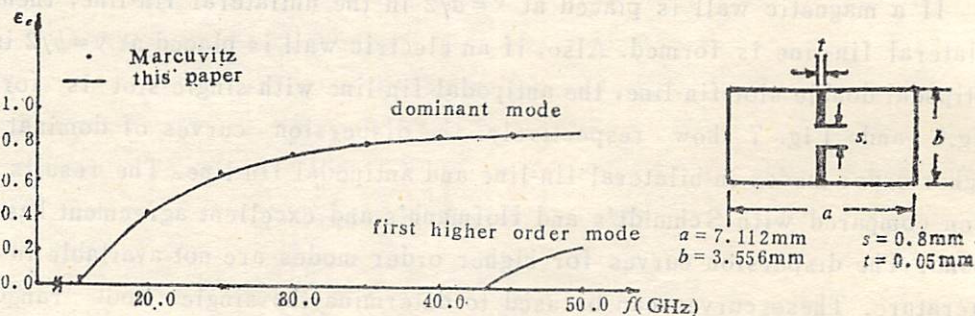


Fig. 8 Dispersion curves of the dominant and first higher order mode in the ridged waveguide.

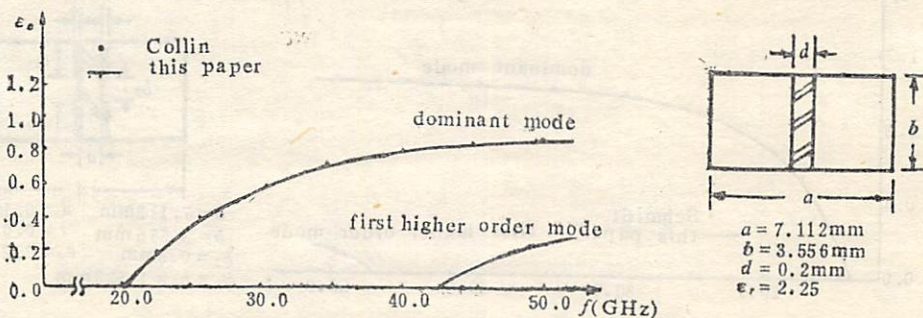


Fig. 9 Dispersion curves of the dominant and first higher order mode in the slab loaded rectangular waveguide.

Table 1 presents a comparison of the unilateral fin-line dispersion between measured and computed results which the fin thickness is considered. A good

agreement has been found, and the proposed program is thus proved to be reliable.

All the numerical examples given here are certainly not simple to reproduce the results which may be obtained using various approximation methods, but to provide a clear explanation, how flexible and useful the finite element analysis program proposed here.

Table 1 A comparison of ϵ_r for unilateral fin-line between measured and computed results which the fin thickness is considered.

f (GHz)	32.0	33.0	34.0	35.0	36.0	37.0	38.0
experiment	0.93	0.95	0.97	1.00	1.01	1.03	1.04
computation	0.94	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
discrepancy (%)	-1.06	-1.04	-1.02	1.01	1.00	1.94	1.96

4 Conclusion

We have demonstrated in this paper the versatility of the finite element method in the treatment of dispersion problem dealing with various fin-line and other guided wave structures.

Using the finite element method to analyze the transmission characteristics of various fin-lines is a more through way. Besides the generality of the program, the advantage of this method is that it can not only consider the effect of finite fin thickness but also, when needed, obtain the distributions of the hybrid modes and determine other parameters of interest, for example, impedance. In this way, it can give practical data for designing the millimeter wave integrated circuits and provide a basis for various improved designs. Of course, a computer with larger storage capacity and longer computing time is desired if this is to be achieved.

The author would like to thank Mr. Guan Shuzhu for the experimental data provided.

References

- [1] Hofmann, H., *IEEE-MTTS Symp. Dig.*, 1977, 381—384.
- [2] Schmidt, L. P. and Itoh, T., *IEEE Trans.*, MTT-29, 1981, 352—355.
- [3] Schmidt, L. P. and Itoh, T., *IEEE Trans.* MTT-28, 1980, 981—985.

- [4] Vahldiek, R., and Hofer, W., 1985. *IEEE-MTT S. Symp. Dig.*, 1985, 143—144.
- [5] Kitazawa, T. and Mittra, R., *IEEE Trans.*, **MTT-32**, 1984, 1484—1487.
- [6] Xu S. J., *Journal of Electronics*, 5 (1983), 6—15.
- [7] Marcuvitz, N., *Waveguide Handbook*, New York, McGraw-Hill, 1951.
- [8] Collin, R., *Field Theory of Guide Wave*, New York, McGraw-Hill, 1960.

厚鳍鱼鳍线的色散特性

——有限元分析

徐善驾

(无线电电子学系)

摘 要

用有限元法计算了各类鱼鳍线的色散特性,着重分析了鳍厚对导波波数的影响。提出了一种新的区域剖分法。根据有限元法编制的计算机程序适用于任何鱼鳍线结构。所得的结果与以前不考虑鳍厚的数据进行了比较,以给出鳍厚影响的规则。实验结果证实了理论的正确性。

关键词: 厚鳍鱼鳍线, 色散, 有限元方法。

岩石层消减中的密度反转效应

许天铭 刘文忠 陈静

(中国科学技术大学)

(中国科学院地球物理研究所)

摘 要

根据模型实验的相似理论设计了实验模型和实验方法。实验结果表明,由消减板片密度反转引起的垂直牵引力,一部分用于驱动板片消减入地幔,一部分可转换为岩石层的水平牵引力;建立了板块水平运动速度、岩石层的消减速度以及海沟移动速度之间的关系;还阐述了不同的 Benioff 带具有不同的倾角和消减深度的原因。这项实验工作为研究板块运动及其驱动机制问题提供参考。

关键词: 模型实验, 密度反转, 重力效应, Benioff 带的形态。

1 引言

板块构造理论对人类进一步认识和研究地球起了重要的作用。目前,对板块构造驱动机制问题尚认识不一,多数人持热对流驱动机制观点,少数人及我们持主动驱动机制观点(包括洋脊推力、重力滑移力和消减板片的拉力)。本文根据动力学相似理论设计了模型实验,并把实验的观测结果与对地球的观测事实作对比,成功地解释了地球物理的一些观测事实。这种成功反过来支持了板块运动的主动驱动机制。

海洋岩石层的密度反转和厚度的横向不均匀提供了岩石层消减的必要条件^[1-4],及消减先从密度反转最甚的地带开始的条件。但由于岩石层强度高,尚须再加其它条件才能继续消减入地幔。例如下面的这样一些条件。首先,岩石的密度反转持续时间 $t > 10^4 \text{ yr}$ ^[5]时,岩石的应变响应呈流体特性,这时可忽略弹性项的贡献(详细论证见文献[6])。重力不稳定引起的岩石层沉降随时间不断发展,导致岩石层消减入地幔。据此,本实验把消减运动作为粘性流体动力学问题来处理。其次,由于岩石层沉降和沉积物质的热屏蔽作用,使得岩石层底部温度升高,当温度升到 $300^\circ\text{C} - 400^\circ\text{C}$ 时,玄武岩相变为密度较大的榴辉岩^[7],从300

km 深开始又由榴辉岩转变为密度较大的石榴石岩。再次, 消减板片内部相对于地幔围岩是相对低温的, 简单热压缩也将引起密度差。综合以上各项效应, 消减板片和围岩的密度差大约为 $200\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, 就是因为这种密度差才使岩石层进入地幔以后仍可以继续消减, 直至被同化为止。

2 实验模型的设计

由于岩石层在消减前和整个消减过程中都存在密度反转现象, 故本实验模型在消减前、后都用同一种模型材料, 而且只需用岩石层和上地幔两层模型结构^[6]。又由于消减板片的密度差是地球内部温度、压力和相变诸因素综合影响的结果, 所以实验时不必再引进温度、压力和相变等因素。实验中, 令岩石层消减速度等于海底扩张速度, 为 $10\text{cm}\cdot\text{yr}^{-1}$ ^[7,8], 深度代表值为 10^3km , 如此便求得一个消减过程(从开始消减到被同化)的时间 10^7yr 。

2.1 模型动力学相似条件

根据江守一郎^[9]关于使模型与真型达到动力学相似的准则, 我们已在另文^[6]中推导出如下动力学相似条件:

$$C_\eta = C_\rho \cdot C_\rho \cdot C_l \cdot C_t \quad (1)$$

式中 C_x 为模型和真型关于物理量 x 之比, 称为基本相似比, η —岩石层粘性系数, ρ —岩石层密度, g —地球重力加速度, t —时间, l —岩石层几何形状线量代表值。

2.2 模型的结构

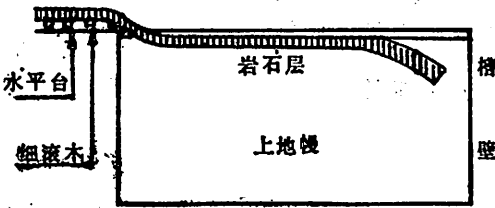


图 1 实验槽侧视图

本实验用的实验槽为透明的有机玻璃槽, 长、高、宽分别为 40、20 和 15cm, 图 1 是它的侧视图, 实验槽左侧为一水平台, 平台上有圆形滚木若干。

实验槽内盛有粘性流体, 用来模拟上地幔, 粘性流体表面上平放着岩石层, 它是由粘性较高的矩形软面片做成, 多余部分平放在平台的滚木上, 滚木与矩形软面片的长边垂直, 岩石层模型开始消减后产生的水平驱动力使得滚木滚动, 并不断向槽内输送新的岩石层。岩石层模型宽 15cm, 与实验槽宽度相等, 长 55cm, 大于实验槽的长度, 用以模拟岩石层厚度横向不均匀, 厚的一端为 1.2cm, 薄的一端为 0.6cm, 平均厚度 0.8cm, 洋脊一端密度为极小, 和流体密度相近。密度向另一端随距离线性增大, 用在单位体积内加入不同数量的小钢珠来实现, 直到厚的一端密度达到极大, 其平均密度比流体密度大 $200\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 。这样我们已使岩石层模型的二维几何形状和密度横向不均匀都和真实岩石层相似。

2.3 模型材料

我们用模型和真型的长度 L_0 和 L_1 求得几何相似比的代表值^[9]为

$$C_l = \frac{L_0}{L_1} = \frac{40}{2.5 \times 10^6} = 1.6 \times 10^{-7} \quad (2)$$

两型的密度代表值均取它们的极大值 $\rho_0 = 1270\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 和 $\rho_1 = 3500\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; 两型重力加速

度的代表值均取为 g ；两型消减时间代表值分别为 $t_0 = 10\text{min}$ （即模型实验时间）， $t_1 = 10\text{Myr}$ （真实岩石层消减时间）；真型的粘性系数代表值 η_1 取上限 $10^{24}\text{Pa}\cdot\text{s}$ 。根据上述代表值求得各自相似比，并把它们和 η_1 代入模型相似条件（1）式，使得粘性相似比 $C\eta = 1.3 \times 10^{-19}$ ，故可得岩石层模型的粘性常数应为

$$\eta_0 = \eta_1 \cdot C_\eta = 1.3 \times 10^5 \text{Pa}\cdot\text{s} \quad (3)$$

岩石层的模型材料是面粉加水揉成的软面片，它具有粘性可调、流动性和整体性好的优点。这样可使密度（加小钢珠后）和厚度横向不均匀得以模拟，并达到（3）式所要求的数值。上地幔的模型材料为粘性较高的洗发精，它具有粘性和密度可调且透明（便于拍照）的优点。这样可使模型中岩石层和上地幔的粘性之差和密度差同真实地球的情况一致。由于上地幔模型的厚度取值对实验结果无影响，故使上地幔模型的厚度（即实验槽深度）略厚一些。关于模型的初始条件、边界条件和相似性分析详见〔6〕。

3 实验过程、结果和实际意义

3.1 实验过程

图 2 是岩石层消减的模型运动过程的侧视照片。

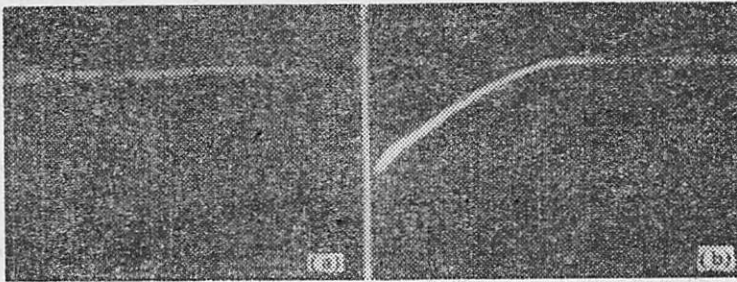


图 2 岩石层模型的消减过程

先把粘性流体倒入槽内，再把软面片平放在流体表面上，把多余部分放在槽左侧水平台的滚木上，软面片的两长边和实验槽壁相接触，所处状态如图 2 (a) 所示。模型中的白线为观测模型运动的标志。开始消减速度为零，计时由此开始，由于密度横向不均匀，所以消减先从具有密度极大值的一端（自由端）开始。这时，模型岩石层开始消减，消减板片倾角逐渐加大，并且出现水平移动。大约五分钟以后，沉入流体的消减板片和流体表面的交线出现弧形，这种交线叫做消减线。消减板片的形状逐渐形成与 Benioff 带^{〔10〕}具有相同特征的形状。全部消减过程大约 10 分钟完成。图 2 展现了模型岩石层消减的全过程中的两张照片。

