第44卷第12期 中国科学技术大学学报 Vol. 44, No. 12
2014年12月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Dec. 2014

文章编号:0253-2778(2014)12-0986-05

环 $F_{p^k}+uF_{p^k}$ 上循环码的深度分布

陈 思,朱士信

(合肥工业大学数学学院,安徽合肥 230009)

摘要:研究了环 $R=F_{p^k}+uF_{p^k}$ 上任意长度的循环码及其自对偶码的深度分布和深度谱。利用环 R 上循环码的生成多项式及 R 上线性码的深度分布,给出了环 R 上循环码及其自对偶码的深度分布和深度谱,并给出了长度为 p^m 的循环码的深度分布和深度谱.

关键词:循环码;对偶码;深度分布;深度谱

中图分类号:TN911.22 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2014.12.004

AMS Subject Classification (2000): 94B15

引用格式: Chen Si, Zhu Shixin. The depth distribution of linear cyclic codes over ring $F_{p^k}+uF_{p^k}$[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014,44(12):986-990.

陈思,朱士信. 环 $F_{p^k}+uF_{p^k}$ 上循环码的深度分布[J]. 中国科学技术大学学报,2014,44(12):986-990.

The depth distribution of linear cyclic codes over ring $F_{p^k}+uF_{p^k}$

CHEN Si, ZHU Shixin

(*School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China*)

Abstract: The depth distribution and spectrum of cyclic codes and self-dual codes of an arbitrary length over ring $R=F_{p^k}+uF_{p^k}$ were studied. Using the generator polynomials of cyclic codes and the depth distribution of linear codes over ring R, the depth distribution and depth spectrum of cyclic codes and self-dual codes over the ring R were given, along with those of cyclic codes of length p^m were also given.

Key words: cyclic code; self-dual code; depth distribution; depth spectrum

0 引言

近年来,研究码及码字结构是编码研究者们研究的一个重要方向.文献[1]首次把微分运算运用到线性码中,定义了线性码的深度及深度谱,给出了计算二元线性码的码字深度的算法.文献[2]研究了二元域上线性循环码的码字深度谱.文献[3]研究了有限域上线性码深度分布的一般计算公式.文献[4]通过研究码字深度的性质,找到一种构造给定深度谱的线性码的方法,从而对于任意给定的一组自然数都可以构造一个线性码,使得它的深度谱恰为这组自然数.朱士信等[5]将深度的概念推广到环上,讨论了环 Z_4 上码字深度的一些基本性质,并给出了两种计算码字深度的递归算法.文献[6]给出了剩余类环 Z_{p^m} 上循环码的深度分布,其中 p 为质数.在此基础上,文献[7]根据中国剩余定理研究了 Z_M 上循环码的深度谱.四元环一直都备受人们关注,文献[8]给

收稿日期:2014-01-09;**修回日期**:2014-04-10

基金项目:国家自然科学基金(61370089),合肥工业大学春华计划项目资助.

作者简介:陈思,女,1989年生,硕士.研究方向:代数编码与密码. E-mail: chensmath@126.com

通讯作者:朱士信,博士/教授. E-mail: zhushixin@hfut.edu.cn

出了环 $R=F_2+uF_2$ 上线性码中码字深度的算法，进而给出了一类 $4^{k_1}2^{k_2}$ 型线性码的深度分布及码字深度的递归算法；文献[9]研究了 F_2+vF_2 上的编码问题，接着文献[10]研究了该环上的深度分布和深度谱，并给出了 $4^{k_1}2^{k_2}2^{k_3}$ 型线性码的深度谱的上下界. 廖群英等[11]将线性码的深度分布及深度谱推广到了环 F_q+uF_q(其中 q 为素数的方幂)上，并得到码字深度的一个递归算法，还在文献[12]中给出了更一般的环 $R_m=F_q[u]/(u^m)$ 上线性码的深度谱和深度分布的计算公式. 文献[13]利用有限链环上长为 n 的循环码的生成多项式，从差分运算的线性性质及有限链环上循环码的同构关系，给出了循环码的深度谱. 本文利用文献[14]中环 F_q+uF_q 上循环码及其对偶码的结构，并结合 F_q+uF_q 上线性码的深度分布，研究了该环上长度为 n 的循环码及自对偶码的深度分布及深度谱，进而给出了长度为 p^m 的循环码和自对偶循环码的深度分布和深度谱.

