第44卷第3期 中国科学技术大学学报 Vol. 44, No. 3
2014年3月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Mar. 2014

文章编号:0253-2778(2014)03-0248-09

区间互补判断矩阵的拟一致性及其权重研究

涂振坤

(合肥工业大学管理学院,安徽合肥 230009)

摘要:根据模糊互补判断矩阵的加型一致性和积型一致性反映的相对优势度思想给出区间互补判断矩阵拟加型一致性、拟积型一致性的概念,并利用可能度的互补性将拟加型一致性和拟积型一致性统一为拟一致性.分两种情况讨论了区间互补判断矩阵的权重问题.首先针对拟一致性区间互补判断矩阵,运用可能度法求得区间型权重之间比较的模糊互补判断矩阵,并利用中转法得到精确数型的排序向量.然后针对一般的区间互补判断矩阵,根据区间互补判断矩阵与其区间数型权重在可能度方面的偏差关系,建立偏差模型以求得区间数型权重,用可能度法求得权重之间比较的模糊互补判断矩阵,并利用中转法得到精确数型的排序向量,并指出前者的求解过程实际上是后者的一个特例.给出了区间互补判断矩阵具有拟一致性的充要条件.最后通过实例验证了决策方法的有效性和实用性.

关键词:决策分析;区间互补判断矩阵;相对优势度;区间数型权重

中图分类号:C934 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2014.03.015

引用格式:Tu Zhenkun. Quasi-consistency of interval complementary judgment matrix and its weights[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014,44(3):248-256.
涂振坤. 区间互补判断矩阵的拟一致性及其权重研究[J]. 中国科学技术大学学报,2014,44(3):248-256.

Quasi-consistency of interval complementary judgment matrix and its weights

TU Zhenkun

(*School of Management, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China*)

Abstract: Based on the idea of the relative superiority degree found in the additive consistency and the multiplicative consistency of fuzzy complementary judgment matrix (FCJM), the quasi-additive consistency and the quasi-multiplicative consistency of interval complementary judgment matrix (ICJM) were given. And they were merged into the quasi-consistency of ICJM by the complementary property of possibility degree. The problem of how to determine ICJM weights was analyzed under two conditions. In the condition of the IRJM with quasi-consistency, by the method of possibility degree an FCJM was derived from the comparison among its interval weights, and its precise value ranking vector was also achieved using the middle translation method. Then, under the condition of general ICJM, its interval weights were obtained by a deviation model which is established by the deviation between ICJM and its interval weights in the respect of possibility degree. And an FCJM was derived from the comparison among its interval

收稿日期:2013-03-19;**修回日期**:2013-07-10
基金项目:国家自然科学基金(71231004,71171071)资助.
作者简介:涂振坤,男,1978年生,博士生/讲师. 研究方向:模糊决策. E-mail: zhenkuntu@126.com

weights, and its precise value ranking vector was also achieved using the middle translation method. And it was pointed out that the solution process of the former condition is in fact the specific one of the latter condition. A necessary and sufficient condition of the quasi-consistency of ICJM was achieved. Finally, the validity and the practicability of the proposed method were illustrated with an example.

Key words: decision analysis; interval complementary judgment matrix; relative superiority degree; interval weights