3.2 实验结果及对观测事实的解释

3.3.1 消减线及其特性

消减线一经形成，便特别稳定，弧形变化很小，水平位移也不大。消减线是岩石层模型上所有质点进入流体（地幔）的必经之路。这样，消减线便模拟了真实地球的海沟，并且解释了为什么真实岩石层只能经过海沟才能消减入地幔，以及海沟为什么会呈现弧形等地球物理现象。

3.3.2 岩石层消减的力源和消减板片的牵引力

岩石层消减入地幔，地幔热对流说认为是被对流环的下降流的粘性力带动的，我们认为这是由于消减板片的密度反转效应引起的，其力源是重力场对剩余质量的引力。

实验观测到另一种现象，即软面片一边消减一边作水平运动。比较图 2 (a) 和 2 (b) 便会发现：在水平力的作用下，岩石层模型上的标志（短白线）相对于实验槽上的标志（长白线）的距离已经加大，实测结果表明岩石层模型水平运动了 10cm。在地球的真实情况下有洋脊扩张力和重力滑移力的贡献，但在我们的实验通过调节水平平台倾角把它们平衡掉了，故本文主要研究了消减板片的牵引力。岩石层模型的水平运动是垂直牵引力转化为水平牵引力的结果。如果消减线不后退，它将全部转化为水平牵引力，但是在流体的情况下消减线一般是运动的，因此这种转换是不完全的。在地球的实际情况下，水平牵引力的传递距离也有一定限制，这是因为板块的非完全弹性造成的。海沟轴附近两侧总是出现正断层型地震^[11]是对驱动板块的力源以垂直牵引力为主的支持。

3.3.3 岩石层的水平扩张速度、消减板片的消减速度与海沟的后退速度之间的关系

设岩石层在某时刻 t 的消减速度为

$$V_s = V_x + V_z \quad (4)$$

式中 V_x 和 V_z 分别为水平和垂直分量。 V_x 取决于水平驱动力（牵引力、洋脊推力和重力滑移力）、地幔粘性阻力和板块边界摩擦力等各种因素。 V_z 取决于剩余应力的垂直分量 ΔP ，即

$$\left. \begin{aligned} V_x &\propto \Delta P \\ \Delta P &= \Delta \rho g z \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 $\Delta \rho$ 为消减板片与上地幔围岩的密度差， z 为消减深度。可见密度差 $\Delta \rho$ 越大， V_x 越大。在我们实验中， $\Delta \rho$ 不变， V_x 随消减深度 z 而增大，表现为加速消减。根据我们的认识，当消减板片的前端到达 700km 深度后便被地幔同化，从这个时候起， V_x 将与深度无关，呈现为近乎匀速消减，即 $V_x = \text{常数}$ 。

实验和地球的观测事实都告诉我们，海沟也在移动。在考虑存在海沟移动 (V_h) 的情况下（设 V_x 保持不变），如图 3 所示，表达消减速度 V_s 的方程式应由 (4) 式改为

$$V_s^2 = (V_x + V_h)^2 + V_z^2 \quad (6)$$

而当 $V_h = 0$ 时，表面板块水平运动速度等于消减速度，因此有如下关系：

$$V_s^2 = V_x^2 + V_z^2 \quad (7)$$

由以上两式知：岩石层的消减速度在一般情况下不等于板块水平运动速度，其数值关系为

$$V_s^2 = V_x^2 + V_z^2 + 2V_x V_h \quad (8)$$

上式便是稳定消减过程中 V_s 、 V_x 和 V_h 的关系式。它清楚地告诉我们，在存在海沟后退的情况下，岩石层的消减速度并不等于表面板块的水平运动速度。

3.2.4 对消减板片具有不同倾角和消减深度的解释

模型实验中观测到另一现象就是消减板片的倾角随深度 z 和时间 t 在不断增大，但是尽管前端已经接触到实验槽底面，板片倾角也远不是 90° 。可以设想，如果消减速度不变，消减深度也不变（即前端不断被同化），则消减板片的倾角也将稳定不变，这是因为消减速度 V_s 导致的流动压力起着抬升作用^[12]。可见上述的岩石层的消减过程可以分为两个阶段，第一阶段为非定态消减阶段，第二阶段为定态消减阶段。

1) 岩石层的非定态消减阶段

在这一过程中,同一消减板片的倾角是深度 z 和时间 t 的函数。用 $\alpha(z, t)$ 表示有

$$\operatorname{tg} \alpha(z, t) = \frac{V_z(z, t)}{V_x(z, t)} = \frac{d_z(z, t)}{d_x(z, t)} \quad (9)$$

式中
$$V_x(z, t) = V_x(z, t) + V_b(z, t) \quad (10)$$

$$du(z, t) = dx(z, t) + db(z, t) \quad (11)$$

V_x 和 V_b 的意义如图 3 所示, dx , dz 和 db 分别为 (z, t) 时刻的板块位移的水平增量、垂直增量和海沟位移增量。这里, $V_x(z, t)$ 较稳定, 但消减速度 V_z 和垂直分量 $V_z(z, t)$ 则随 $\Delta\rho$ 和 Z 而增大。而 $Z = \int_0^z V_z(z, t) dt$, 所以消减板片的倾角 $\alpha(z, t)$ 也将随时间 t 而增大。

必须指出, 这里本应顾及压力流动的抬升作用, 之所以忽略它, 是因为它不会改变非定常消减的结论。

2) 岩石层的定常消减阶段

现在环太平洋和太平洋中的海沟下的岩石层绝大多数都处于定常消减过程中, 在这种情况下, 图 3 所示的各种速度分量, 对于同一消减板片 p 来说都是不变的, 分别表示为 $V_x(p)$ 、 $V_z(p)$ 、 $V_x(p)$ 、 $V_b(p)$ 和 $V_z(p)$ 。对于不同板片, 它们的值则是不同的。当顾及流动压力对消减板片的抬升作用时, (9)、(10) 式应改变为

$$\operatorname{tg} \alpha(p) = \frac{V_z(p) - V_l(p)}{V_x(p)} \quad (12)$$

$$V_x(p) = V_x(p) + V_b(p) \quad (13)$$

式中 $V_l(p)$ 为 p 消减板片的流动压力的抬升效应, 消减速度 $V_z(p)$ 越大, $V_l(p)$ 越大。 $V_x(p) \sim \Delta\rho_r g Z_r$, 消减深度 Z_r 是一个与倾角 $\alpha(p)$ 相关的量, 主要由消减板片被地幔加热的时间决定。如果从岩石层开始消减到被地幔同化的时间长度对于不同消减板片都是一样的话, 那么由于不同消减板片具有不同倾角和消减速度, 所以必然具有不同的消减深度 Z_r 。 Z_r 不一定要等于 760km, 例如东太平洋的消减深度都远小于 760km, 因为那里的消减板片倾角小, 而且消减速度大。

由上面还可以看出, 消减板片的倾角由密度差 $\Delta\rho_r$ 、消减速度 $V_z(p)$ (流动压力效应) 和海沟后退速度 $V_b(p)$ 共同决定, 由于不同消减板片具有不同的值, 所以不同消减板片具有不同的倾角。

现在我们来解释东太平洋的中美洲海沟、秘鲁海沟、北智利海沟和南智利海沟的消减板片的倾角为什么都比西太平洋诸海沟的消减板片倾角小很多。第一个因素是东太平洋的海底都是相对新的海底, 密度反转 $\Delta\rho_r$ 小, 导致 $V_x(p)$ 小; 第二个因素是东太平洋海底的消减速度 $V_z(p)$ 相对的大, 导致 $V_l(p)$ 相对的大; 第三个因素是东太平洋诸海沟, 在洋脊扩张和大西洋扩张的双重作用下, 海沟后退速度 $V_b(p)$ 比西太平洋的大。把 $V_x(p)$ 小、 $V_l(p)$ 大和 $V_b(p)$ 大代入 (12) 和 (13) 式, 便得 $\alpha(p)$ 必然会相对的小的结果。

3.2.5 对挤压型海沟和拉张型海沟的解释

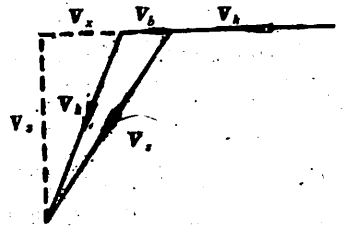


图 3 水平扩张速度、消减速度和海沟后退速度的关系

上田诚也和金森博雄^[13]引用 Mariana 露出海沟壁的观测事实来说明这是一种拉张型海沟, 而引用陆侧的前端有海沟底沉积物和洋壳剥离物的加积的观测事实来说明 Chile 型海沟是一种挤压型海沟。这两种类型的海沟都可以用本实验中所观测到的现象来解释。拉张型海沟可以被解释为由于海沟和消减板片相对于大陆侧后退而引起的。挤压型海沟则可以被解释为由于消减板片前进并插入大陆岩石层底部而引起的。

4 结束语

①本模型实验的设计思想是板块运动的主动驱动机制。模型实验基本上实现了动力学相似, 模型运动基本上反映了密度反转在岩石层消减过程中的作用, 因此实验结果具有实际意义。

②模型运动的所有观测结果和它的合理推论与对地球的观测结果对照, 没有发现反例, 或者两者相一致, 或者前者对后者作出合理解释。似乎说明模型实验的设计思想——板块运动的主动驱动机制是合理的。

③本实验主要讨论了消减线(海沟)的存在和性质; 消减板片的密度反转形成垂直牵引力, 它驱动着板片沉入地幔, 而且一部分可转换为对岩石层板块的水平牵引力; 建立了板块水平运动速度、岩石层消减速度、海沟移动速度之间的关系式以及解释了为什么不同消减板片会具有不同的倾角和消减深度。

参 考 文 献

- [1] Clark, S. P. & Ringwood, A. E., *Rev. Geophys.*, 2 (1964), 35-88.
- [2] Ringwood, A. E. & Green, D. H., *Tectonophysics*, 3 (1966), 383-427.
- [3] Oxburgh, E. R. & Parmentier, E. M., *J. Geol. Soc.*, London, 133 (1977), 343-355.
- [4] A. E. 林伍德, 地幔的成分与岩石学, 地震出版社, 1981, 290-304.
- [5] Scheidegger, A. E., *Principles of geodynamics* (2nd ed), Springer-Verlag, 1963, 148-216.
- [6] 许天铭等, 重力在岩石层消减中的作用, 地球物理学报增刊—实验地球物理论文集, 1987.
- [7] Le pichon, X., *J. Geophys. Res.*, 73(12) (1968), 3661-3697.
- [8] 曾融生, 固体地球物理学导论, 科学出版社, 1984, 392-407.
- [9] 江守一郎等, 郭廷玮等译, 模型实验的理论和应用, 科学出版社, 1984.
- [10] Isacks, B. L. and Barazangi, M., In *Island Arcs, Deep Sea Trenches and Back-Arc Basins*, M. Ewing series 1 (eds. M. Talwani and W. C. Pitman III), 1977, 99-114.
- [11] Kanamori, H., In *Island Arcs, Deep Sea Trenches and Back-Arc Basins*, M. Ewing series 1 (eds. M., Talwani and W. C. Pitman III), 1977, 163-174.
- [12] D. L. 特科特和G. 舒伯特, 地球动力学—连续介质物理在地质问题上的应用, 地震出版社, 1968, 238-241.
- [13] 上田诚也, 金森博雄, *科学*, 48(1978), 91-102.

Effects of Density Reversal in the Process of Lithosphere Subduction

Xu Tianming Liu Wenzhong

(University of Science and Technology of China)

Chen Jing

(Institute of Geophysics, Academia Sinica, China)

Abstract

The experimental model and method are designed according to the principle of similitude, so the experimental results are comparable with the results from observations in field. The main suggestions are as follows: part of the traction force resulting from subducting slab may draw the slab and cause it to sink and another part may transfer to a horizontal traction force to make lithosphere spread; the relationships between the velocity of plate motion, the sinking velocity of Lithosphere and the velocity of trench drift are shown; an interpretation for different angles and sink depths with Benioff zones is given. These results are probably useful to those who are interested in the plate motion and its driving mechanism.

Key words: model experiment, density reversal, effects of gravitational body force, pattern of Benioff zones.

Mahler 定理的注记

余红兵

(数学系)

设 $g, h \geq 2$ 是两个固定的整数, 用 $\alpha_h(g)$ 表示 $0.(g^0)_h(g^1)_h(g^2)_h \dots$, 这里 $(g^k)_h$ 是指 g^k 的 h 进制展开式. K. Mahler^[1] 用 P-adic 理论证明了当 $h=10$ 时, $\alpha_h(g)$ 是无理数. 随后, Bandschuh^[2] 将这一结果推广到任意 $h \geq 2$, 即证明了

设 $g, h \geq 2$ 是两固定整数, 则 $\alpha_h(g)$ 是无理数.

但是他的证明非常复杂, 单增^[3] 用 Kronecker 定理给出了上述结果的一个简单证明. 本文将给出这结果的一个推广, 确切地说, 我们证明了:

定理 1 设 $f(n)$ 是整系数多项式, $\deg f \geq 1$, 且对 $n \geq 1$, 有 $f(n) > 0$, $g, h \geq 2$ 是两固定整数, 则

$$A_h(g) = 0.(g^{f(0)})_h(g^{f(1)})_h(g^{f(2)})_h \dots$$

是无理数.