1　基本知识

令 $R=F_{p^k}+uF_{p^k}$，其中，$u^2=0$，p 为素数. 对环 R 中任意元素 ω，均可唯一表示为 $\omega=r(\omega)+ut(\omega)$，其中，$r(\omega),t(\omega)\in F_{p^k}$. 设 $n=p^m s$，其中，$(p,s)=1$，R 上长为 n 的码 C 是 R^n 的一个非空子集，若 C 是 R^n 的一个 R 子模，则称 C 为 R 上的线性码.

设 C 是 R 上长度为 n 的线性码，若对任意的 $c=(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})\in C$，有 $(c_{n-1},c_0,\cdots,c_{n-2})\in C$，则称 C 为 R 上长度为 n 的循环码. 记 $R_n=R[x]/(x^n-1)$，由于任意的码字 $c=(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})\in C$ 对应了 $R[x]$ 中的多项式 $c(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$，易证循环码 C 中所有码字对应的多项式构成剩余类环 R_n 的一个理想，这样可以将 R 上的循环码 C 看作 R_n 的理想.

若 $f(x)\mid(x^n-1)$，则记 $\hat{f}(x)=(x^n-1)/f(x)$.

定义 1.1　对任意的 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in R^n$，定义其微分运算为

$$D(c)=(c_2-c_1,c_3-c_2,\cdots,c_n-c_{n-1}).$$

进行递归运算定义：$D^i(\omega)=D(D^{i-1}(\omega))$，显然 D^i 是从 R^n 到 R^{n-i} 的线性算子，这里约定 $n=1$ 时 $D(\omega)=0$；进而给出码字深度的定义.

定义 1.2　设 $\omega\in R^n$，满足 $D^i(\omega)=(0^{n-i})$ 的最小非负整数 i 称为向量 ω 的深度，记作 $\mathrm{Depth}(\omega)=i$；若没有这样的 i 存在，则规定 $\mathrm{Depth}(\omega)=n$，从而 i 的取值范围为 $0\leqslant i\leqslant n$.

定义 1.3　设 C 是环 R 上长度为 n 的码，用 D_i 表示 C 中深度为 i 的码字个数，则称集合 $\{D_0,D_1,\cdots,D_n\}$ 为码 C 的深度分布，称 $\{i\mid D_i\neq 0$，且 $1\leqslant i\leqslant n\}$ 为码 C 的深度谱，记作 $\mathrm{Dept}(C)$，约定 $\mathrm{Dept}(\{0\})=\varnothing$.

由文献[11]得到如下主要结果：

命题 1.4　设环 R 上任意的向量 $\omega=r(\omega)+ut(\omega)$，其中，$r(\omega),t(\omega)\in F_{p^k}$，由微分定义可知

$$D^i(\omega)=D^i(r(\omega))+uD^i(t(\omega)),0\leqslant i\leqslant n,$$

则 $\mathrm{Depth}(\omega)=\max\{\mathrm{Depth}(r(\omega)),\mathrm{Depth}(t(\omega))\}$.

命题 1.5　设 C 是环 R 上长度为 n 的线性码，定义：

$$R(C)=\{a\in F_{p^k}^{n}\mid \exists\, b\in F_{p^k}^{n},a+ub\in C\},$$

$$T(C)=\{b\in F_{p^k}^{n}\mid \exists\, a\in F_{p^k}^{n},a+ub\in C\},$$

则 $R(C)$ 与 $T(C)$ 均是 F_{p^k} 上的线性码，且 $R(C)\subseteq T(C)\subseteq C$.

