第44卷第12期 中国科学技术大学学报 Vol. 44, No. 12
2014年12月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Dec. 2014

文章编号:0253-2778(2014)12-0982-04

含割点的连通图的最小距离无符号 Laplace 谱半径

李小新[1],查淑萍[2]

(1.池州学院数学系,安徽池州 247000;2.安庆师范学院数学与计算科学学院,安徽安庆 246133)

摘要:在含割点的 n 阶连通图类中,通过运用特征向量研究特征值的方法,确定了具有最小距离无符号 Laplace 谱半径的唯一的图,并且给出了距离无符号 Laplace 谱半径关于阶数 n 的一个下界.

关键词:图;距离无符号 Laplace 矩阵;谱半径;割点

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2014.12.003

AMS Subject Classification (2000): 05C50

引用格式: Li Xiaoxin, Zha Shuping. Minimum distance signless Laplacian spectral radius of connected graphs with cut vertices[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014,44(12):982-985.
李小新,查淑萍. 含割点的连通图的最小距离无符号 Laplace 谱半径[J]. 中国科学技术大学学报, 2014,44(12):982-985.

Minimum distance signless Laplacian spectral radius of connected graphs with cut vertices

LI Xiaoxin[1], ZHA Shuping[2]

(1. *Department of Mathematics, Chizhou College, Chizhou 247000, China*;
2. *School of Mathematics and Computation Sciences, Anqing Normal College, Anqing 246133, China*)

Abstract: In the class of connected graphs on n vertices with cut vertices, the unique graph with minimum distance signless Laplacian spectral radius was determined by using eigenvector equation to study eigenvalues and a lower bound for the distance signless Laplacian spectral radius in terms of order n was given.

Key words: graph; distance signless Laplacian matrix; spectral radius; cut vertex

0 引言

设 G 是一个顶点集为 $V(G)$,边集为 $E(G)$的简单连通图. G 中两个顶点 u 和 v 之间的距离 d_{uv}定义为连接 u 和 v 的最短路的长度. 距离矩阵 $D(G)$定义为 $D(G)=(d_{uv})_{u,v\in V(G)}$,顶点 v 的距离度定义为顶点 v 与 G 中所有其他顶点的距离之和,记作 $Tr(v)$,即 $Tr(v)=\sum_{u\in V(G)} d_{uv}$,用 $Tr_{\max}(G)$ 表示 G 中顶点的最大距离度,diag(Tr) 表示由 G 的各顶点的距离度所构成的对角矩阵. 距离矩阵在很多领域都有着重要的应用,如交通网络设计[1],图的嵌入理论[2-4] 以及分子稳定性[5-6] 等. Balaban 等[7] 提出了距离谱半径作为分子助推器的应用,Gutman 等[8] 用距离谱半径推断烷烃分子的分支情况以及计算烷烃的沸点,因此,刻画给定图类中距离谱半径的极大或极小值是非常有意义的. 近来,有关给定图类中极大或极小距离谱半径的研究结果有很多,例如文

收稿日期:2014-03-22;**修回日期**:2014-11-08

基金项目:安徽省教育厅自然科学研究重点项目(KJ2013A196)资助.

作者简介:李小新(通讯作者),男,1976 年生,硕士/副教授. 研究方向:代数图论与化学图论. E-mail:lxx@czu.edu.cn

献[9-18].

类似于(邻接)无符号 Laplace 矩阵,文献[19]中定义了连通图 G 的距离无符号 Laplace 矩阵为

$$D^{Q}(G)=\operatorname{diag}(Tr)+D(G).$$

因为 $D^{Q}(G)$是对称的,所以它的特征值都是实数.另外,由于 $D^{Q}(G)$是正矩阵,根据 Perron-Frobenius 定理,$D^{Q}(G)$的谱半径 $\rho(G)$(称为距离无符号 Laplace 谱半径)恰为 $D^{Q}(G)$的重数为 1 的最大特征值,并且存在唯一的正单位特征向量(称为 Perron 向量)对应于这个特征值.关于图的距离无符号 Laplace 谱半径的极图,刑润丹等在文献[20]中不仅确定了 n 阶树、单圈图和二部图中距离无符号 Laplace 谱半径最小的图的结构,还确定了给定悬挂点和连通度的 n 阶图中距离无符号 Laplace 谱半径最小的图的结构,并在文献[21]中确定了 n 阶双圈图中距离无符号 Laplace 谱半径最小和次小的图的结构.