在定理 1 中取 $f(n) = n$, 则得到 Mahler 及 Bandschuh 的结果, 此外, 我们还得到了两个有关的新结果 (见定理 2、3)。

我们先证明定理 1。

假设 $A_h(g)$ 是有理数, 则它必循环, 设其循环节的的长度为 l , ($l \geq 1$)。由此将导出矛盾。

(i) 设 $\log_h g = \frac{m}{n}$ 是有理数, m, n 都是正整数, 此时 $g = h^{\frac{m}{n}}$, 从而 $g^{f(t)} = h^{\frac{m}{n} f(t)}$, t 是正整数. 因 $f(t) > 0$, 设 $f(t) = kn + r$, $0 \leq r \leq n-1, k \geq 0$, 我们有 $g^{f(t)} = h^{\frac{m}{n} \cdot r} \cdot h^{km}$, 取 t 充分大, 使得 $km > 2l$, 则易见 $(g^{f(t)})_h$ 的末尾至少有 $km > 2l$ 个 0, 导出矛盾。

(ii) 设 $\log_h g$ 是无理数, 则多项式 $f(n) \log_h g$ 的最高次幂的系数是无理数, 从而 $\{f(n) \log_h g\} \quad n=1, 2, \dots$ 在 $(0, 1)$ 中是一致分布的^[4], 这儿及以后, $\{x\} = x - [x]$ 表示实数 x 的小数部分. 于是, 对任意正整数 k , 都有充分大的 n 使得

$$0 < \{f(n) \log_h g\} < \{\log_h (h^k + 1)\}$$

设 $s = [f(n) \log_h g] - k > 0$, 则由上式得

$$[f(n) \log_h g] < f(n) \log_h g < \log_h (h^k + 1) + s$$

1987年4月17日收到.

此即

$$h^k \cdot h^s < g^{f(n)} < (h^k + 1)h^s$$

从而有 $(g^{f(n)})_k = 1 \underbrace{0 \dots 0}_{k} \underbrace{** \dots *}_s$

我们取 $k > 2l$, 则导出矛盾。因此 $A_k(g)$ 是无理数。

现在我们证明两个有关的结果。

定理 2 设 $2 = P_1 < P_2 < \dots$, 是全体素数之列, $g, h \geq 2$ 是两个固定整数, 则

$$P_k(g) = 0.(g^0)_k (g^{P_1})_k (g^{P_2})_k \dots$$

是无理数。

证明 设 $P_k(g)$ 是循环的, 其循环节长度为 l , 我们将导出矛盾。

(i) 设 $\log_g g = \frac{m}{n}$ 为有理数, 这里 m, n 都是正整数, 则 $g = h^{\frac{m}{n}}$, $g^r = h^{\frac{m}{n}r}$, p 是素数,

设 $p = kn + r$, $0 \leq r \leq n-1$, 则 $g^r = h^{\frac{m}{n}r} \cdot h^{kr}$, 注意 $h^{\frac{m}{n}r}$ 是整数。令 p 很大, 使 $mk > 2l$, 则 $(g^r)_k$ 的末尾有 $mk > 2l$ 个 0, 矛盾。

(ii) 设 $\log_g g$ 是无理数, 则熟知 $\{p_k \log_g g\} k=1, 2, \dots$, 在 $(0, 1)$ 中一致分布^[4], 与定理 1 的证明类似地导出矛盾, 证毕。

最后我们指出, 从定理 1 的证明可以看出, 我们不必要求所说的数列在 $(0, 1)$ 中一致分布, 只要以 0 为聚点即可, 因而可以象定理 1 的证法那样得到

定理 3 设 $n_1 < n_2 < \dots$, 是给定的正整数序列, $g, h \geq 2$ 是固定整数, 且 $\{n_k \log_g g\}$, $k=1, 2, \dots$, 以 0 为聚点, 则

$$0.(g^0)_k (g^{n_1})_k (g^{n_2})_k \dots$$

是无理数。

作者衷心感谢盛刚、单增两位老师的指导和鼓励。

参 考 文 献

[1] Mahler, K., *J. Number Theory*, 13 (1981), 268-269.
 [2] Bandschuh, P., *J. Number Theory*, 19 (1984), 248-253.
 [3] Shan Zun, A Note on Irrationality of Some Numbers, *J. Number Theory*, (to appear).
 [4] Kuipers, L. and Niederreiter, H., *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley-Sons, New York (1974), 22-27.

On a Theorem of Mahler

Yu Hongbing

(Department of Mathematics)

关于可积系中对称的代数结构的证明*

程 艺

(数学系)

1 引言

众所周知, 对于可积的具有 $2n$ 个自由度 (或称为 $2n$ 维) 的 Hamilton 系统, 存在着 n 个对易的守恒量, 这些守恒量可通过系统的对称给出^[1].

随着对孤立于理论的研究, 人们发现了一大批无穷维的 Hamilton 系统^[2], 这些系统一般都具有两组无穷多个对称 (简称为 K 对称和 τ 对称), 而且它们构成一个无穷维李代数^[3, 4]. 证明这些对称的代数结构的情况是这样的: 对于 $1+1$ 维系统 (如 KdV、AKNS 系统等), 一般借用于人们熟知的递归算子的强对称性和遗传性^[3, 5]; 而在 $2+1$ 维或具有 $2+1$ 维特性的系统 (如 KP 和 BO 系统) 中, 已有的证明方法缺乏系统性和严谨性, 它很难适用于其它 $2+1$ 维系统, 而且与 $1+1$ 维系统中所用的方法大不一样^[3, 6].

本文将给出一种适用于 $1+1$ 和 $2+1$ 维系统的证明方法, 它较为系统和严谨. 尤其是这一方法涉及到对称的一些新性质, 因此对人们认识对称及其代数性质是有益的.

在此, 我们谨以 AKNS 系统为例, 详细说明证明方法, 对其它系统, 特别是 $2+1$ 维系统的证明类似, 我们将在后面加以说明.

2 一些概念

首先回顾一下已有的结果和概念. AKNS 系统指的是下列方程族:

$$u_l = K_l(u) = L^l u, \quad u = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} -iq \\ ir \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

其中 L 是递归算子.

$$L = -i \begin{pmatrix} -D + 2qD^{-1}r & 2qD^{-1}q \\ -2rD^{-1}r & D - 2rD^{-1}q \end{pmatrix}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D^{-1}D = I \quad (2.2)$$

方程 (2.1) 可由下列 AKNS 特征值问题求解

1987年9月2日收到.

* 国家教委自然科学基金资助课题.

$$\varphi_n = M\varphi, \quad M = \begin{pmatrix} -i\frac{\xi}{2} & q \\ r & i\frac{\xi}{2} \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

其中 ξ 是特征参数, 对方程 (2.1) 来说, 它是不随时间变化的。

方程 (2.1) 的对称是指这样的量 τ , 它使得若 u 是 (2.1) 的解, 则 $u' = u + \varepsilon\tau$, 当 ε 无穷小时也是解。也就是 τ 必须且只须满足方程

$$\tau_t = K'[\tau], \quad (K = K_m) \quad (2.4)$$

这里 $K'[\tau] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} K(u + \varepsilon\tau)$ 是 Gateaux 导数。从文献 [4] 可知 (2.1) 有下列两

串对称:

$$K \text{ 对称: } K_n = L^n K_0, \quad K_0 = u \quad (2.5)$$

$$\tau \text{ 对称: } \tau_n^{(t)} = t K_{n+t-1} + \sigma_n \quad (2.6)$$

$$\sigma_n = L^n \sigma_0, \quad \sigma_0 = x K_0 \quad (2.7)$$

若考虑下列方程流

$$u_t = K_n(u) \quad (2.8)$$

$$u_t = \sigma_n(u) \quad (2.9)$$

则 (2.8) 就是方程族 (2.1), 而 (2.9) 是另一族非线性演化方程, 并且显含变量 x 。文献 [4] 指出方程 (2.8) 和 (2.9) 均可由特征值问题 (2.3) 的反散射求解, 但前者是谱不可变的, 而后者则是谱可变的。因此对于 (2.3) 的散射数据

$$S = \left\{ (\xi_j, \beta_j)_{j=1}^N, (\bar{\xi}_j, \beta_j)_{j=1}^N, \rho(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \bar{\rho}(\xi) = \frac{\bar{b}(\xi)}{\bar{a}(\xi)}, I_n \xi = 0 \right\}$$

对应于 (2.8) 和 (2.9) 的演化方程是

$$\begin{aligned} \xi_{j,t} &= 0, \quad \rho_{j,t} = -i\xi_j^n \rho \\ \xi_{j,t} &= 0, \quad \beta_{j,t} = -i\xi_j^n \beta_j, \quad j=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.10)$$

和

$$\xi_{j,t} = \xi_j^n, \quad \rho_{j,t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \xi_{j,t} = 0 \quad (2.11)$$

$$\xi_{j,t} = \xi_j^n, \quad \beta_{j,t} = n\xi_j^{n-1} \beta_j, \quad j=1, 2, \dots, N$$

有关另一半散射数据的方程类似, 在此就不再列出, 详情可见文献 [7]。

3 对称代数结构的证明

下面, 我们将证明方程 (2.1) 对称的代数结构。为此, 先证明下列等式:

$$\begin{aligned} [K_m, K_n] &= 0, \quad [K_m, \sigma_n] = m K_{m+n-1} \\ [\sigma_m, \sigma_n] &= (m-n) \sigma_{m+n-1}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

这里 K_m 和 σ_m 的定义如前, 李括号的定义是: 对任意两个 u 的泛函 F 和 G , 有

$$[F, G] = F'[G] - G'[F] \quad (3.2)$$

为了证明 (3.1), 考虑特征值问题 (2.3), 由反散射理论可知 (2.3) 中的位势 $u = (q, r)^T$ 与散射数据可视为一种可逆的对应关系, 因此若作无穷小变换 $u \rightarrow u + \delta u$, 则

会引起散射数据的无穷小变换。特别，分别取 $\delta u = \varepsilon K_n$ 和 $\delta u = \varepsilon \sigma_n$ ，也就是对 (2.3) 作下列无穷小变换

$$T_n(\varepsilon): u \rightarrow u + \varepsilon K_n \quad (3.3)$$

$$S_n(\varepsilon): u \rightarrow u + \varepsilon \sigma_n \quad (3.4)$$

则它们所引起的散射数据的变化类似于 (2.10), (2.11), 即

$$\begin{aligned} \bar{T}_n(\varepsilon): \xi \rightarrow \xi, \rho \rightarrow \rho - \varepsilon(i\xi^n \rho) \\ \xi_i \rightarrow \xi_i, \beta_i \rightarrow \beta_i - \varepsilon(i\xi_i^m \beta_i) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_n(\varepsilon): \xi \rightarrow \xi + \varepsilon \xi^n, \rho \rightarrow \rho \\ \xi_i \rightarrow \xi_i + \varepsilon \xi_i^m, \beta_i \rightarrow \beta_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

这里 ε 是任意小的参数。有关这种思想在孤立子理论中是很重要的，详情可参见文献 [8]。

根据以上分析，我们对位势 u 先作变换 $T_m(\varepsilon)$ ，再作 $T_n(\varepsilon')$ ，其结果是

$$u \rightarrow u' = T_n(T_m u) = u + \varepsilon' K_n + \varepsilon K_m + \varepsilon \varepsilon' K'_m [K_n] \quad (3.7)$$

反过来，先作 $T_n(\varepsilon')$ ，再作 $T_m(\varepsilon)$ ，则

$$u \rightarrow u'' = T_m(T_n u) = u + \varepsilon' K_n + \varepsilon K_m + \varepsilon \varepsilon' K'_m [K_n] \quad (3.8)$$

不难看出，若保留到 $\varepsilon \varepsilon'$ 这一阶时，有

$$u'' = u' + \varepsilon \varepsilon' [K_m, K_n](u') \quad (3.9)$$

同时，考虑散射数据相应的变化，也就是分别经过变换 $\bar{T}_n(\varepsilon') \bar{T}_m(\varepsilon)$ 和 $\bar{T}_m(\varepsilon) \bar{T}_n(\varepsilon')$ ，我们有

$$\begin{aligned} \xi' = \xi, \rho' = \rho - \varepsilon'(i\xi^n \rho) - \varepsilon(i\xi^m \rho) - \varepsilon \varepsilon' \xi^{m+n} \rho \\ \xi'_i = \xi_i, \beta'_i = \beta_i - \varepsilon'(i\xi_i^m \beta_i) - \varepsilon(i\xi_i^n \beta_i) - \varepsilon \varepsilon' \xi_i^{m+n} \beta_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

和

$$\xi'' = \xi', \rho'' = \rho', \xi'_i = \xi'_i, \beta'_i = \beta'_i \quad (3.11)$$

这里同样保留到 $\varepsilon \varepsilon'$ 这一阶。同理也可考虑另一半散射数据的变化，其结果相同。因此在保留到 $\varepsilon \varepsilon'$ 这一阶时有 (3.11) 等，所以在同一阶中有 $u'' = u'$ ，也就是 $[K_m, K_n] = 0$ 。这就证明了 (3.1) 中的第一个等式。