命题 1.6　设 C 是 R 上长度为 n 的线性码，$R(C)$ 与 $T(C)$ 的深度谱分别为 $\{l_1,l_2,\cdots,l_{m_1}\}$ 和 $\{h_1,h_2,\cdots,h_{m_2}\}$，其中，$l_1\leqslant l_2\leqslant\cdots\leqslant l_{m_1}$，$h_1\leqslant h_2\leqslant\cdots\leqslant h_{m_2}$，则 $\mathrm{Dept}(R(C))\subseteq\mathrm{Dept}(T(C))$ 且 $\mathrm{Dept}(C)=\mathrm{Dept}(T(C))=\{h_1,h_2,\cdots,h_{m_2}\}$.

命题 1.7[15]　设 C 是 F_{p^k} 上长为 n 的线性码，C 的深度分布为 $\{D_0,D_1,D_2,\cdots,D_t\}$，则 $D_0=1$，且

$$D_i=(p^k-1)p^{k(i-1)}(1\leqslant i\leqslant t).$$

2　主要结果

引理 2.1[14]　设 C 是环 R 上长度为 n 的循环码，则在 $F_{p^k}[x]$ 中存在唯一的首一多项式 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$，使得 $C=\langle f(x)+uh(x),ug(x)\rangle$，其中，$g(x)\mid f(x)\mid x^n-1$，$\deg g(x)>\deg h(x)$.

定理 2.2　设 C 是 R 上长度为 n 的循环码，且

$$C=\langle f(x)+uh(x),ug(x)\rangle.$$

设 $d(x)=(g(x),h(x))$，若 $\hat{d}(x)=(x-1)^{s_1}d_1(x)$，其中，$\deg d_1(x)=r_1$，$s_1\geqslant 0$ 且 $x-1$ 不整除 $d_1(x)$，则 C 的深度谱为

$$\mathrm{Dept}(C)=\{1,2,\cdots,s_1,n-r_1+1,\cdots,n\}.$$

证明　由命题 1.5 知：

$$T(C)=\{b\in F_{p^k}^{n}\mid \exists\, a\in F_{p^k}^{n},a+ub\in C\},$$

容易验证 $T(C)$ 是 F_{p^k} 上的循环码.

因为 $u(f(x)+uh(x))=uf(x)\in C$，所以 $f(x)\in T(C)$，则易证

$$T(C)=\langle f(x),g(x),h(x)\rangle,$$

而 $g(x)\mid f(x)\mid x^n-1$，有 $T(C)=\langle g(x),h(x)\rangle$.

由于 $d(x)=(g(x),h(x))$，故 $T(C)=\langle d(x)\rangle$.

若 $\hat{d}(x)=(x-1)^{s_1}d_1(x)$，$\deg d_1(x)=r_1$，其中，$s_1\geqslant 0$，$x-1$ 不整除 $d_1(x)$，则由文献[13]可得 $T(C)$ 的深度谱为

$$\mathrm{Dept}(T(C))=\{1,2,\cdots,s_1,n-r_1+1,\cdots,n\},$$

利用命题1.6可知

$$\mathrm{Dept}(C)=\mathrm{Dept}(T(C))=\{1,2,\cdots,s_1,n-r_1+1,\cdots,n\}.\qquad\square$$

设 C 是 R 上长度为 n 的循环码，且

$$C=\langle f(x)+uh(x),ug(x)\rangle,$$

易证 $R(C)$ 也是 F_{p^k} 上的循环码，并且 $R(C)=\langle f(x)\rangle$. 设 $\hat{f}(x)=(x-1)^{s_2}d_2(x)$，其中，$\deg d_2(x)=r_2$，$s_2\geqslant 0$ 且 $x-1$ 不整除 $d_2(x)$，同样可得 $R(C)$ 的深度谱为

$$\mathrm{Dept}(R(C))=\{1,2,\cdots,s_2,n-r_2+1,\cdots,n\}.$$

由于 $d(x)\mid f(x)\mid x^n-1$，可得 $\hat{f}(x)\mid\hat{d}(x)$，即 $(x-1)^{s_2}d_2(x)\mid(x-1)^{s_1}d_1(x)$，因此 $s_2\leqslant s_1$，$r_2\leqslant r_1$. 利用命题1.4，可得到下面的定理：