0　引言

在实际决策过程中，由于种种主观和客观条件的限制，决策者往往不能直接给出属性的权重，而是对属性进行两两比较并构造判断矩阵，然后按照一定的方法求得权重. 判断矩阵可以分为实数型和非实数型两类. 关于确定实数型的判断矩阵(如互反判断矩阵、模糊互补判断矩阵等)权重的研究已经比较成熟. 近年来，关于非实数型的判断矩阵(如区间互反判断矩阵、区间互补判断矩阵、直觉判断矩阵等)权重问题的研究也取得了一些进展. 在权重的研究过程中，人们往往将判断矩阵满足某种一致性(如弱传递性、加型一致性、积型一致等)作为确定权重的条件，这是因为决策者给出的判断矩阵是否满足人类决策思维的一致性影响到权重的可靠性. 文献[1]指出区间互补判断矩阵等价于直觉判断矩阵. 故以下重点介绍区间互补判断矩阵、直觉判断矩阵满足某种一致性时求解其权重的研究[2-16]. Xu[2]对区间互补判断矩阵进行行和归一化求得区间数型权重，并利用区间数比较的可能度矩阵得到了判断矩阵的排序向量. Xu[3]利用均值互补判断矩阵的排序向量以及随机误差公式求出原矩阵的区间数型权重，用可能度矩阵得到了实数型排序向量. Gong[4]利用一致性区间互反判断矩阵的排序向量得到一致性区间互补判断矩阵的区间数型权重向量，并运用偏差的思想建立了非线性规划模型求得一般情况下区间互补判断矩阵的区间数型权重向量. Liu[5]运用凸组合方法将区间互补判断矩阵转化为一族实模糊互补判断矩阵，在后者满足弱传递性情况下，将这族矩阵的可靠权重集成为区间数型权重. 文献[6-7]分别运用凸组合法及区间互补判断矩阵分解法得到具有可接受一致性及弱传递的区间互补判断矩阵权重. Liu[8]给出了区间互补判断矩阵与区间互反判断矩阵的转换关系，基于可接受一致性区间互反判断矩阵的区间数型权重求解公式得到了可接受一致性区间互补判断矩阵的区间数型权重. Xu[9]定义了积型一致性区间互补判断矩阵的概念，在区间互补判断矩阵具有积型一致性情况下运用权重可行域的思想求得区间数型权重，并针对不一致的情况利用积型一致性区间互补判断矩阵逼近实际区间互补判断矩阵，并使得偏差最小化而得到线性规划模型，从而求得区间数型权重，而且利用加型一致性进行了类似的讨论. Wang[10]在加型一致性互补判断矩阵等价条件的基础上给出了加型一致性区间互补判断矩阵的新定义，并讨论了区间互补判断矩阵具有加型一致性情况下运用权重可行域是区间的思想建立了线性规划模型以求得区间数型权重；而在不一致的情况下构造加型一致性区间互补判断矩阵逼近实际区间互补判断矩阵，将问题转化为求解构造得到的加型一致性区间互补判断矩阵的区间数型权重. Lan[11]针对积型一致性区间互补判断矩阵权重问题将积型一致性区间互补判断矩阵转换为加型一致性区间互补判断矩阵，并集成后者的加型一致性信息后再转换为积型一致性信息，最后设计算法得到权重. Wang[12]基于正区间数的运算规则给出区间互补判断矩阵具有加型一致性、积型一致性及弱传递性的新定义，并构造出区间互补判断矩阵与其权重之间关系的转换函数；而且在特定转换函数情况下，发现用权重得到的区间互补判断矩阵具有加型一致性、积型一致性，并且用它们逼近实际区间互补判断矩阵从而得到目标规划模型以求解区间数型权重向量. Xu[13]给出加型一致性与积型一致性直觉判断矩阵的定义，并分别利用所有方案的综合得分值构造出加型一致性与积型一致性互补判断矩阵，根据它们与决策者的直觉判断矩阵是否吻合以及已知的属性权重信息建立相应的线性规划模型，求解属性的区间数型权重. Gong[14]利用直觉判断矩阵与区间互补判断矩阵的转换关系及区间互补判断矩阵的积型一致性的概念给出由权重表述的积型一致性直觉判断矩阵的定义；并针对个体和群体的情况，根据偏差的思想分别建立了目标规划模型以求得直觉判断矩阵权重. Genc[15]基于积型一致性模糊互补判

断矩阵的等价形式,给出了积型一致性区间互补判断矩阵的一种新定义,并给出在满足积型一致性条件下区间互补判断矩阵权重估计公式. Xu[16] 给出构造加型一致性和积型一致性模糊互补判断矩阵方法,并通过利用偏差模型的解对原区间互补判断矩阵进行修正的方法得到加型一致性和积型一致性区间互补判断矩阵.巩在武等[22]利用直觉模糊判断的积型一致性条件,提出了残缺信息下直觉模糊群组判断的最小二乘排序模型.