同样，对 u 先作变换 $S_n(\varepsilon') T_m(\varepsilon)$ ，再作 $T_m(\varepsilon) S_n(\varepsilon')$ ，我们有

$$u' = u + \varepsilon' \sigma_n + \varepsilon K_m + \varepsilon \varepsilon' \sigma'_n [K_m] \quad (3.12)$$

$$u'' = u + \varepsilon' \sigma_n + \varepsilon K_m + \varepsilon \varepsilon' K'_m [\sigma_n]$$

所对应散射数据变化为

$$\begin{aligned} \xi' = \xi + \varepsilon' \xi^n, \rho' = \rho - \varepsilon(i\xi^m \rho) \\ \xi'_i = \xi_i + \varepsilon' \xi_i^m, \beta'_i = \beta_i - \varepsilon(i\xi_i^m \beta_i) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \xi'' = \xi + \varepsilon' \xi^n, \rho'' = \rho - \varepsilon(i\xi^m \rho) - \varepsilon \varepsilon' (m i \xi^{m+n-1} \rho) \\ \xi'_i = \xi_i + \varepsilon' \xi_i^m, \beta'_i = \beta_i - \varepsilon(i\xi_i^m \beta_i) - \varepsilon \varepsilon' (m i \xi_i^{m+n-1} \beta_i) \end{aligned} \quad (3.15)$$

保留到 $\varepsilon \varepsilon'$ 这一阶，我们有

$$u'' = u' + \varepsilon \varepsilon' [K_m, \sigma_n](u') \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \xi'' = \xi', \rho'' = \rho' - \varepsilon \varepsilon' (i m (\xi')^{m+n-1} \rho') \\ \xi'_i = \xi'_i, \beta'_i = \beta'_i - \varepsilon \varepsilon' (i m (\xi'_i)^{m+n-1} \beta'_i) \end{aligned} \quad (3.17)$$

从(3.17)可以看出,从 $\xi', \rho', \xi'_i, \beta'_i$ 等变到 $\xi'', \rho'', \xi''_i, \beta''_i$ 等的变换是(3.5)中的 $m\bar{T}_{m+n-1}(\epsilon\epsilon')$,因此对应于 u 的变换是

$$u'' = mT_{m+n-1}(\epsilon\epsilon')u' = u' + \epsilon\epsilon' mK_{m+n-1}(u')$$

与(3.16)比较即可得(3.1)中第二式,有关最后一个等式的证明与前面类似,只要考虑变换 $S_n(\epsilon')$ 和 $S_n(\epsilon)$ 的先后作用即可。

由(3.1),我们很容易得到

$$\begin{aligned} [K_m, K_n] &= 0, [K_m, \tau_n^{(l)}] = mK_{m+n-1} \\ [\tau_m^{(l)}, \tau_n^{(l)}] &= (m-n)\tau_{m+n-1}^{(l)}, m, n, l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

这就是说, K_n 和 $\tau_n^{(l)}$ 构成一个无穷维李代数,其结果与文献[4]中的一样。

4 结论

在本文所采用的证明过程中,可以直接地看出,对称的无穷小变换对散射数据的影响,在(3.4)中我们只给出了有关 σ_n 的无穷小变换和对应的散射数据的变换。由本文的分析,不难得到有关对称 $\tau_n^{(l)}$ 的无穷小变换及相应的结果,也就是 $u \rightarrow u + \epsilon\tau_n^{(l)}$, $\xi \rightarrow \xi + \epsilon\xi''$, $\rho \rightarrow \rho - \epsilon(imt\xi^{m+1})\rho$, $\xi_i \rightarrow \xi_i + \epsilon\xi''_i$, $\beta_i \rightarrow \beta_i - \epsilon(imt\xi_i^{m+1})\beta_i$ 等。由此,我们发现,对于特征值问题(2.3)有关的 K_n 无穷小变换(即(3.3)式)不改变(2.3)的离散特征值,而 $\tau_n^{(l)}$ (或 σ_n)的无穷小变换改变了离散特征值。

另一方面,对许多2+1维的可积系,一般都先得到相当于(2.8), (2.9)的方程及相应的散射数据的演化。由此就可考虑对称的无穷小变换对散射数据的影响等,对称的代数结构也就可以证明。

作者感谢李翊神教授的支持和鼓励。

参 考 文 献

- [1] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978, 123.
- [2] Newell, A. C., *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM, Philadelphia Pennsylvania, 1985, 117.
- [3] Chen, H. H., Lee, Y. C. and Lin, J. E., *Physica*, **D9** (1983), 43.
- [4] Li Yishen and Zhu Guocheng, *J. Phys. A.*, **19** (1986), 3713.
- [5] Li Yishen and Zhu Guocheng, *Sci. Sin.*, **A3** (1987), 235.
- [6] Chen, H. H., Lee, Y. C. and Lin, J. E., *Phys. Lett.*, **91A** (1982), 381.
- [7] Li Yishen, *Sin. Sci.*, **A25** (1981), 911.
- [8] Newell, A. C., *Solitons-Topics in Current Physics 17* (eds. R. K. Bullough and P. Caudrey), Springer-Verlag, New York, 1980, 177.
- [9] Cheng Yi, *Phys. Lett.*, **127A** (1988), 205.

A Proof for the Algebraic Structure of Symmetries in Integrable Systems

Cheng Yi

(Department of Mathematics)

Ba-Sr-Y-Cu-O 体系的超导电性

张涛 孙式方 方明虎 张民健 赵勇 张其瑞

(物理系)

张酣 潘国强 杨治平 钱逸泰 陈祖耀

(应用化学系)

1 引言

在探索高温超导体的研究中,为进一步提高 T_c 和扩大超导体的体系,最广泛应用的是元素替代的方法,如 C.W. Chu et al.^[1] 和赵忠贤等^[2] 把 Ba-La-Cu-O 中的 Ba 用 Sr 替代,分别将 T_c 从 30K 左右提高到 40.2K 和 48.6K; M.K. Wu et al.^[3] 和赵忠贤等^[4] 用 Y 替代 La,首次得到了液氮温区的超导体体系 Ba-Y-Cu-O;此外,人们还用多种稀土元素替代 Y,也都得到了高温超导体^[5]。

在同一个体系中,通过改变构成元素的成分和制备条件,不仅可以获得尽可能高的 T_c ,而且对研究超导体的特性具有重要意义。到目前为止,这类研究工作大都局限在三元超导氧化物中,而对四元超导氧化物的研究报导极少。本文报导在多种条件下,制取名义组分为 $Ba_{0.4-x}Sr_xY_{0.6}CuO_{y-1}$ ($x=0, 0.1, 0.2, 0.3; y>0$) 的系列样品,通过电阻率和交流磁化率的测量,并结合物相分析结果,研究了 Sr 部分替代对 Ba-Y-Cu-O 体系超导电性及其结构的影响,定性分析和讨论了实验结果。

2 样品制备与测量方法

实验中所用样品采用固态反应法制备。选取高纯度(分析纯以上)的 $BaCO_3$, $Sr(NO_3)_2$, Y_2O_3 和 CuO , 按其阳离子比例 $Ba: Sr: Y: Cu = (0.4-x): x: 0.6: 1$ ($0 \leq x \leq 0.3$) 相混合,经充分研磨后放入马福炉中,在 800—900°C 下预烧 12 小时,然后精细研磨,压制成 $1.5 \times 3 \times 15mm^3$ 的长条,重新放入炉中,在 1000—1080°C 下热处理 6—8 hr。整个过程均在空气中进行。

采用标准的直流器引线法测量样品的电阻,所用电流密度为 $1mA/cm^2$,电压测量精度达 $1 \times 10^{-6}V$ 。采用经过标定的 Ge 电阻温度计测量温度。交流磁化率的测量采用互感法,

所用交流互感电桥分辨率高于 $0.1 \mu\text{H}$ 。温度采用经过校准的铜—康铜热偶和碳电阻温度计同时测量。

3 实验结果及分析

3.1 物相分析

在研究四元氧化物体系时，首先要解决的问题就是要弄清楚替入元素是否真正地替代了被替元素，为此我们对样品做了 X 光衍射分析。图 1 给出了 $\text{Ba}_{0.4-x}\text{Sr}_x\text{Y}_{0.6}\text{CuO}_{3-y}$ ($x=0, 0.1, 0.2, 0.3; y>0$) 典型样品的 X 光衍射图。从图上我们可以看出，样品主要成分是 $\text{Ba}_2\text{YCu}_3\text{O}_{7-x}$ (123 相) 和 $\text{Y}_2\text{Cu}_2\text{O}_7$ (225) 相，还包含有少量的 CuO 以及未知杂相，没有发现 SrO 存在的迹象，这表明 Sr 的确已经替代了 Ba (根据 Sr 和 Ba 原子大小的相似性，认为 Sr 替代了 Ba 位置的可能性极大)。同时，部分替代的四元体系 T_c 均低于三元体系 $\text{Ba}_{0.6}\text{Y}_{0.4}\text{CuO}_7$ 的 T_c ，也从另一个侧面说明了 Sr 是替代进去了。

从图上我们也可以看出，Sr 部分替代 Ba 后，并未使衍射峰的位置发生很大的移动 (尤其是 123 相)，而只是使某些峰的强度发生了变化 (这很可能是由于 Sr 和 Ba 的核外电子层数不同而引起衍射因子不同所致)，这说明替代并未引起体系晶格结构大的变化。

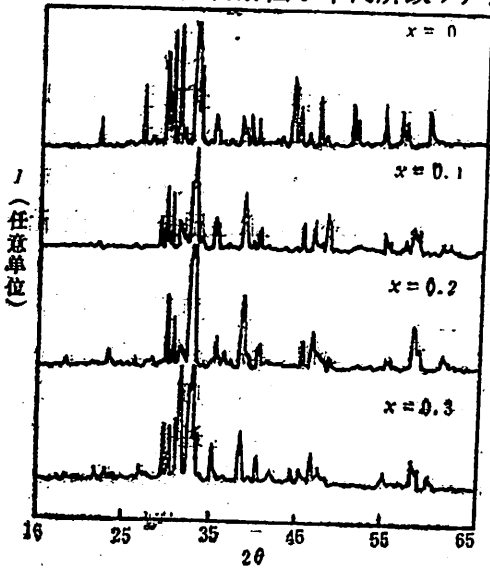


图 1 $\text{Ba}_{0.4-x}\text{Sr}_x\text{Y}_{0.6}\text{CuO}_{3-y}$ 体系的 X 光衍射图

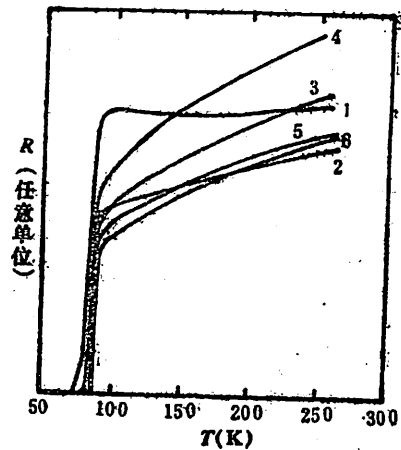


图 2 $\text{Ba}_{0.2}\text{Sr}_{0.2}\text{Y}_{0.6}\text{CuO}_{3-y}$ 体系的电阻—温度关系

3.2 超导临界温度和正常态的电阻—温度关系

在 4.2—300K 温度范围内，测量了名义组分为 $\text{Ba}_{0.4-x}\text{Sr}_x\text{Y}_{0.6}\text{CuO}_{3-y}$ ($x=0, 0.1, 0.2, 0.3; y>0$)，在多种不同热处理条件下，所制得样品的电阻—温度关系。

图 2 给出了不同条件 (制备条件见表 1) 下制备的、组分为 $x=0.2$ 的系列样品典型的电阻—温度曲线。从中可以得出：(1) 样品的超导临界温度 T_c 与其正常态时的电阻温度系数 (代表正常态的输运性质) 之间存在很强的关联，即如果样品正常态时的电阻温度系数越大，其超导临界温度就越高。如表 1 所列，拥有最高 T_c 的曲线 6 有最大的电阻温度系

数, T_c 最低的曲线 1 则对应着电阻温度系数的最小值。这和我们过去在 $Ba-Y-Cu-O$ ^[6] 中报道的情况相一致。(2) 在我们所采用的热处理条件范围内, 样品的超导临界温度 T_c 并非随烧结温度单调变化, 而是存在着一个最佳条件, 即在 1040°C 下烧结 8 小时制得的样品 (表 1 中的曲线 6)、其 T_c 达到最高, $T_c(\text{mid}) = 89\text{K}$, $T_c(\rho=0) = 87\text{K}$, $\Delta T_c = 2\text{K}$ 。烧结条件对最佳条件的任何偏离都会使 T_c 下降。(3) 样品的超导特性对热处理条件很敏感, 特别是其零电阻温度表现得更为明显。以曲线 1 所代表的样品而言, 热处理温度只不过比最佳温度低 30°C, 但 $T_c(\rho=0)$ 却下降了 13K 之多。