定理 2.3 设 C 是 R 上长度为 n 的循环码，且

$$C=\langle f(x)+uh(x),ug(x)\rangle.$$

设 $d(x)=(g(x),h(x))$，若

$$\hat{d}(x)=(x-1)^{s_1}d_1(x),$$

$$\hat{f}(x)=(x-1)^{s_2}d_2(x),$$

$$\deg d_1(x)=r_1,\deg d_2(x)=r_2,$$

其中，$s_1\geqslant 0$，$s_2\geqslant 0$ 且 $x-1$ 不整除 $d_1(x)$ 与 $d_2(x)$，则 C 的深度分布为

$$\{D_0,D_1,\cdots,D_{r_1+s_1}\},$$

其中，

$$D_i=\begin{cases}1,\ i=0;\\(p^{2k}-1)p^{2k(i-1)},\ 1\leqslant i\leqslant s_2;\\(p^k-1)p^{k(i+s_2-1)},\ s_2<i\leqslant s_1+r_1-r_2;\\(p^{2k}-1)p^{k(2i+r_2-r_1+s_2-s_1-2)},\\\qquad s_1+r_1-r_2<i\leqslant s_1+r_1.\end{cases}$$

证明 容易验证 $T(C)=\langle d(x)\rangle$，$R(C)=\langle f(x)\rangle$，且 $R(C)$ 与 $T(C)$ 均是 F_{p^k} 上的循环码. 根据已知条件和文献[13]，可得到 $R(C)$ 与 $T(C)$ 的深度谱分别为

$$\mathrm{Dept}(T(C))=\{1,2,\cdots,s_1,n-r_1+1,\cdots,n\},$$

$$\mathrm{Dept}(R(C))=\{1,2,\cdots,s_2,n-r_2+1,\cdots,n\}.$$

令 $R(C)$ 与 $T(C)$ 的深度分布分别为 $\{t_0,t_1,t_2,\cdots,t_{s_2+r_2}\}$，$\{d_0,d_1,d_2,\cdots,d_{s_1+r_1}\}$，则有 $t_0=d_0=1$，$t_i=(p^k-1)p^{k(i-1)}$，$d_j=(p^k-1)p^{k(j-1)}$，其中，$1\leqslant i\leqslant s_2+r_2$，$1\leqslant j\leqslant s_1+r_1$. 对于 C 中的任意向量 $\omega=r(\omega)+ut(\omega)$，其中，$r(\omega),t(\omega)\in F_{p^k}$，由命题1.4可知

$$\mathrm{Depth}(\omega)=\max\{\mathrm{Depth}(r(\omega)),\mathrm{Depth}(t(\omega))\},$$

那么 $\mathrm{Depth}(\omega)=i$ 当且仅当 $\mathrm{Depth}(r(\omega))=i$ 且 $\mathrm{Depth}(t(\omega))\leqslant i$，或者 $\mathrm{Depth}(t(\omega))=i$ 且 $\mathrm{Depth}(r(\omega))\leqslant i$. 由于 $R(C)\subseteq T(C)$，则

$$\mathrm{Dept}(R(C))\subseteq\mathrm{Dept}(T(C))$$

那么

当 $i=0$ 时，易知 $D_0=1$；

当 $1\leqslant i\leqslant s_2$ 时，

$$D_i=\sum_{j=0}^{i-1}d_it_j+\sum_{j=0}^{i-1}d_jt_i+d_it_i=2(p^k-1)p^{k(i-1)}\sum_{j=0}^{i-1}t_j+(p^k-1)^2p^{2k(i-1)}=(p^{2k}-1)p^{2k(i-1)}.$$

当 $s_2<i\leqslant s_1+r_1-r_2$ 时，

$$D_i=\sum_{j=0}^{s_2}d_it_j=(p^k-1)p^{k(i-1)}\sum_{j=0}^{s_2}t_j=(p^k-1)p^{k(i+s_2-1)};$$

当 $s_1+r_1-r_2<i\leqslant s_1+r_1$ 时，

$$D_i=\sum_{j=0}^{i+r_2-r_1+s_2-s_1}d_it_j+\sum_{j=0}^{i-1}d_jt_{i+r_2-r_1+s_2-s_1}=(p^{2k}-1)p^{k(2i+r_2-r_1+s_2-s_1-2)}.$$

综上所述，可以得到 C 的深度分布，定理即证. $\square$

当 $s=1$，即 $n=p^m$ 时，可得下面的推论.