基于某种一致性的区间互补判断矩阵的权重研究取得了一定的进展,但是还存在以下两个方面的问题:第一,虽然目前国内外的研究将区间互补判断矩阵的加型一致性、积型一致性分开进行研究,但是,本质上它们都是通过矩阵元素之间加法、乘法表达的等式关系来反映人类决策思维的一致性.目前的文献缺乏将其加型一致性、积型一致性合二为一的研究.第二,虽然已有的研究大多数给出的权重的表达方式是区间数,但是研究区间互补判断矩阵与其区间数型权重在可能度方面的联系的研究鲜见.因此,本文从这两个方面入手进行研究.给出了区间互补判断矩阵拟加型一致性、拟积型一致性的概念,并利用可能度的互补性将拟加型一致性和拟积型一致性统一为拟一致性.针对拟一致性区间互补判断矩阵及一般的区间互补判断矩阵,讨论了区间互补判断矩阵与其区间数型权重的关系,并用可能度法求得权重之间比较的模糊互补判断矩阵,利用中转法得到精确数型的排序向量.

1　基本概念

定义 1.1[17-18]　设 $Y=\{y_1,y_2,\cdots y_n\}$为方案集,决策者对 n 个方案进行比较得到判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$,其中,b_{ij}表示决策者对方案 y_i 和 y_j 进行比较时偏爱 y_i 的程度,若 B 满足:

$$b_{ij}+b_{ji}=1,\ 0\leqslant b_{ij}\leqslant 1,\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

称 B 为模糊互补判断矩阵.

定义 1.2[17-18]　设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$为模糊互补判断矩阵,若对任意 $i,j,k=1,2,\cdots,n$, $b_{ik}\geqslant 0.5$, $b_{kj}\geqslant 0.5$,有 $b_{ij}\geqslant 0.5$,则称 B 满足弱传递性.

若将上述的弱传递性条件看成 $b_{ik}\geqslant b_{ki}$, $b_{kj}\geqslant b_{jk}$,而结论看成:$b_{ij}\geqslant b_{ji}$,则模糊互补判断矩阵的弱传递性本质上反映的是弱优先关系的传递性.

定义 1.3[17-18]　设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$为模糊互补判断矩阵,若 B 满足:

$$(b_{ik}-0.5)+(b_{kj}-0.5)=(b_{ij}-0.5),$$
$$i,j=1,2,\cdots,n,$$

称 B 满足加型一致性.

定义 1.4[9,19]　设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$为模糊互补判断矩阵,若存在一个向量

$$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n),$$

使得

$$b_{ij}=0.5(w_i-w_j)+0.5,\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

且 $w_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n}w_i=1$,称 B 满足加型一致性.

定义 1.3 是直接从模糊互补判断矩阵元素之间的运算关系来描述加型一致性.而定义 1.4 则是从模糊互补判断矩阵元素和权重向量之间的关系来描述加型一致性的.事实上,定义 1.3 和定义 1.4 是等价的.

定义 1.5[17-18]　设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$为模糊互补判断矩阵,若对任意的 $i,j,k=1,2,\cdots,n$,有

$$b_{ik}\cdot b_{kj}\cdot b_{ji}=b_{ki}\cdot b_{jk}\cdot b_{ij},$$

则称 B 满足积型一致性.

定义 1.6[9,19]　设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$为模糊互补判断矩阵,若存在一个向量

$$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n),$$

使得

$$b_{ij}=\frac{w_i}{w_i+w_j},\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

且 $w_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n}w_i=1$,称 B 满足积型一致性.同样地,定义 1.5 和定义 1.6 是从不同角度来描叙积型一致性的.事实上,定义 1.5 和定义 1.6 也是等价的.

显然,由定义可知 B 若满足加型(积型)一致性则必然满足弱传递性.