表 1 $Ba_{0.8}Sr_{0.2}Y_{0.6}CuO_{3-x}$ 的制备条件及其特性

曲线号	制备条件	$T_c(\text{mid})$	$T_c(\rho=0)$	$\frac{1}{R} \frac{dR}{dT}^*$
1	1010°C, 8 hr	84	74	4.15×10^{-4}
2	1060°C, 8 hr	84.5	80	1.78×10^{-3}
3	1060°C, 6 hr	86	81	2.50×10^{-3}
4	1050°C, 8 hr	86	84	2.54×10^{-3}
5	1030°C, 8 hr	87	86	2.58×10^{-3}
6	1040°C, 8 hr	89	87	2.70×10^{-3}

* $T = 250\text{K}$

图 3 所给出的是 $Ba_{0.8-x}Sr_xY_{0.6}CuO_{3-x}$ 体系各组分在最佳条件下制备的样品的电阻—温度关系曲线。从图上不难看出, 对三元氧化物 $Ba_{0.8}Y_{0.6}CuO_3$ 有 $T_c(\rho=0) = 92\text{K}$, $T_c(\text{mid}) = 93\text{K}$; 对四元氧化物 $Ba_{0.8-x}Sr_xY_{0.6}CuO_{3-x}$ ($x = 0.1, 0.2, 0.3$), 尽管我们从众

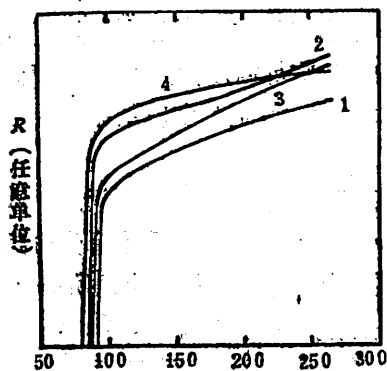


图 3 $Ba_{0.8-x}Sr_xY_{0.6}CuO_{3-x}$ 体系各组分电阻—温度关系
(1) $x=0$ (2) $x=0.1$
(3) $x=0.2$ (4) $x=0.3$

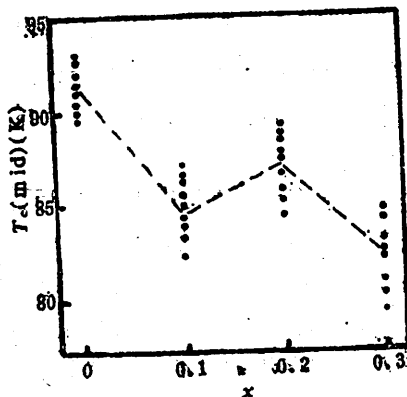


图 4 $Ba_{0.8-x}Sr_xY_{0.6}CuO_{3-x}$ 体系 $T_c(\text{mid})$ 与组分 x 的关系 (对固定的组分有多种不同制备条件)

多条件下制备所得样品中选择了 T_c 最高的, 但其 T_c 仍然要比三元氧化物的低。由此可见, 元素 Sr 部分替代 Ba 总的效果是使样品的 T_c 降低。图 4 给出了 $T_c(\text{mid})$ 与组分 x 间的关系, 从中可以更清楚地看出这一点。

从图3、图4还可以看到,对 $x=0.2$ 的样品,其 T_c 要比 $x=0.1$ 和 0.3 的样品 T_c 明显地高,这种反常现象需要作进一步的深入研究。

3.3 交流磁化率

图5给出了图3中四个样品所对应的交流磁化率曲线。从中可以看到:(1)磁化率测量的结果与电阻测量的结果相一致。三元氧化物 $Ba_{0.7}Y_{0.3}CuO_{2.7}$,90K附近出现了明显的抗磁性,三个四元氧化物($x=0.1, 0.2, 0.3$)则分别在82K,86K,80K附近出现了明显抗磁性。这对其超导电性提供了可靠的证据。(2)在样品大小相差不多的情况下,对 $x=0$ 和 0.2 的样品,其抗磁信号大、转变很陡,反映出其中高温超导相所占比例较大,均匀性较好;而 $x=0.1$ 和 0.3 的样品正好相反。这和物相分析结果一致。(3)对Ba—Y—Cu—O,只要用Sr替代其中的Ba,其样品在出现抗磁转变以前就会表现出一定的顺磁性。这种顺磁性的出现可能是由体系中原子磁性造成的,之所以加入Sr后才表现出来可能有两个原因,一是Sr的磁性比Ba的强,二是Ba—Y—Cu—O在超导转变前较大的超导涨落产生了一个总体的抗磁效果,从而将其顺磁性掩盖了(Ba—Y—Cu—O具有较大的超导涨落可以从它的电阻—温度关系偏离线性的温度较高看出)。

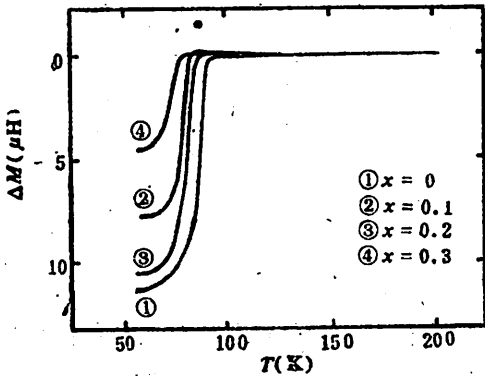


图5 $Ba_{0.4-x}Sr_{0.6}CuO_{2-x}$ 体系的交流磁化率曲线

这种顺磁性的出现可能是由体系中原子磁性造成的,之所以加入Sr后才表现出来可能有两个原因,一是Sr的磁性比Ba的强,二是Ba—Y—Cu—O在超导转变前较大的超导涨落产生了一个总体的抗磁效果,从而将其顺磁性掩盖了(Ba—Y—Cu—O具有较大的超导涨落可以从它的电阻—温度关系偏离线性的温度较高看出)。

4 讨论

对于Ba—Y—Cu—O体系的高温超导电性的研究已经进行了很多,人们已经明确地

肯定了 $Ba_2YCu_3O_{7-x}$ 相对其高温超导电性起作用,并已制成了单相样品^[7],其 $T_c(\rho=0) > 90K$ 。至于 $Ba_2YCu_3O_{7-x}$ 相为什么会具有如此高的超导临界温度,人们一般倾向于认为这是由它原子排列的有序化以及结构上的低维特性所决定的。我们的实验结果也可以用此观点加以解释。

首先,对于Sr部分替代Ba后四元体系的 T_c 明显低于三元体系的 T_c 问题,我们认为这是由于无序导致局域化所致。Siegrist et al.^[6]对 $Ba_2YCu_3O_{7-x}$ 单晶所作X光分析的结果表明,Ba和Y在沿C轴方向的三重超晶格子上有序地排列,Y—O平面上的所有O失去,两层Ba之间的Cu—O平面上的O有一半失去。也就是说,对于Ba、Y、Cu和O原子,以及O缺位均有序排列的结构,其 T_c 最高。当用Sr替代Ba时,由于Sr和Ba的原子半径相差不多,这种替代的最大可能是固溶式的随机替代,它会在一定程度上使晶格的周期势变得无序,导致电子的弱局域化效应,表现在电子运动的自由程变短,迁移率减小,从而使超导电性受到破坏, T_c 下降。另一方面,从我们前面提到的实验结果看,同是四元体系,对 $x=0.2$ 的样品,其 T_c 就要比 $x=0.1$ 和 0.3 的样品高,这也从另一个侧面证实了无序对超导电性的不利。因为从随机分布的几率来看,只有当Ba和Sr的含量相等时,也即Ba原子和Sr原子数目相同时,Ba和Sr占据任一 $Ba_2YCu_3O_{7-x}$ 单胞中两个Ba位置的几率才相等,而这种情形下结构的有序化程度要比Ba和Sr含量不同时高,其结果是对 $x=0.2$ 的

样品, 其 T_c 比 $x=0.1$ 和 0.3 的高。

其次, 从我们实验的结果看, 四元系氧化物中, 含 Sr 多 ($x=0.3$) 的样品的 T_c 也比含 Ba 多样品 ($x=0.1$) 的低。关于这一点, 我们可从 $Ba_2YCu_3O_{7-x}$ 相的低维特性出发, 结合 Sr 和 Ba 离子特性及电子结构加以解释。Mattheiss et al.^[9] 认为, $Ba_2YCu_3O_{7-x}$ 相具有准一维、准二维特性, 这些特性也是其 T_c 高的一个重要因素。当 Sr 替代 Ba 后, 由于 Sr 的离子半径 ($\sim 1.1 \text{ \AA}$) 比 Ba 的 ($\sim 1.3 \text{ \AA}$) 要小, 因而 $Ba_2YCu_3O_{7-x}$ 相层与层之间的距离会变短 ([001] 方向), 耦合效应增强, 从而使其准一维、准二维特性减弱, 导致 T_c 下降。另一方面, 根据光电子能谱的测量结果^[10], 较高 T_c 往往对应于较高的 Fermi 面态密度 $N(E_F)$ 。由于 Sr 核外电子比 Ba 少一壳层 (18 个), 因而 Sr 原子核外层价电子的束缚作用要比 Ba 强, 其结果是平均对于每个 Sr 原子, 其有效价电子数可能会比 Ba 的少, 导致 $N(E_F)$ 下降, 因而在一定程度上会使 T_c 下降。当然, 这还有待于在进一步的实验中证实。如果能制备出单相的 Ba—Sr—Y—Cu—O 样品, 就可以较清楚地阐明其原因。这一工作我们正在进行之中。

参 考 文 献

- [1] Chu, C.W., Hor, P.H., Meng, R.L. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 58 (1987), 405.
- [2] 赵忠贤, 陈立泉等, 科学通报, 32 (1987), 177.
- [3] Wu, M.K., Ashburn, J.R., Torng, C.J. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 58 (1987), 908.
- [4] 赵忠贤, 陈立泉等, 科学通报, 32 (1987), 66.
- [5] 张其瑞, 钱逸泰; 陈祖耀等, 低温物理学报, 9 (1987), 245.
- [6] 赵勇, 张其瑞等, 低温物理学报, 9 (1987), 169.
- [7] Cava, R.J., Batlogg, B., Van-Dover, R.B. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 58 (1987), 1676.
- [8] Siegrist, T., Sunshine, S., Murphy, D.W. et al., *Phys. Rev.*, B35 (1987), 7173.
- [9] Mattheiss, L.F. & Hamman, D.R., *Solid State Commun.*, 63 (1987), 395.
- [10] Ji, M.R., He, Z.H., Wu J.X. et al., *Solid State Commun.*, 63 (1987), 511.

Superconductivity in Ba—Sr—Y—Cu—O System

Zhang Tao Sun Shifang Fang Minghu Zhang Minjian

Zhao Yong Zhang Qirui

(Department of Physics)

Zhang Han Pan Guoqiang Yang Zhiping Qian Yitai Chen Zuyao

(Department of Applied Chemistry)

High T_c Superconductivity in Ba-Nd-Cu-O*

Xia Jiansheng Fang Minghu He Zhenhui

Wang Shunxi Zhao Yong Zhang Qirui

(Department of Physics)

Liu Fei Qian Yitai Zhao Huiqing

Pan Guoqiang Chen Zuyao

(Department of Applied Chemistry)

Since the discovery of high T_c superconductivity in La-Ba-Cu-O system^[1], great progress of research on high T_c superconductivity in oxides have been made. Up to now, almost all rare earth elements have been substituted systems except Ba-(Ce, Pr, Tb)-Cu-O are found to be superconductors which usually have much higher T_c than in La-Ba-Cu-O. Many experimental results showed^[2-5] the superconducting transition temperature in system which contain heavy elements of lanthanide, such as Ho, Dy, Er, Tm, Yb, Lu are usually higher than that in systems which contain light elements of lanthanide, such as La, Nd, Sm. But according to the theoretical calculation^[6], the high T_c superconductivity are mainly related to the proximity of competing charge density wave instabilities and the large electron-phonon matrix elements of the Fermi level electrons, that is, the proper structure is important for the high T_c superconductivity. we all known that, the K_2NiF_4 -type compounds Ba-La-Cu-O are of T_c near 30K, but compound $La_{1-x}Ba_{1+x}Cu_6O_{14+\delta}$ are with $T_c \sim 90K$ ^[7]. That gives us an idea that the light elements of lanthanide can also be with T_c near 90K if the proper structure is formed in it. In

Received Oct., 17, 1987.

* This work was supported (in part) by the National Science Fundation of China.

this paper, we report the T_c above 90K in Nd-Ba-Cu-O system, which is the highest T_c that has been reported so far in this system.

Samples with nominal composition of $Ba_{0.6}Nd_{0.4}CuO_{7-x}$ were prepared by combining stoichiometric proportion of $BaCO_3$, Nd_2O_3 , and CuO , and by heating the mixture at $900^\circ C$ for 10 hours in air. Then, the mixture was reground and pressed into a bar and sintered at $960^\circ C - 1030^\circ C$ in air for 7-10 hours. The X-ray powder diffraction shows that the samples are with several phases, such as $A_2BC_3O_{7-x}$, K_2NiF_4 or/and others, but the main phase is $NdBa_2Cu_3O_{7-x}$.

Electrical resistivity measurements were performed by a standard D. C. fourprobe technique. The resolution of the voltage measurements is $1 \times 10^{-8} V$. The A. C. magnetic susceptibility was measured by using mutual inductance bridge. During the measurement, both the samples and the thermometer kept good thermo-contact with the copper lump. The temperature was monitored by a calibrated copper-constantan thermocouple and a calibrated Ge-resistance thermometer.