推论 2.4 在定理2.2和2.3中，若 $n=p^m$，则 C 的深度谱为 $\mathrm{Dept}(C)=\{1,2,\cdots,s_1\}$，它的深度分布为

$$D_i=\begin{cases}1,\ i=0;\\(p^{2k}-1)p^{2k(i-1)},\ 1\leqslant i\leqslant s_2;\\(p^k-1)p^{k(i+s_2-1)},\ s_2<i\leqslant s_1.\end{cases}$$

证明 当 $n=p^m$ 时，

$$x^n-1=x^{p^m}-1=(x-1)^{p^m},$$

由于 $d(x)\mid f(x)\mid(x-1)^{p^m}$，而

$$\hat{f}(x)=(x-1)^{s_2}d_2(x),$$

$$\hat{d}(x)=(x-1)^{s_1}d_1(x),$$

其中，$\deg d_1(x)=r_1$，$\deg d_2(x)=r_2$，所以 $r_1=r_2=0$，即证. $\square$

定理 2.5　设 $C=\langle f(x)+uh(x), ug(x)\rangle$ 是环 R 上长度为 n 的循环码，$g(x)=(x-1)^{l_1}g_1(x)$，其中，$l_1\geqslant 0$，$x-1$ 不整除 $g_1(x)$ 且 $\deg g_1(x)=l_2$. 若 C 是自对偶码且 $p>2$，则有

① C 的深度谱为

$$\{1,2,\cdots,p^m-l_1,p^m+l_2+1,\cdots,n\};$$

② C 的深度分布为

$$D_i=\begin{cases}1,\ i=0;\\(p^{2k}-1)p^{2k(i-1)},\ 1\leqslant i\leqslant l_1;\\(p^k-1)p^{k(i+l_1-1)},\ l_1<i\leqslant n-l_1-2l_2;\\(p^{2k}-1)p^{k(2i+2l_2+2l_1-n-2)},\\\qquad n-l_1-2l_2<i\leqslant n-l_1-l_2.\end{cases}$$

证明　由文献[14]可得其对偶码为

$$C^{\perp}=\left\langle\left[\hat{g}(x)-u\frac{h(x)\hat{f}(x)}{g(x)}\right]^{*},u\hat{f}^{*}(x)\right\rangle.$$

令 $\lambda(x)=\dfrac{h(x)\hat{f}(x)}{g(x)}$，有

$$C^{\perp}=\langle[\hat{g}(x)-u\lambda(x)]^{*},u\hat{f}^{*}(x)\rangle.$$

因为

$$\deg g(x)>\deg h(x),\text{则 }\deg\hat{g}(x)>\deg\lambda(x),$$

又 $C^{\perp}=\langle[\hat{g}(x^{-1})-u\lambda(x^{-1})]x^{\deg\hat{g}(x)},u\hat{f}^{*}(x)\rangle$，有

$$C^{\perp}=\langle\hat{g}^{*}(x)-u\lambda^{*}(x)x^{\deg\hat{g}(x)-\deg\lambda(x)},u\hat{f}^{*}(x)\rangle.$$

若 C 是自对偶码，即 $C=C^{\perp}$. 设 $g(x)$ 的常数项为 c，由于 $g(x)\mid x^n-1$，则 c 不为零，因此

$$\deg g(x)=\deg g^{*}(x),$$

即 $\deg\hat{g}(x)=\deg\hat{g}^{*}(x)$，由 $f(x)$ 的唯一性可得 $f(x)=c^{-1}\hat{g}^{*}(x)$. 由于