定义 1.7[9]　若矩阵 $\overline{R}=([r_{ij}^-,r_{ij}^+])_{n\times n}$是集合 X 上的偏好关系且满足

$$r_{ij}^-+r_{ji}^+=1,\ r_{ij}^++r_{ji}^-=1,$$
$$0\leqslant r_{ij}^-\leqslant r_{ji}^+\leqslant 1,\ i,j=1,2,\cdots,n,$$
$$r_{ii}^-=r_{ii}^+=0.5,\ i=1,2,\cdots,n,$$

称 $\overline{R}$ 为区间互补判断矩阵.

关于区间数的比较大小的方法很多,经常使用的一个概念是可能度.许多学者从不同的角度给出了区间数大小比较的可能度的定义.下面介绍一种采用较多的定义.

定义 1.8[9,19]　设 $\tilde{w}_i$ 和 $\tilde{w}_j$ 为实数,则称

$$p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) = \begin{cases} 1, & \tilde{w}_i > \tilde{w}_j; \\ 0.5, & \tilde{w}_i = \tilde{w}_j; \\ 0, & \tilde{w}_i < \tilde{w}_j \end{cases}$$

为 $\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j$ 的可能度.

定义 1.9[9,19]　设

$$\tilde{w}_i = [w_i^-, w_i^+],\ \tilde{w}_j = [w_j^-, w_j^+],$$

其中至少一个为区间数,则称

$$p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) = \max\left\{1 - \max\left\{\frac{w_j^+ - w_i^-}{w_i^+ - w_i^- + w_j^+ - w_j^-}, 0\right\}, 0\right\}$$

为 $\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j$ 的可能度. 即 $\tilde{w}_i$ 优于 $\tilde{w}_j$ 的程度为 $p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j)$. 文献[19]证明了 $p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j)$ 与下式等价:

$$p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) = \min\left\{\max\left\{\frac{w_i^+ - w_j^-}{w_i^+ - w_i^- + w_j^+ - w_j^-}, 0\right\}, 1\right\}.$$

而且可能度 $p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j)$ 满足以下性质[9,19]:

① $0 \leqslant p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) \leqslant 1$;

② $p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) + p(\tilde{w}_j \geqslant \tilde{w}_i) = 1$, 特别地, $p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_i) = 0.5$;

③ $p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) = 1 \Leftrightarrow w_j^+ \leqslant w_i^-$;

④ $p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) = 0 \Leftrightarrow w_i^+ \leqslant w_j^-$;

⑤ 设 $\tilde{w}_i, \tilde{w}_j, \tilde{w}_k$ 为区间数,若

$$p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) \geqslant 0.5, p(\tilde{w}_j \geqslant \tilde{w}_k) \geqslant 0.5,$$

必有

$$p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_k) \geqslant 0.5;$$

⑥ $p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) \geqslant 0.5 \Leftrightarrow w_i^+ + w_i^- \geqslant w_j^+ + w_j^-$. 特别地,

$$p(\tilde{w}_i \geqslant \tilde{w}_j) = 0.5 \Leftrightarrow w_i^+ + w_i^- = w_j^+ + w_j^-.$$

性质①、②、⑤合在一起说明可能度反映了区间数之间的弱序关系. 在直观上,可能度的定义必须要满足性质③及性质④,其反映了两种极端的情况下比较的结果. 一般来说,无论是采用何种方式定义可能度,性质①～⑤都必须要满足,而性质⑥是定义 1.9 中具体的可能度表达式所特有的结果.

2　区间互补判断矩阵拟一致性的定义

由前面叙述知:$B = (b_{ij})_{n \times n}$ 为加型一致性模糊互补判断矩阵(定义 1.3)当且仅当存在一个向量

$$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n),$$

使得

$$\left.\begin{aligned} & b_{ij} = 0.5(w_i - w_j) + 0.5, \\ & w_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ i,j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

由 $b_{ij} + b_{ji} = 1$ 知式(1)等价于

$$\left.\begin{aligned} & b_{ij} - b_{ji} = w_i - w_j, \\ & w_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ i,j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

可以将 $b_{ij} - b_{ji}$ 理解为方案 y_i 和 y_j 进行比较时 y_i 相对 y_j 的优势程度,而 $w_i - w_j$ 理解为方案 y_i 相对 y_j 总的优势程度. 即式(2)表达的含义是:在两两比较时,方案间的相对优势度与总体比较时方案间的相对优势度(权重的相对优势度)是相等的.