本文在含割点的 n 阶连通图类中,确定了具有最小距离无符号 Laplace 谱半径的唯一的图,并且给出了距离无符号 Laplace 矩阵谱半径关于阶数 n 的一个下界,从而进一步得出了含割点的任意阶连通图类中距离无符号 Laplace 谱半径的最小值.

1 主要结果

设 G 为 n 阶图,向量 $x\in R^{n}$,若有一个从 $V(G)$ 到 R 的映射 φ,则可认为 x 是定义在 $V(G)$上的一个函数.对任意的 $u\in V(G)$,简记 $x_u=\varphi(u)$,即 x_u 是 x 的对应于顶点 u 的分量.若 x 是 $D^{Q}(G)$的一个特征向量,则它可以被自然地定义在 $V(G)$上.不难发现,

$$x^{T}D^{Q}(G)x=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)}d_{uv}(x_u+x_v)^2 \tag{1}$$

并且 x 是 $D^{Q}(G)$的对应于特征值 λ 的一个特征向量当且仅当 $x\neq 0$ 且

$$[\lambda-Tr(v)]x_v=\sum_{u\in V(G)}d_{uv}x_u \tag{2}$$

对任意 $v\in V(G)$都成立.另外,对任意单位向量 $x\in R^{n}$,

$$x^{T}D^{Q}(G)x\leqslant\rho(G) \tag{3}$$

等式当且仅当 x 是 $D^{Q}(G)$的 Perron 向量.

由非负矩阵理论,易得下述引理.

引理 1.1　设 G 是一个连通图,且 $u,v\in V(G)$,则

① 若 $uv\notin E(G)$,则 $\rho(G)>\rho(G+uv)$;

② 若 $uv\in E(G)$ 且 $G-uv$ 也是连通的,则 $\rho(G)<\rho(G-uv)$.

根据引理 1.1,对任一 n 阶的连通图 G,有 $\rho(G)\geqslant 2n-2$,等号当且仅当 $G=K_n$ 时成立;$\rho(G)\leqslant\rho(T_G)$,等号当且仅当 G 是树时成立,这里 T_G 表示 G 的任一生成树.

引理 1.2[20]　设 G 是一个连通图,则

$$Tr_{\max}(G)<\rho(G)\leqslant 2Tr_{\max}(G).$$

设 v 是 G 的一个顶点,记 v 在 G 中的邻域为 $N(v)$,路 P 的长度为$|P|$.下面的引理是显然的.

引理 1.3　设 G 是包含顶点 u,v 的连通图,则

① 若 $N(u)\backslash\{v\}=N(v)\backslash\{u\}$,则 $Tr(u)=Tr(v)$;

② 若 $N(u)\backslash\{v\}\subset N(v)\backslash\{u\}$,则 $Tr(u)>Tr(v)$.

由引理 1.3,我们可以得到下述引理.

引理 1.4　设 G 是包含顶点 u,v 的连通图,x 是 $D^{Q}(G)$的一个 Perron 向量.

① 若 $N(u)\backslash\{v\}=N(v)\backslash\{u\}$,则 $x_u=x_v$;

② 若 $N(u)\backslash\{v\}\subset N(v)\backslash\{u\}$,则 $x_u>x_v$.