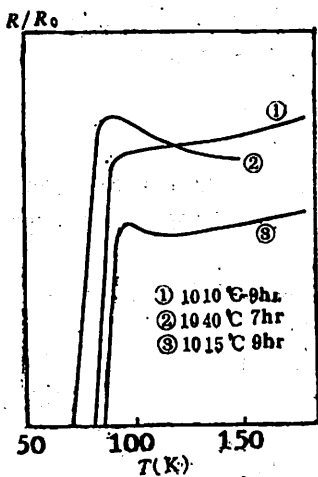


Fig. 1 Temperature dependence of resistance in Ba-Nd-Cu-O

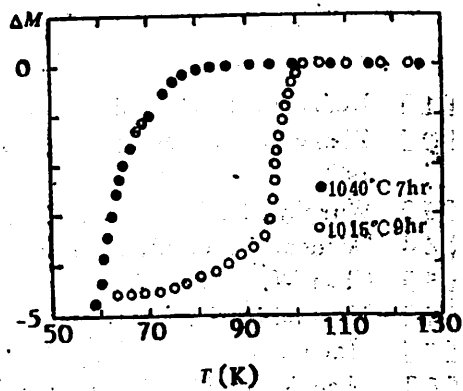


Fig. 2 A. C. magnetic susceptibility of Ba-Nd-Cu-O

The temperature dependence of the resistivity of $Ba_{0.6}Nd_{0.4}CuO_{7-x}$ is shown in Fig.1. A typical superconducting transition was observed. It is obviously seen that the electronic transport properties in the normal state, as well as in the superconducting state are very sensitive to the synthesizing condition. As it has been found in other system^[8], there is a optimal annealing condition for the superconductivity of the samples with given composition. The highest T_c for the samples measured, was observed in the sample which was preheated at $900^\circ C$ for 10 hours and sintered at $1050^\circ C$. The $T_c(\text{mid.}) =$

89.5K, $T_c(\rho=0) = 84.0\text{K}$, $\Delta T_c = 6\text{K}$.

The A.C. magnetic susceptibility of the samples is shown in Fig.2. A typical superconducting transition appears in the temperature corresponding to the midpoint of transition in $R(T)$ curves. In comparison with the single phase sample of $\text{Ba}_2\text{YCu}_3\text{O}_{7-x}$, the diamagnetic susceptibility signal is smaller and the transition width is larger.

From the above results, it can be seen that the Nd-Ba-Cu-O indeed has high temperature superconductivity with T_c near 90K. And the results also show that, for the same structure of Ba-Re-Cu-O, the differences of superconducting transition temperature between them are not obvious, where Re is rare earth elements except Ce, Pr and Tb. That suggest that the proper structure should be very important for the high T_c superconductivity. For the lighter elements of lanthanide, such as Ce, Pr, if a proper structure can be found, the Ba-Ce(Pr)-Cu-O system might have high T_c . On the other hand, Nd is cheap in price and possesses a potential value for application. The detailed study on physical properties in normal state, as well as in superconducting state are being carried out and it will provide some information for understanding the high T_c superconductivity in these oxides.

Reference

- [1] Bednorz, J. C. and Muller, K. A., *Z. Phys.*, **B64** (1986), 189.
- [2] Zhang, O. R. et al., *Solid State Commun.*, **63** (1987), 416; **63** (1987), 497.
- [3] Wurphy, D. W. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **58** (1987), 1888.
- [4] Hosoga, S. et al, *J. Phys.*, **26** (1987), 1761.
- [5] Chen W. et al., *Kexue Tongbao*, **32** (1987), 489.
- [6] Mattheiss, L. F., Hamann, D. R., *Phys. Rev. Lett.*, **58** (1987), 1028.
- [7] Maeno, Y. et al., *Physica*; **148 B** (1987), 357.
- [8] Zhao Y. et al., *Scienca Sinica*, **1** (1988), 105.

Ba-Nd-Cu-O体系的高温超导电性

夏健生 方明虎 何振辉 王顺喜 赵勇 张其瑞

(物理系)

刘 耕 钱逸泰 赵慧卿 潘国强 陈祖耀

(应用化学系)

在浓度对数图上确定酸碱体系状态的新方法

陈玲然 张懋森

(近代化学系)

酸碱浓度对数图(简称LCD)在酸碱平衡中有着广泛的应用。许多文献对LCD的绘制和应用等都作过详细介绍^[1-4]。用LCD求解酸碱平衡问题的一般步骤是:①写出酸碱平衡体系(简称体系)的质子平衡式PBE(Proton Balance Equation);②根据PBE绘制LCD;③在LCD上确定体系的状态;④根据体系的状态求出具体问题的解。其中③是整个求解过程中的重要一步,最近有人对此作过不少研究^[5,6]。

然而,在LCD上确定体系状态的现有方法一般都只适用于较简单的LCD。本文从新的角度对这一问题进行探讨,进而提出一个普遍适用的在LCD上确定体系状态的简便方法。

下面以计算0.10M (NH₄)₂CO₃溶液的pH值为例进行分析。该体系的PBE为

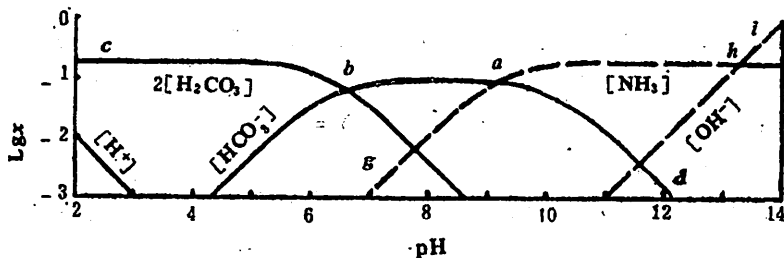
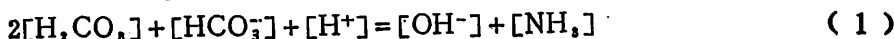


图1 0.10M (NH₄)₂CO₃溶液的LCD (pK_{NH₄⁺} = 9.26, H₂CO₃的pK_{a1} = 6.38, pK_{a2} = 10.25)

相应的LCD如图1所示。为了简明,我们把LCD上对应于PBE等号左边“酸”项的lgX~pH线称为酸线,用实线——表示;对应于PBE等号右边“碱”项的lgX~pH线称为碱线,用虚线----表示;由所有酸线、碱线的最高部分连接而成的曲线分别称为最高酸线(如图1中的cbad线)及最高碱线(如图1中的gahi线);能近似确定体系状态的交点称为近态点。

显然,即使不考虑作图误差, LCD 上酸、碱线的所有交点严格说来都不满足相应的 PBE (纯水体系例外)。但一般总有一个能近似满足 PBE 的酸、碱线交点(即近态点)存在,如图 1 中的 α 点。据此可从图上读得溶液的 $\text{pH} \approx 9.19$ 。

可见,用 LCD 求解体系 pH 值的 LCD 图解法是近似方法。该法绘图简易,确定体系状态点较难。

为了克服 LCD 图解法的缺点,我们引入一种新的“总线图解法”。根据式(1),令

$$F_1 = 2[\text{H}_2\text{CO}_3] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{H}^+] \quad (2)$$

$$F_2 = [\text{OH}^-] + [\text{NH}_3] \quad (3)$$

按式(2)、(3)作出的两条曲线如图 2 所示。其中 $\lg F_1 \sim \text{pH}$ 线和 $\lg F_2 \sim \text{pH}$ 线分别称为总酸线和总碱线。用微分方法证明总酸、碱线分别具有恒小于零、恒大于零的斜率,而且它们仅相交于一点。由图 2 知,在交点 A 处, $\lg F_1 = \lg F_2$, 满足式(1), 所以交点 A 是体系的状态点。从图上读得溶液的 $\text{pH} = 9.19$ 。若不考虑作图误差,本法是一种精确方法,且极易确定体系的状态点,其缺点是作图较麻烦。

由于图 1 所示的 LCD 和图 2 所示的总线图解法用图都是根据式(1)得到的,所以它们之间有着内在的联系。现将它们同画于图 3 中。由图 3 可以看出,总碱线位于最高碱线的上方,且除个别部分外,两条线基本上重合在一起。总酸线与最高酸线也有类似的关系。

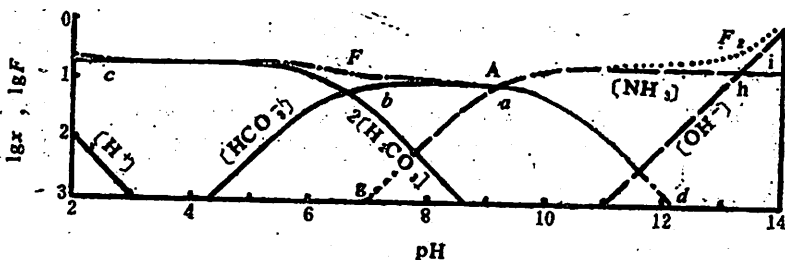
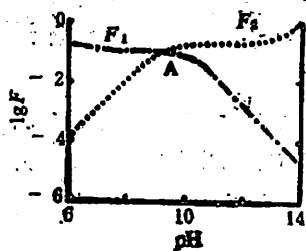


图 2 总线图解法用图 图 3 0.10M $(\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$ 溶液的 LCD 和总线图解法用图

上述事实可作如下解释: 因为 $F_2 = [\text{OH}^-] + [\text{NH}_3] > [\text{OH}^-]$ 及 $F_2 > [\text{NH}_3]$, 所以在同一坐标系中, 总碱线必位于最高碱线的上方, 在最高碱线的转折点 h , 因为 $[\text{OH}^-]_h = [\text{NH}_3]_h$, 所以 $\lg F_{2,h} = \lg([\text{OH}^-]_h + [\text{NH}_3]_h) = 0.3 + \lg[\text{OH}^-]_h$, 即总碱线比点 h 高 0.3 对数单位。在 $\text{pH} < 11.5$ 的范围内, $\lg F_2$ 可简化为 $\lg[\text{NH}_3]$, 因而在图 3 中就出现了总碱线与最高碱线部分重合的现象。同理可以解释总酸线与最高酸线的关系。

根据总酸、碱线的斜率特征及其与最高酸、碱线的关系, 容易在后两条线的上方分别画出近似的总酸、碱线, 进而可根据其交点确定体系的近态点。对于较简单的 LCD, 只要根据最高酸、碱线的交点即可确定体系的近态点。总之, 在 LCD 上确定体系近态点的方法可归纳如下:

- 1) 若最高酸、碱线仅相交于一点, 则该交点即为体系的一个近态点。
- 2) 若最高酸、碱线有多于一个的交点, 则在最高酸线和/或最高碱线的上方添画必要的近似总酸线和/或总碱线, 其交点 A 即为体系的一个近态点(与点 A 水平距离最短的最高酸、碱线的交点也是体系的一个近态点)。

绘制近似总酸线的步骤是: ①找出总酸线与最高酸线相重合的部分。当最高酸线与其它

酸线的垂直距离 ≥ 1.3 对数单位时, 这部分最高酸线与总酸线相重合; 其它部分最高酸线必略低于总酸线。②确定总酸线在最高酸线的转折点上方的位置。若转折点与其它酸线的垂直距离 ≥ 1.3 对数单位, 则总酸线比该转折点高约 0.3 对数单位。③根据总酸线具有恒小于零的斜率之特点, 把上述线、点连接成一条光滑的曲线, 即得近似总酸线。

近似总碱线的画法与之类似。

例: 试确定图 4 所示 LCD 上体系的近态点 (PBE 为 $3[\text{H}_2\text{PO}_4^-] + 2[\text{H}_2\text{PO}_7^{2-}] + [\text{HPO}_4^{2-}] + [\text{H}^+] = [\text{OH}^-] + 0.39$)。

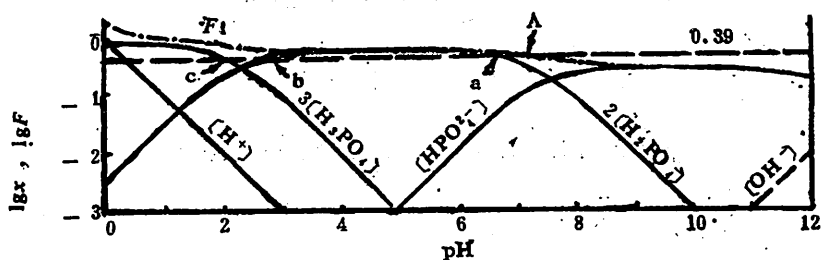


图 4 起始浓度分别为 $0.12\text{M Na}_2\text{PO}_4$ 及 $0.13\text{M H}_2\text{PO}_4$ 溶液的 LCD (H_2PO_4 的 $\text{p}K_{a1} = 2.12$, $\text{p}K_{a2} = 7.20$, $\text{p}K_{a3} = 12.36$)

解: 因为 LCD 的最高酸、碱线相交于 a 、 b 、 c 三点, 故在最高酸线的上方添画一条近似总酸线 $\lg F_1 \sim \text{pH}$, 它与近似总碱性 (即原来的最高碱线) 的交点 A 即为体系的一个近态点 (与点 A 横向最接近的点 a 是体系的另一个近态点)。

验证: 从图上读得 $\text{pH}_A \approx 7.3$, $\text{pH}_a \approx 6.6$, 这两个 pH 值与用计算机精确求解体系的 PBE 得到的 pH 值 (7.10) 都很接近, 说明上述结论是正确的。

用现有的其它方法^[4-6] 难于确定本例的近态点。

本文提出的确定 LCD 上体系近态点的方法具有可靠的数学基础, 且适应性广、直观简便。

参 考 文 献

- [1] Sillén, L. G., Treatise on Analytical Chemistry (eds. I. M. Kolthoff and P. J. Elving), New York, Wiley, 1959, Part I, Vol. 1, Chapter 8.
- [2] Kolthoff, I. M. et al., Quantitative Chemical Analysis, 4th ed., London, Macmillan, 1969, Part 1.
- [3] Erik Högföldt, Treatise on Analytical Chemistry (eds. I. M. Kolthoff and P. J. Elving), 2nd ed., Part I, Volume 2, New York, Wiley, 1979, Chapter 15.
- [4] 彭崇慧, 酸碱平衡的处理, 第二版, 北京大学出版社 (1982), 12~44.
- [5] 杨元炎, 化学通报, 8 (1984), 41.
- [6] 尹权、杨代菱, 分析化学例题与习题, 吉林人民出版社 (1985), 118~122.