同理,由于 $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 为积型一致性模糊互补判断矩阵(定义 1.5)当且仅当存在一个向量

$$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n),$$

使得

$$\left.\begin{aligned} & b_{ij} = \frac{w_i}{w_i + w_j}, \\ & w_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ i,j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

由 $b_{ij} + b_{ji} = 1$ 知式(3)等价于

$$\left.\begin{aligned} & \frac{b_{ij}}{b_{ji}} = \frac{w_i}{w_j}, \\ & w_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ i,j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

可以将 $\frac{b_{ij}}{b_{ji}}$ 理解为:方案 y_i 和 y_j 进行比较时 y_i 相对 y_j 的优势程度,而 $\frac{w_i}{w_j}$ 理解为方案 y_i 相对 y_j 总的优势程度. 即式(4)表达的含义是:在两两比较时,方案间的相对优势度与总体比较时方案间的相对优势度(权重的相对优势度)是相等的.

根据前面所述,可以认为加型一致性和积型一致性的定义(定义 1.4 和定义 1.6)反映的思想是一致的,即用权重的相对优势度表示两两比较时方案间的相对优势度.

而对于区间数而言,若将可能度之差或者可能度之商看成是相对优势度,则可以相应地给出拟加型一致性和拟积型一致性的概念. 因此,我们根据这一思想给出它们的定义.

定义 2.10　设 $\bar{R} = ([r_{ij}^-, r_{ij}^+])_{n \times n}$ 为区间互补判断矩阵,若存在一个向量

$$\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \cdots, \tilde{w}_n) = ([w_1^-, w_1^+], [w_2^-, w_2^+], \cdots, [w_n^-, w_n^+]),$$

使得

$$p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])-p([r_{ji}^-,r_{ji}^+]\geqslant[r_{ij}^-,r_{ij}^+])=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j)-p(\tilde{w}_j\geqslant\tilde{w}_i)\tag{5}$$

且

$$0\leqslant w_i^-\leqslant w_i^+\leqslant 1,\ \sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^-+w_i^+\leqslant 1,$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^++w_i^-\geqslant 1,\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

称 $\overline{R}$ 满足拟加型一致性.

其中,

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^-+w_i^+\leqslant 1,\ \sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^++w_i^-\geqslant 1,$$

$$i=1,2,\cdots,n,$$

这是对区间数型权重的归一化的要求[12,20-21].

定义 2.11 设 $\overline{R}=([r_{ij}^-,r_{ij}^+])_{n\times n}$ 为区间互补判断矩阵,若存在一个向量

$$\tilde{w}=(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_n)=([w_1^-,w_1^+],[w_2^-,w_2^+],\cdots,[w_n^-,w_n^+]),$$

使得

$$\frac{p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])}{p([r_{ji}^-,r_{ji}^+]\geqslant[r_{ij}^-,r_{ij}^+])}=\frac{p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j)}{p(\tilde{w}_j\geqslant\tilde{w}_i)}\tag{6}$$

且

$$0\leqslant w_i^-\leqslant w_i^+\leqslant 1,\ \sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^-+w_i^+\leqslant 1,$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^++w_i^-\geqslant 1,\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

称 $\overline{R}$ 满足拟积型一致性.