证明　由式(2)得,

$$[\rho-Tr(u)]x_u=\sum_{w\in V(G)}d_{uw}x_w= d_{uv}x_v+\sum_{w\in V(G)\backslash\{u,v\}}d_{uw}x_w \tag{4}$$

$$[\rho-Tr(v)]x_v=\sum_{w\in V(G)}d_{vw}x_w= d_{uv}x_u+\sum_{w\in V(G)\backslash\{u,v\}}d_{vw}x_w \tag{5}$$

① 因为 $N(u)\backslash\{v\}=N(v)\backslash\{u\}$,所以对任意的 $w\in V(G)\backslash\{u,v\}$,有 $Tr(u)=Tr(v)$ 且 $d_{uw}=d_{vw}$.于是有

$$[\rho-Tr(u)+d_{uv}]x_u=[\rho-Tr(v)+d_{uv}]x_v.$$

由式(4)和(5)的右边均为正可知,

$$\rho>\max\{Tr(u),Tr(v)\},$$

于是 $x_u=x_v$.

② 因为 $N(u)\backslash\{v\}\subset N(v)\backslash\{u\}$,所以有 $Tr(u)>Tr(v)$,且对任意的 $w\in V(G)\backslash\{u,v\}$,有 $d_{uw}\geqslant d_{vw}$,且存在顶点 $w_0\in V(G)\backslash\{u,v\}$,使得 $d_{uw_0}>d_{vw_0}$.因此,

$$[\rho-Tr(u)]x_u-d_{uv}x_v>[\rho-Tr(v)]x_v-d_{uv}x_u,$$

即

$$[\rho-Tr(u)+d_{uv}]x_u>[\rho-Tr(v)+d_{uv}]x_v.$$

于是 $x_u>x_v$.　□

设 G 和 H 是分别含顶点 u 和 v 的两个不相交的连通图,将 G 的顶点 u 和 H 的顶点 v 黏到一起,形成一个新的图,称为图 G 与 H 的黏合,记作 $G(u)\cdot H(v)$. 为方便起见,将完全图 K_p 与 K_q 的黏合记作 $G(p,q)$.

定理 1.5 设 G 是含割点的 n 阶连通图,则 $\rho(G)\geqslant\rho(G(2,n-1))$,等号当且仅当 $G=G(2,n-1)$ 时成立.

证明 设 G 是含割点的 n 阶连通图类中具有最小距离无符号 Laplace 谱半径的图,首先由引理 1.1 可知,G 一定只含一个割点. 另外,由引理 1.1,G 可视为两个完全图 K_p 与 K_q 的黏合 $G(p,q)$,其中 $p+q=n+1$. 不妨设 $2\leqslant p\leqslant q$,并记黏合点为 u. 用 ρ 表示 $G(p,q)$ 的距离无符号 Laplace 谱半径,x 表示对应的 Perron 向量. 根据 $G(p,q)$ 的结构,由引理 1.4 知,K_p-u 中所有顶点对应的 x 的分量一定相等,记为 x_1;K_q-u 中所有顶点对应的 x 的分量也一定相等,记为 x_2;记 u 所对应的 x 的分量为 x_0. 则由式(2)得

$$\begin{cases}\rho x_0=(p-1)(x_0+x_1)+(q-1)(x_0+x_2),\\ \rho x_1=(p-2)(x_1+x_1)+(x_0+x_1)+\\ \qquad 2(q-1)(x_1+x_2),\\ \rho x_2=2(p-1)(x_1+x_2)+(x_0+x_2)+\\ \qquad (q-2)(x_2+x_2).\end{cases}$$

于是 ρ 一定是方程 $f_{p,q}(\lambda)=0$ 的最大根,其中,

$$f_{p,q}(\lambda)=$$
$$\begin{vmatrix} p+q-2-\lambda & p-1 & q-1\\ 1 & 2p+2q-5-\lambda & 2q-2\\ 1 & 2p-2 & 2p+2q-5-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$-\lambda^3+(5p+5q-12)\lambda^2+$$
$$(-8p^2-8q^2-12pq+35p+35q-43)\lambda+$$
$$4p^3+4q^3+8p^2q+8pq^2-26p^2-$$
$$26q^2-40pq+58p+58q-48.$$