**A New Method for Determining the State of
Acid-Base System in the Logarithmic
Concentration Diagram**

Chen Lingran Zhang Maosen

(Department of Modern Chemistry)

RECEIVED

DATE

BY

金属氧化物之间的相互作用

钱逸泰 陈祖耀 郑国斌

(应用化学系)

黄允兰

(结构成分分析中心)

1 引言

金属与载体之间的相互作用,近年来在催化领域研究得较多^[1,2]。

众所周知,适当的载体会使催化剂中的活性金属粒子变小^[3,4],通常,这是由于金属粒子在这些载体中具有高分散性所造成的。然而有关两个金属氧化物之间的相互作用及其本质至今还没有引起人们的足够注意。

一般说来,两个固体金属氧化物之间的相互关系有四种情况:1)形成一定的化合物;2)形成部分或完全固溶体;3)构成机械混合物;4)无任何明显的形成固溶体迹象但有明显相互作用。本文采用X-射线相分析和晶粒大小测定来综合估量某些金属氧化物之间,特别是与 SnO_2 之间的相互作用的强弱。

2 实验部分

为了获得可比较的实验结果,样品的化学制备都采用硝酸盐热分解法。分析纯硝酸盐经溶液混合后,先在 150°C 热分解12小时,再分别在 400°C 、 600°C 、 800°C 和 1000°C 下加热24小时^[5]。这样制得的样品十分均匀便于测量。对于金属氧化物- SnO_2 体系来说,以 SnO_2 为基体,金属氧化物的含量为10%摩尔百分数。

样品的热分析采用日本岛津DT-30高温热分析装置。X-射线粉末衍射使用日本理学D/MAX-rA型X-射线衍射谱仪。铜靶, K_α 辐射($\lambda=1.54178\text{ \AA}$)。Scherrer公式被用来测定氧化物体系的晶粒大小^[6]。测定时,对特定峰进行慢速扫描,并由图谱求得半峰宽。峰面积可按照计算机数字化处理结果求得,误差为 $\pm 15\text{ \AA}$ 。

3 结果和讨论

3.1 Al_2O_3 - Fe_2O_3 体系

图1显示 Al_2O_3 - Fe_2O_3 体系经 150°C 热分解 400°C 烧结样品的晶粒大小变化,从

Al_2O_3 含量对 Fe_2O_3 晶粒大小影响(图1)可知当 Fe_2O_3 中加入 0.5% Al_2O_3 时, 其晶粒已经开始变小, 十分敏感。

从该体系的 X—射线衍射谱可知, 凡烧结温度低於 900°C , 物相均为 $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, 当 900°C 烧结时, 才有 $\epsilon\text{-Al}_2\text{O}_3$ 出现, 此时, 体系热分析图中 880°C 处有一放热峰, 显然, 这两个结果是一致的。

由此说明, 尽管 Al_2O_3 和 $\epsilon\text{-Fe}_2\text{O}_3$ 在高温下会形成固溶体, 但在在中温下二者溶解度不大. 而在较低温度时, Al_2O_3 形成的非晶状态明显影响 Fe_2O_3 的晶粒大小. 因此 Al_2O_3 和 Fe_2O_3 之间, 在较宽的温度范围内存在不同程度的相互作用。

3.2 金属氧化物— SnO_2 体系

在该类型体系所研究的组成范围内, 仅在 $\text{ThO}_2\text{—SnO}_2$ 体系中於 600°C 以上烧结时出现

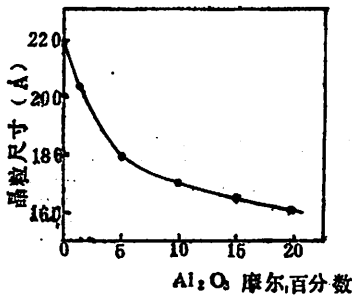


图 1 400°C 时 Al_2O_3 含量对 Fe_2O_3 晶粒生长的影响

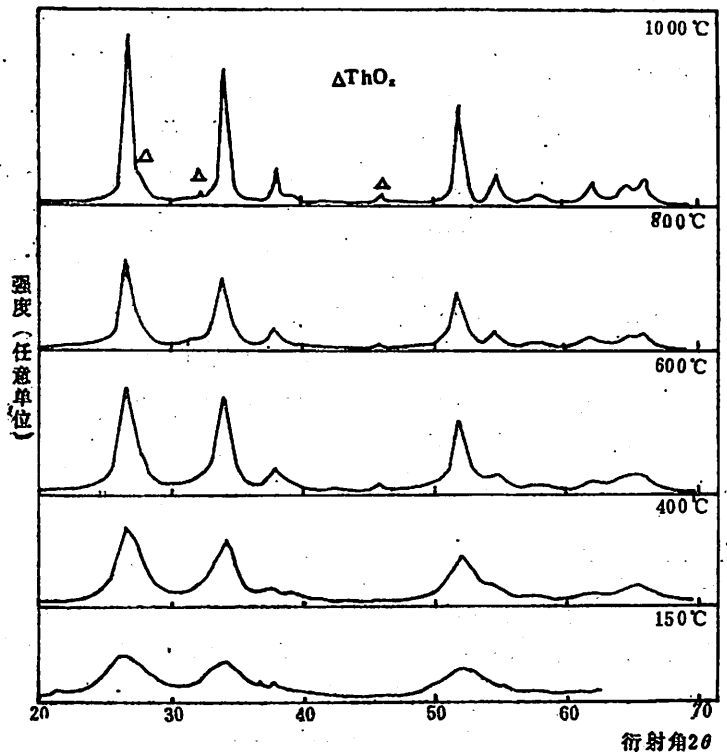


图 2 ThO_2 摩尔分数为 10%— SnO_2 体系在不同烧结条件下处理后的 X—射线粉末衍射图谱的比较 (右上角表示该体系的烧结温度)

ThO_2 相(图2), 其它各种金属氧化物— SnO_2 体系(金属氧化物为 NiO , Li_2O , Fe_2O_3 , Al_2O_3 , ZrO , Cr_2O_3) 都只出现 SnO_2 衍射峰, 其原因要么是由于金属氧化物含量不大(10%的摩尔百分数换算成重量百分数一般不到 10%), 也可能这些金属氧化物能与 SnO_2 形成固溶体或非晶。由此看来, 如果仅从这些体系的 X—射线粉末衍射 d 值无法考察上述金属氧化物与 SnO_2 的相互作用。

下面我们仔细讨论在掺有 10% 的摩尔百分数金属氧化物— SnO_2 体系的晶粒大小与温度

的关系(L—T关系),并把这种关系与纯 SnO_2 的情况相比较,发现掺杂的 SnO_2 有以下几种情况(图3)。

(1) $\text{NiO}-\text{SnO}_2$ 体系与纯 SnO_2 的L—T曲线无明显的差异。在 600°C ,晶粒度变化都有一个转折点(图3a曲线—1和图3a曲线—2),即在这个点之前晶粒度随温度变化较小,而在这个点之后,晶粒度随温度的提高急剧增加。实际上,纯 NiO 在 400°C 时,

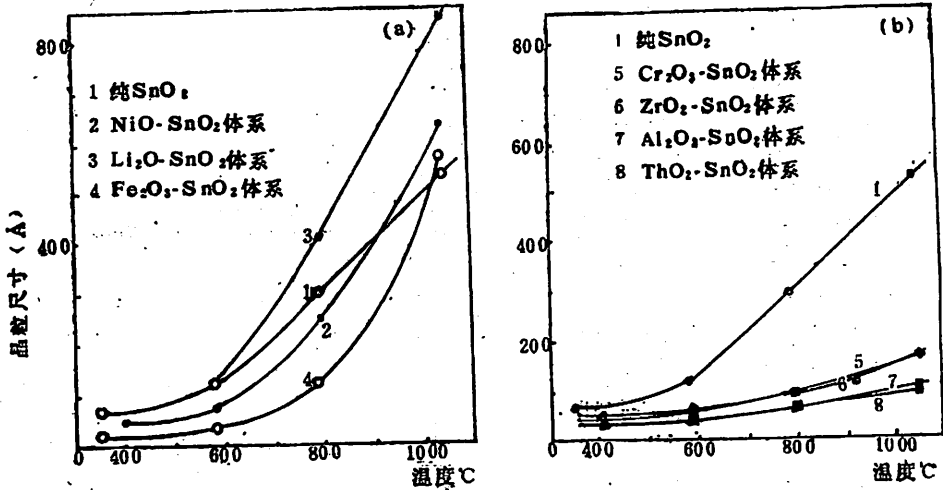


图3 不同金属氧化物和 SnO_2 体系下的烧结温度上晶粒尺寸之间的关系图

结晶度已经很好,但在 $\text{NiO}-\text{SnO}_2$ 体系的X—射线谱中并未发现有 NiO 的衍射线条,所以有可能是 SnO_2 与 NiO 形成固溶体, NiO 对 SnO_2 的晶粒生长没有显著的影响。

(2) $\text{Li}_2\text{O}-\text{SnO}_2$ 体系的晶粒度比纯 SnO_2 的要大,转变点也在 600°C (图3a曲线3)。 Li_2O 掺入 SnO_2 中有助於 SnO_2 晶粒的生长。由於它们的晶形和金属离子半径都很相近,因此很有可能是 Li_2O 溶入 SnO_2 。

(3) 从L—T曲线看, $\text{Fe}_2\text{O}_3-\text{SnO}_2$ 体系在低温时, Fe_2O_3 阻碍 SnO_2 晶粒生长,高温时,与纯 SnO_2 情况差不多(图3a—4),所以使得转变点移到 800°C ,但总的说来体系的晶粒度比纯 SnO_2 的小。可以认为, Fe_2O_3 在低温时分散在 SnO_2 的表面,阻碍了粒子长大,而在高温时可能与 SnO_2 形成固溶体,因而与纯 SnO_2 类似。

(4) $\text{Al}_2\text{O}_3-\text{SnO}_2$, $\text{ZrO}_2-\text{SnO}_2$, $\text{Cr}_2\text{O}_3-\text{SnO}_2$, $\text{ThO}_2-\text{SnO}_2$ 等体系的L—T曲线互相之间十分相似,晶粒度随温度变化都很小,没有转变温度,说明掺杂物大大地阻碍了 SnO_2 的生长。

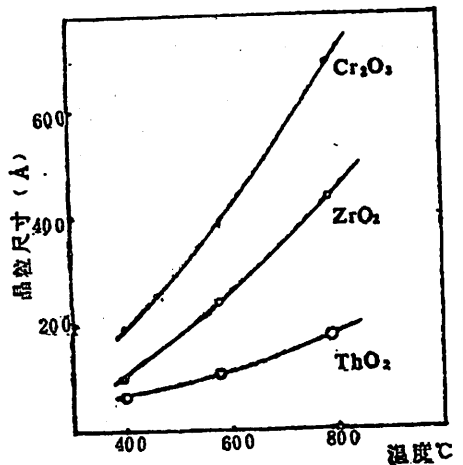


图4 某些纯氧化物的烧结温度与晶粒生长的关系

Al_2O_3 是典型的催化剂载体,即使在 600°C 热分解硝酸盐制得的产物,也主要是非晶状态。 ThO_2 在 600°C 烧结处理后,晶粒度也很小

(图4)。这些高分散性的物质,将显著地阻碍基质 SnO_2 晶粒的生长。但对 Cr_2O_3 和 ZrO_2 来说,无论以 X—射线衍射谱、还是从其纯硝酸盐热分解得到的 Cr_2O_3 和 ZrO_2 的晶粒大小来看(图4),其结晶度都比较好,所以 Cr_2O_3 或 ZrO_2 对 SnO_2 晶粒生长的影响不能归结为它们的结晶度不好。估计它们与 SnO_2 之间还有另外一种比较强的相互作用影响 SnO_2 的晶粒生长。

参 考 文 献

- [1] Tauster, S.J. and Fung, S.C., *J. Catalysis*, 55 (1978), 29.
- [2] Resasco, D.E. and Haller, C.L., *J. Catalysis*, 82 (1985), 279.
- [3] Sashital, S.R. et al., *J. Catalysis*, 50 (1977), 479.
- [4] Ganesan, P. et al., *J. Catalysis*, 52 (1978), 310.
- [5] Carreiro, L., Fournier, J., Yitai Qian, *J. Solid state Chem.*, 58 (1985), 211.
- [6] Klug, H.P. and Alexander, L.E., *X-ray Diffraction Procedures for Polycrystalline and Amorphous Materials*, John Willey & Sons Inc., New York (1974), 656.