$$[f(x)+uh(x)]ug(x)=0,$$

即 $uf(x)g(x)=0$，于是得到 $\hat{g}(x)\mid f(x)$，然而

$$\deg f(x)=\deg\hat{g}^{*}(x)=\deg\hat{g}(x),$$

所以

$$f(x)=\hat{g}(x)=c^{-1}\hat{g}^{*}(x).$$

若 $p>2$，由于 $[f(x)+uh(x)]^2=0$，有

$$2uf(x)h(x)=0,$$

即 $f(x)h(x)=0$；若 $h(x)\neq 0$，则 $\hat{f}(x)\mid h(x)$，即 $g(x)\mid h(x)$，可知 $\deg g(x)\leqslant\deg h(x)$，与 $\deg g(x)>\deg h(x)$ 矛盾，故 $h(x)=0$，$d(x)=g(x)$，从而 $d(x)=\hat{f}(x)$，即

$$x^n-1=(x-1)^{s_2}d_2(x)(x-1)^{s_1}d_1(x),$$

其中，$\deg d_1(x)=r_1$，$\deg d_2(x)=r_2$，则

$$s_1+s_2=p^m,r_1+r_2=p^m(s-1).$$

在定理 2.2 和 2.3 中用 l_1 替换的 s_2，用 l_2 替换 r_2，用 p^m-l_1 替换 s_1，用 $p^m(s-1)-l_2$ 替换 r_1，即可得到自对偶码的深度谱和深度分布. □

推论 2.6　在定理 2.5 中，若 $n=p^m$，则 C 的深度谱为$\{1,2,\cdots,p^m-l,p^m+1,\cdots,n\}$，它的深度分布为

$$D_i=\begin{cases}1,\ i=0;\\(p^{2k}-1)p^{2k(i-1)},\ 1\leqslant i\leqslant l;\\(p^k-1)p^{k(i+l-1)},\ l<i\leqslant n-l.\end{cases}$$

其中，$\deg g(x)=l$.

证明　当 $n=p^m$ 时，

$$x^n-1=x^{p^m}-1=(x-1)^{p^m},$$

由于 $g(x)\mid x^n-1$，则 $g(x)=(x-1)^l$，在定理 2.5 中，$l_1=l$，$l_2=0$，其中，$\deg g(x)=l$，从而得证. □

例　研究环 $R=F_9+uF_9$ 上长度为 18 的循环码的深度谱及深度分布. 在 $R[x]$中，

$$x^{18}-1=(x+1)^9(x-1)^9.$$

设

$$C_1=\langle(x-1)^4(x+1)^3+u(x-1)(x+1)^3,\ u(x-1)^3(x+1)^2\rangle,$$

易知它是环 R 上长度为 18 的循环码，可得它的深度谱为$\{1,2,3,4,5,6,7,8,12,13,14,15,16,17,18\}$，它的深度分布为

$$\{1,80,6480,80\cdot 3^8,80\cdot 3^{12},80\cdot 3^{16},8\cdot 3^{20},8\cdot 3^{22},8\cdot 3^{24},8\cdot 3^{26},80\cdot 3^{28},80\cdot 3^{32},80\cdot 3^{36},80\cdot 3^{40},80\cdot 3^{44},80\cdot 3^{48}\}.$$

设 $C_2=\langle(x-1)^7(x+1)^6,u(x-1)^2(x+1)^3\rangle$，容易验证 C_2 是循环自对偶码，由定理 2.5 可得到它的深度谱为$\{1,2,3,4,5,6,7,13,14,15,16,17,18\}$，它的深度分布为

$$\{1,80,6480,8\cdot 3^8,8\cdot 3^{10},8\cdot 3^{12},8\cdot 3^{14},8\cdot 3^{16},8\cdot 3^{18},8\cdot 3^{20},8\cdot 3^{22},80\cdot 3^{24},80\cdot 3^{28},80\cdot 3^{32}\}.$$

依据上述的定理，我们可以计算出 $R=F_9+uF_9$ 上所有的循环码及自对偶循环码的深度谱及深度分布.

3　结论

本文从循环码生成元的角度，给出了环 R 上循环码的深度谱（定理 2.2），利用有限域上循环码的深度谱及 R 上线性码的深度分布，得到了环 R 上任意长度的循环码的深度分布（定理 2.3）和长度为 p^m 的循环码的深度分布（推论 2.4），并结合环 R 上

的自对偶循环码的结构，给出了任意长度的自对偶码的深度谱和深度分布（定理 2.5）及长度为 p^m 的深度分布和深度谱（推论 2.6）. 应用类似的方法，可以进一步研究环 $F_{p^k}+uF_{p^k}$ 上负循环码的深度分布.