注意式(5)不一定满足:

$$p([r_{ik}^-,r_{ik}^+]\geqslant[r_{ki}^-,r_{ki}^+])+p([r_{kj}^-,r_{kj}^+]\geqslant[r_{jk}^-,r_{jk}^+])=p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])+0.5,\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

而式(6)不一定满足:

$$\frac{p([r_{ik}^-,r_{ik}^+]\geqslant[r_{ki}^-,r_{ki}^+])}{p([r_{ki}^-,r_{ik}^+]\geqslant[r_{ik}^-,r_{ik}^+])}\cdot\frac{p([r_{kj}^-,r_{kj}^+]\geqslant[r_{jk}^-,r_{jk}^+])}{p([r_{jk}^-,r_{jk}^+]\geqslant[r_{kj}^-,r_{kj}^+])}=\frac{p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])}{p([r_{ji}^-,r_{ji}^+]\geqslant[r_{ij}^-,r_{ij}^+])},\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

因此,式(5)、(6)不一定具有加型一致性(定义 1.3)、积型一致性(定义 1.5)的特点,仅具有与式(4)、(6)类似的特点,由于式(4)、(6)分别是模糊互补判断矩阵满足加型一致性(定义 1.3)、积型一致性(定义 1.5)的必要条件,因此我们将满足式(5)与式(6)的区间互补判断矩阵分别称为具有拟加型、拟积型一致性.

由可能度满足互补性(性质②),实际上将式(5)和式(6)化简得到同一个结果:

$$p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j).$$

因此,笔者将拟加型一致性和拟积型一致性统一称为拟一致性.

定义 2.12 设 $\overline{R}=([r_{ij}^-,r_{ij}^+])_{n\times n}$ 为区间互补判断矩阵,若存在一个向量

$$\tilde{w}=(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_n)$$

使得

$$p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j)\tag{7}$$

且

$$0\leqslant w_i^-\leqslant w_i^+\leqslant 1,\ \sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^-+w_i^+\leqslant 1,$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^++w_i^-\geqslant 1,\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

称 $\overline{R}$ 满足拟一致性.

本质上,区间互补判断矩阵的拟一致性是利用可能度表达了矩阵元素和权重向量之间的函数关系.而且其反映了区间互补判断矩阵满足一定的传递性,具体如下:

若

$$p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])\geqslant 0.5,$$

$$p([r_{jk}^-,r_{jk}^+]\geqslant[r_{kj}^-,r_{kj}^+])\geqslant 0.5,$$

则

$$p([r_{ik}^-,r_{ik}^+]\geqslant[r_{ki}^-,r_{ki}^+])\geqslant 0.5.$$

事实上,由于区间互补判断矩阵满足拟一致性,故

$$p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j)\geqslant 0.5,$$

$$p([r_{jk}^-,r_{jk}^+]\geqslant[r_{kj}^-,r_{kj}^+])=p(\tilde{w}_j\geqslant\tilde{w}_k)\geqslant 0.5,$$

且有

$$p([r_{ik}^-,r_{ik}^+]\geqslant[r_{ki}^-,r_{ki}^+])=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_k).$$

再由可能度所满足的性质⑤知 $p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_k)\geqslant 0.5$,故有

$$p([r_{jk}^-,r_{jk}^+]\geqslant[r_{kj}^-,r_{kj}^+])\geqslant 0.5.$$

为了方便起见,记

$$p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])=p_{ij},$$

$$p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j)=q_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

$$\Lambda=\{(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_n)\mid 0\leqslant w_i^-\leqslant w_i^+\leqslant 1,\ \sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^-+w_i^+\leqslant 1,\ \sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^++w_i^-\geqslant 1,\ i,j=1,2,\cdots,n\}.$$

则由可能度的性质⑤,容易得到以下结论.

定理 2.1 模糊互补判断矩阵 $(p_{ij})_{n\times n}$ 和 $(q_{ij})_{n\times n}$ 均具有弱传递性.

由定理 2.1 知式(7)的两边构成的模糊互补判

断矩阵均具有弱传递性，因此可以将区间互补判断矩阵的拟一致性理解为基于弱传递性得到的矩阵元素和权重向量之间的函数关系.

下面将可能度具体表达式代入式(7)，并利用可能度的性质⑥进行化简.

由于 $i=j$ 时，式(7)必成立，所以以下只需考虑 $i\neq j$ 时的情况.