若 $p\geqslant 3$,用 ρ' 表示 $G(p-1,q+1)$ 的距离无符号 Laplace 谱半径,则

$$f_{p,q}(\lambda)-f_{p-1,q+1}(\lambda)=$$
$$(4q-4p+4)\lambda+4p^2-4q^2-16p+8q+12.$$

由引理 1.2 可得

$$f_{p,q}(\rho')-f_{p-1,q+1}(\rho')=$$
$$(4q-4p+4)\rho'+4p^2-4q^2-16p+8q+12>$$
$$(4q-4p+4)(p+2q-2)+4p^2-$$
$$4q^2-16p+8q+12=$$
$$4q^2-4pq-4p+8q+4>0.$$

注意到 $f_{p-1,q+1}(\rho')=0$,于是得 $f_{p,q}(\rho')>0$. 根据 ρ 为多项式 $f_{p,q}(\lambda)$ 的最大根以及 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}f_{p,q}(\lambda)=-\infty$ 知,$\rho'<\rho$. 因此,对 $G(p,q)$ 型的图,当 p 越小,q 越大时,对应的距离无符号 Laplace 谱半径越小,而注意到 $p\geqslant 2$,于是证得结论成立. □

定理 1.6 设 G 是含割点的 n 阶连通图,则 $\rho(G)\geqslant\dfrac{4n-5+\sqrt{16n-31}}{2}$,等号当且仅当 $G=G(2,n-1)$ 时成立.

证明 由定理 1.5,只需计算 $G(2,n-1)$ 的距离无符号 Laplace 谱半径. 而由定理 1.5 的证明过程可知,$\rho(G(2,n-1))$ 为多项式

$$x^3-(5n-7)x^2+(8n^2-27n+24)x-$$
$$4n^3+22n^2-42n+28$$

的最大根. 经计算可知,当 $n\geqslant 2$ 时,上述多项式的最大根为$\dfrac{4n-5+\sqrt{16n-31}}{2}$,即证. □

推论 1.7 设 G 是含割点的连通图,则 $\rho(G)\geqslant\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$,等号当且仅当 $G=G(2,2)$ 时成立.

证明 由定理 1.6 知,$\rho(G(2,n-1))=\dfrac{4n-5+\sqrt{16n-31}}{2}$,它是关于 n 严格单调递增的函数. 因此在所有含割点的连通图中,$G(2,2)$ 的距离无符号 Laplace 谱半径最小,且 $\rho(G(2,2))=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$. □

参考文献(References)

[1] Graham R L, Pollak H O. On the addressing problem for loop switching[J]. Bell Sys Tech J, 1971, 50: 2 495-2 519.

[2] Edelberg M, Garey M R, Graham R L. On the distance matrix of a tree[J]. Discrete Math, 1976, 14: 23-29.

[3] Graham R L, Pollak H O. On embedding graphs in squashed cubes[C]// Graph Theory and Applications. Berlin: Springer, 1973: 99-110.

[4] Graham R L, Lovasz L. Distance matrix polynomials of trees[J]. Adv in Math, 1978, 29: 60-88.

[5] Hosoya H, Murakami M, Gotoh M. Distance polynomial and characterization of a graph[J]. Natur Sci Rep Ochanomizu Univ, 1973, 24: 27-34.