The Interaction Between Metaloxide and Tin Dioxide

Qian Yitai Chen Zuyao Zheng Guobin

(Department of Applied Chemistry)

Huang Yunlan

(The Center for Structure and Elements Analysis)

常温下新鲜正长石的溶解和比表面关系的初步研究

郭 范 张 巽 李永进

(地球与空间科学系)

邵良衡 张孝静

(近代化学系)

研究硅酸盐矿物和水的相互作用已成为近二十年来表生地球化学的“热门”课题之一。Wallast, Luce 和 Chou 认为形成各种淋滤层的过程控制着硅酸盐矿物溶解的抛物线阶段^[1-3]。Holdren 和 Schott 用 HF-H₂SO₄ 清洗矿物颗粒表面上细微粉末后, 没有观察到抛物线阶段, 认为线性阶段的溶解速率是由表面反应控制的^[4,5]。

国外硅酸盐风化作用模拟实验, 在连续溶解过程中, 皆采用分别取溶液测定释放元素量的方式。我们认为溶解的过程是一个连续过程, 溶解时取出颗粒检查比表面后再放入溶液中继续溶解, 可能会干扰连续溶解的正常进行。为了真实地反映溶解过程中表面积的变化, 我们将等重量不同粒度的正长石于室温下同时溶解, 在溶解不同时间后, 中断溶解过程, 取出固体和水样, 分别测量比表面大小和释放的 SiO₂ 量。本实验所用样品在溶解前亦不用 HF-H₂SO₄ 等酸清洗, 以避免在酸清除矿物颗粒表面附着的细微粉末的同时, 使矿物颗粒产生溶蚀作用。

实 验

样品准备: 研究用正长石大块晶体由科大矿物实验室杨海涛老师提供。粉碎后过干筛时充分振动, 分别将 50—70 目 (355 μ —244 μ , 平均 299.5 μ)、90—120 目 (160—125 μ , 平均 142.5 μ) 及 120—300 目 (125—50 μ , 平均 87.5 μ) 样品烘干, 用万分之一天平称量 5.0000 \pm 0.0003g 数份。

溶剂: 用 pH=4 的蒸馏水盐酸溶液 4750ml 加入 1:1 冰醋酸—醋酸钠缓冲溶液, 配制 pH=4.2 的溶剂 5000ml。

用钼兰比色法测定 SiO₂ 浓度。

用 ST-03 型气相色谱比表面测定仪 (北京分析仪器厂) 测定比表面, 用仪器常数法标定峰面积; 每个样品皆用连续流动法测定 4 点气体吸收。

实验过程: 分别将 5g 样品放入已用稀盐酸和蒸馏水洗净的带盖 500ml 塑料瓶中, 加入 100ml 溶剂, 每天用振荡器振动 2 小时, 在整个过程中, 检查溶剂的 pH 值均为 4.2 左右, 温度 16—25℃。按预定时间过滤样品, 溶液用于测定 SiO₂ 的浓度, 正长石颗粒用蒸馏水洗净风干。测定比表面在 200℃ 下通 H₂ 2 小时。120—300 目样品因粒度太小, 未测比表面。

结果和讨论

在常温下, 新鲜正长石在溶解不同时间后释放 SiO₂ 的量 (mg/l);

时间 (h)	12	23	48	96	216	445	638	780
50—70 目		1.52	1.63	2.22	3.22	4.20	5.64	6.47
90—120 目	2.74	2.77	3.03	4.83	6.89	4.38	10.70	12.93
120—300 目	2.76	3.48		5.85	12.19	12.83	16.59	18.75

溶解不同时间, 新鲜正长石的比表面 (m²/g)

时间 (h)	0	12	23	48	96	216	445
50—70 目	0.1131			0.05935		0.09067	0.09723
90—120 目	0.2726	0.2157	0.1233	0.1382	0.1818	0.2438	0.2485

图 1、2 中三条新鲜正长石溶解曲线类似于其他人的研究^[1, 2, 4-6]。

溶解 SiO₂ 曲线首先呈抛物线增加, 216 小时后呈直线状。图 3 中比表面变化曲线在前

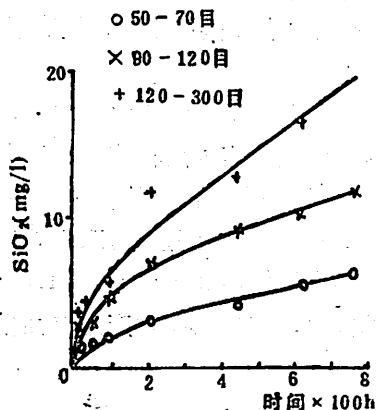


图 1 释放 SiO₂ 量与时间关系 (pH=4) 图

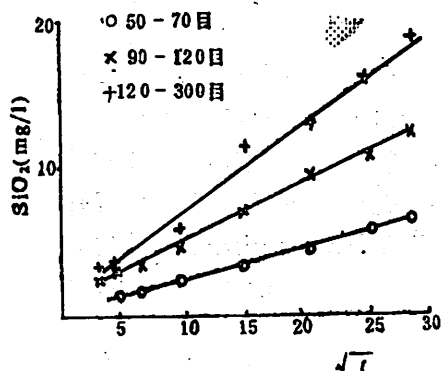


图 2 释放 SiO₂ 量与时间平方根关系图

216 小时呈马鞍状, 而后变化甚缓。两种颗粒的比表面之比基本上不变, 即

$$\frac{S_2^0}{S_1^0} \approx \frac{S_2^{48}}{S_1^{48}} \approx \frac{S_2^{445}}{S_1^{445}}$$

S 表示比表面, 下标 1、2 分别表示 50—70 目、90—120 目颗粒, 上标为溶解时间。

1) 抛物线阶段

一般将硅酸盐矿物溶解时释放 Si 等元素呈抛物线增加阶段称为硅酸盐风化作用的抛物线阶段。在前 23 小时溶解过程中, 由于新鲜正长石表面附着大量细微粉末 (甚至小于 1μ), 它们的迅速溶解导致了颗粒比表面迅速减小和释放 SiO₂ 呈抛物线增加。但溶解 23 小时后,

特别是溶解 48 小时后比表面已不再减小, 粉末溶解对表面积的减小已不起主导作用, 但释放 SiO_2 在 216 小时以前仍然呈抛物线增加。由此可知新鲜正长石颗粒集合体溶解初期阶段存在着抛物线阶段, 而 Luce 在解释抛物线阶段溶解机理时认为溶解过程中颗粒表面积不变化, 显然与我们的实验结果一比表面呈马鞍状变化, 不一致。我们认为, 在粉碎正长石过程中, 并不可能把近表面的各类易反应点全部暴露在颗粒表面上, 而许多晶体缺陷, 包括螺旋位错、Shorthy 缺陷和气泡包裹体等孔洞可能靠近表面但未暴露在表面上(图 4a), 缺陷与溶剂接触的“盖面”成为最易溶解的地方, 迅速溶蚀掉各种盖面(图 4b)使表面积增加, 同时释放出 SiO_2 , 呈抛物线阶段。

经 $\text{HF}-\text{H}_2\text{SO}_4$ 等酸清洗过的颗粒不能明显呈现抛物线阶段, 是因为清除粉末的同时也溶蚀掉许多“盖面”。

两种颗粒抛物线阶段的平均溶解速率 \bar{r} 、颗粒平均边长 \bar{d} (筛孔平均直径) 比表面比如下:

$$\bar{r}_1 : \bar{r}_2 = 1 : 2.14, \quad \bar{d}_1 : \bar{d}_2 = 1 : 2.10, \quad S_1^0 : S_2^0 = 1 : 2.41$$

抛物线阶段释放 SiO_2 的平均速率基本上与颗粒表面积大小成正比, 与颗粒平均边长成反比, 即 $\frac{\bar{r}_i}{S_i} = K \frac{\bar{d}_i}{S_i} = K \frac{\bar{d}_i}{\bar{d}_i}$, 比例常数 $K \approx 1$ 。溶解速率受到

细微粉末和颗粒表面反应的控制。

2) 线性阶段

一般称释放 Si 等元素呈近似常数增加阶段为线性阶段。正长石溶解 216 小时后表面积基本上不变, 释放 SiO_2 速率趋近常数。晶体沿螺旋位错方向连续溶解, 基本上不增减表面积大小, 已打开的“孔洞”也成为易溶点, “孔洞”边部的扩张(图 4c)对表面积变化影响也微乎其微。

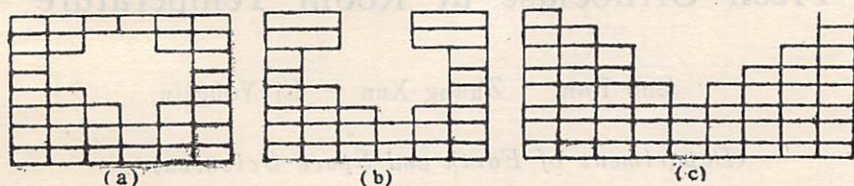


图 4 “孔洞”溶蚀与扩张示意图

将颗粒集合体在 445 小时后的平均速率作为线性阶段溶解速率, 其比例关系:

$$r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 1.56 : 2.69, \quad \frac{1}{d_1} : \frac{1}{d_2} : \frac{1}{d_3} = \frac{1}{1} : \frac{1}{2.1} : \frac{1}{3.42},$$

$S_1^{445} : S_2^{445} = 1 : 2.55$ 。溶解速率和表面积大小, 颗粒平均边长已不是简单的比例关系。

颗粒集合体的溶解速率与颗粒表面积之间关系的一般表达式^[6]

$$r = kS^m$$

k 为代换常数, 假定对同一样品 m 为常数。将 r_1 、 r_2 、 S_1^{445} 、 S_2^{445} 代入上式, 两式相除后两边取对数, $m = 0.5$,

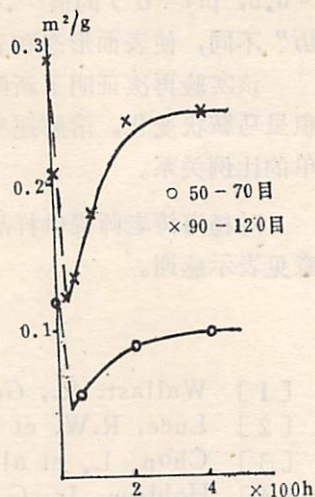


图 3 比表面随时间变化图

m 值小于粗颗粒硅酸盐风化实验结果 ($m=1$)、大于经 HF—H₂SO₄ 等酸清洗过钠长石的实验结果 ($m=0.18$, pH=3)、接近于未用酸清洗表面钠长石颗粒的实验结果 ($m=0.5$, pH=6) 的值^[6]。这种差异与硅酸盐溶解前的预处理有关, 样品预处理和样品“经历”不同, 使表面形态和表面溶蚀坑深浅不同, 引起 m 值不同。

该实验再次证明了新鲜正长石在风化作用初期阶段存在着抛物线阶段, 但此阶段比表面积呈马鞍状变化, 溶解速率与表面积大小成正比, 而线性阶段溶解速率与表面积大小不是简单的比例关系。

对杨海涛老师提供样品, 周峥嵘帮助绘图, 支霞臣、李曙光老师曾给原稿提出宝贵修改意见表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Wallast, R., *Geochim. Cosmochim. Acta*, 31 (1967), 638—648.
- [2] Luce, R.W. et al., *Geochim. Cosmochim. Acta*, 36 (1972), 35—60.
- [3] Chon, L. et al., *Geochim. Cosmochim. Acta*, 48 (1984), 2205—2217.
- [4] Holdren, Jr. G. R. et al., *Geochim. Cosmochim. Acta*, 43 (1979), 1161—1171.
- [5] Schott, J. et al., *Geochim. Cosmochim. Acta*, 45 (1981), 2123—2135.
- [6] Holdren, Jr. G.R. et al., *Geochim. Cosmochim. Acta*, 49 (1985), 675—681.

A Preliminary Study of the Relation Between Specific Surface Area and Dissolution of Fresh Orthoclase at Room Temperature

Guo Fan Zhang Xun Li Yougjin

(Department of Earth and Space Sciences)

Shao Liangheng Zhang Xiaojing

(Department of Modern Chemistry)

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

(Quarterly)

Vol.18 No 3 Sum No.60 1988

Hefei, Anhui
The People's Republic of China

中国科学技术大学学报

(季刊)

第18卷 第3期 (总第60期)

编辑出版:《中国科学技术大学学报》编辑部
(安徽省合肥市金寨路24号)

印刷:中国科学技术大学印刷厂

国内总发行:合肥市邮局

订购处:全国各地邮局

国外总发行:中国国际图书贸易总公司
(中国国际书店,北京2820信箱)

国内统一刊号:CN34—1054 1988年9月出版

邮政代号:26—31

国外代号:Q 527