参考文献（References）

[1] Etzion T. The depth distribution: A new characterization for linear codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1997, 43(4): 1 361-1 363.

[2] Mitchell J C. On integer-valued rational polynomials and depth distributions of binary codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1998, 44(7): 3 146-3 150.

[3] Luo Y, Fu F W, Wei V K W. On the depth distribution of linear codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(6): 2 197-2 203.

[4] Geng Pu, Li Chao. Depth distribution and period distribution of linear codes on finite field[J]. Journal of Applied Sciences, 2007, 25(3): 263-265.
耿普，李超. 有限域上线性码的深度分布与周期分布[J]. 应用科学学报，2007，25(3)：263-265.

[5] Yang Shanlin, Zhu Shixin, Tong Hongxi. Two recursive algorithms for computing the depth of a codeword on finite ring Z_4[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2004, 34(6): 655-660.
杨善林，朱士信，童宏玺. 计算有限环 Z_4 上码字深度的两种递归算法[J]. 中国科学技术大学学报，2004，34(6)：655-660.

[6] Zheng X Y, Kong B. The depth spectrums of linear cyclic codes on ring Z_{p^m}[C] // IEEE Youth Conference on Information, Computing and Telecommunication. IEEE, 2010: 162-165.

[7] Chang Xiaopeng, Zheng Xiying, Kong Bo. Depth spectrums of linear cyclic codes over the ring Z_M[J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering Science), 2012, 33(3): 110-112.
常晓鹏，郑喜英，孔波. 环 Z_M 上线性循环码的深度谱[J]. 郑州大学学报(工学版)，2012，33(3)：110-112.

[8] Yu Haifeng, Zhu Shixin. Depth distribution of linear codes over ring F_2+uF_2[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2008, 38(2): 141-144.
余海峰，朱士信. 环 F_2+uF_2 上线性码的深度分布[J]. 中国科学技术大学学报，2008，38(2)：141-144.

[9] Dougherty S T, Shiromoto K. Maximum distance codes over rings of order 4[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(1): 400-404.

[10] Tang Gang. On the depth spectra of linear codes on ring F_2+vF_2[J]. Journal of Mathematics, 2012, 32(1): 186-190.
唐刚. 环 F_2+vF_2 上线性码的深度谱[J]. 数学杂志，2012，32(1)：186-190.

[11] Pu Keli, Liao Qunying. The depth distribution and spectrum of linear codes over the ring $R=F_q+uF_q$ $(u^2=0)$[J]. Advances in Mathematics (China), 2014, 43(1): 57-63.
蒲可莉，廖群英. 环 $R=F_q+uF_q$ $(u^2=0)$ 上线性码的深度分布及深度谱[J]. 数学进展，2014，43(1)：57-63.

[12] Pu Keli, Liao Qunying. A note on the depth spectrum and distribution of linear codes over rings[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2013, 36(2): 159-164.
蒲可莉，廖群英. 环上线性码的深度谱以及深度分布的一个注记[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2013，36(2)：159-164.

[13] Zheng Xiying, Chang Xiaopeng. The depth distribution of linear cyclic codes over finite chain ring[J]. Journal of Henan University (Natural Science), 2012, 42(4): 347-350.
郑喜英，常晓鹏. 有限链环上循环码的深度分布[J]. 河南大学学报(自然科学版)，2012，42(4)：47-350.

[14] Li Ping, Zhu Shixin. Cyclic codes of arbitrary lengths over the ring F_q+uF_q[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2008, 38(12): 1 392-1 395.
李平，朱士信. 环 F_q+uF_q 上任意长度的循环码[J]. 中国科学技术大学学报，2008，38(12)：1392-1395.

[15] Zhang Zhentao, Yang Yixian, Hu Zhengming, et al. Research on the depth distribution of linear code[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2002, 25(3): 68-72.
张振涛，杨义先，胡正名，等. 关于线性码深度分布的研究[J]. 北京邮电大学学报，2002，25(3)：68-72.