[6] Rouvray D H. The search for useful topological indices

in chemistry[J]. Amer Scientist, 1973, 61: 729-735.
[7] Balaban A T, Ciubotariu D, Medeleanu M. Topological indices and real number vertex invariants based on graph eigenvalues or eigenvectors[J]. J Chem Inf Comput Sci, 1991, 31: 517-523.
[8] Gutman I, Medeleanu M. On structure-dependence of the largest eigenvalue of the distance matrix of an alkane[J]. Indian J Chem A, 1998, 37: 569-573.
[9] Bose S S, Nath M, Paul S. Distance spectral radius of graphs with r pendent vertices[J]. Linear Algebra Appl, 2011, 435: 2 826-2 836.
[10] Ilić A. Distance spectral radius of trees with given matching number[J]. Discrete Appl Math, 2010, 158: 1 799-1 806.
[11] Liu Z Z. On the spectral radius of the distance matrix [J]. Appl Anal Discrete Math, 2010, 4(2): 269-277.
[12] Nath M, Paul S. On the distance spectral radius of bipartite graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2012, 436: 1 285-1 296.
[13] Stevanović D, Ilić A. Distance spectral radius of trees with fixed maximum degree[J]. Electron J Linear Algebra, 2010, 20: 168-179.
[14] Zhang X L, Godsil C. Connectivity and minimal distance spectral radius[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2011, 59: 745-754.
[15] Zhou B. On the largest eigenvalue of the distance matrix of a tree[J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2007, 58: 657-662.
[16] Zhou B, Trinajstić N. On the largest eigenvalue of the distance matrix of a connected graph[J]. Chem Phys Lett, 2007, 447: 384-387.
[17] Yu G L, Wu Y R, Shu J L. Some graft transformations and its application on a distance spectrum[J]. Disc Math, 2011, 311: 2 117-2 123.
[18] Yu G L, Jia H C, Zhang H L, et al. Some graft transformations and its application on a distance spectrum[J]. Appl Math Letters, 2012, 25: 315-319.
[19] Aouchiche M, Hansen P. Two Laplacians for the distance matrix of a graph[J]. Linear Algebra Appl, 2013, 439: 21-33.
[20] Xing R, Zhou B, Li J. On the distance signless Laplacian spectral radius of graphs[J]. Linear Multilinear Algebra, 2014, 62(10): 1 377-1 387.
[21] Xing R, Zhou B. On the distance and distance signless Laplacian spectral radii of bicyclic graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2013, 439: 3 955-3 963.

（上接第 981 页）

References

[1] Guo W. The Theory of Classes of Groups [M]. Beijing/ New York: Science Press/ Kluwer Academic Publisher, 2000.
[2] Huppert B. Endliche Gruppen Ⅰ [M]. Berlin/ Heidelberg/ New York: Springer-Verlag, 1967.
[3] Kegel O H. Sylow-Gruppen and subnormalteiler endlicher Gruppen [J]. Math Z, 1962, 78: 205-221.
[4] Schmid P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups[J]. J Algebra, 1998, 207: 285-293.
[5] Wang Y. *c*-normality of groups and its properties[J]. J Algebra, 1996, 180: 954-965.
[6] Guo X, Shum K P. On *c*-normal maximal and minimal subgroups of Sylow *p*-subgroups of finite groups[J]. Arch Math, 2003, 80: 561-569.
[7] Ramadan M, Mohamed M E, Heliel A A. On *c*-normality of certain subgroups of prime power order of finite groups[J]. Arch Math, 2005, 85: 203-210.
[8] Skiba A N. On weakly *s*-permutable subgroups of finite groups[J]. J Algebra, 2007, 315: 192-209.
[9] Doerk K, Hawkes T. Finite Soluble Groups [M]. Berlin/New York: Walter de Gruyter, 1992.
[10] Wielandt H. Subnormal subgroups and permutation groups [C]// Lectures given at the Ohio State University. Columbus, Ohio: Dept of Mathematics, Ohio State Univ, 1971.
[11] Li Y, Wang Y, Wei H. The influence of π-quasinormality of some subgroups of a finite group[J]. Arch Math (Basel), 2003, 81: 245-252.
[12] Ballester-Bolinches A, Esteban-Romero R, Asaad M. Pruducts of Finite Groups [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2010: 52-91.
[13] Gorenstein D. Finite Groups [M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1968.
[14] Miao L. On weakly *s*-permutable subgroups of finite groups [J]. Bull Braz Math Soc, 2010, 41(2): 223-235.