若

$$1>p_{ij}=p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])>0,$$

根据 p_{ij} 的范围知 $\tilde{w}_i$ 和 $\tilde{w}_j$ 中至少一个为区间数，而且 $p_{ij}=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j)$ 可化为

$$p_{ij}=\frac{w_i^+-w_j^-}{w_i^+-w_i^-+w_j^+-w_j^-}.$$

并记

$$E_1=\{(i,j)\mid 1>p_{ij}>0,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n\}.$$

若

$$p_{ij}=p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])=1,$$

要使

$$p_{ij}=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j),$$

只需 $w_i^-\geqslant w_j^+$. 并记

$$E_2=\{(i,j)\mid p_{ij}=1,i,j=1,2,\cdots,n\}.$$

若

$$p_{ij}=p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])=0,$$

要使

$$p_{ij}=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j),$$

只需 $w_j^-\geqslant w_i^+$. 并记

$$E_3=\{(i,j)\mid p_{ij}=0,i,j=1,2,\cdots,n\}.$$

3　拟一致性区间互补判断矩阵权重

设 $\overline{R}=([r_{ij}^-,r_{ij}^+])_{n\times n}$ 为拟一致性区间互补判断矩阵，则求得方程组

$$p([r_{ij}^-,r_{ij}^+]\geqslant[r_{ji}^-,r_{ji}^+])=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j),$$
$$i,j=1,2,\cdots,n$$

在可行域 Λ 内的解即为权重向量 $(\tilde{w}_1^*,\tilde{w}_2^*,\cdots,\tilde{w}_n^*)$. 然后根据区间数比较大小的可能度法求得权重之间比较的模糊互补判断矩阵

$$(q_{ij}^*)_{n\times n}=(p(\tilde{w}_i^*\geqslant\tilde{w}_j^*))_{n\times n}.$$

由 $(q_{ij}^*)_{n\times n}$ 为模糊互补判断矩阵，故采用文献[19]给出的中转法得到精确数型的排序向量

$$\bar{\omega}_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^*+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)},\ i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

排序向量具有以下性质.

定理 3.2　设 $\overline{R}=([r_{ij}^-,r_{ij}^+])_{n\times n}$ 为拟一致性区间互补判断矩阵，$(\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\cdots,\bar{\omega}_n)$ 为相应的排序向量，若任意的 $k=1,2,\cdots,n$，均有 $p_{ik}\geqslant p_{jk}$，则 $\bar{\omega}_i\geqslant\bar{\omega}_j$. 且当前者所有等式成立时，有 $\bar{\omega}_i=\bar{\omega}_j$.

证明　由式(7)和式(8)可知

$$\bar{\omega}_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_{ij}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)},\ i=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

所以结论是显然的.　□

4　一般区间互补判断矩阵权重

具有拟一致性的区间互补判断矩阵，必有方程组 $p_{ij}=p(\tilde{w}_i\geqslant\tilde{w}_j),(i,j)\in E_1$ 在

$$\{(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_n)\mid w_i^-\geqslant w_j^+,(i,j)\in E_2\}\cap$$
$$\{(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_n)\mid w_j^-\geqslant w_i^+,(i,j)\in E_3\}\cap$$
$$\{(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_n)\mid 0\leqslant w_i^-\leqslant w_i^+\leqslant 1,$$
$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^-+w_i^+\leqslant 1,\ \sum_{j=1,j\neq i}^{n}w_j^++w_i^-\geqslant 1,$$
$$i=1,2,\cdots,n\}$$

范围内有解. 为方便起见，记上述范围为 Γ. 对于一般区间互补判断矩阵，未必具有拟一致性，即方程组

$$p_{ij}=\frac{w_i^+-w_j^-}{w_i^+-w_i^-+w_j^+-w_j^-},(i,j)\in E_1,$$

在 Γ 内未必有解. 即 p_{ij} 与 $\frac{w_i^+-w_j^-}{w_i^+-w_i^-+w_j^+-w_j^-}$ 有偏差，记偏差项为

$$f_{ij}=p_{ij}-\frac{w_i^+-w_j^-}{w_i^+-w_i^-+w_j^+-w_j^-}.$$

显然有 $f_{ij}=-f_{ji}$.

故构造偏差函数

$$F(\tilde{w})=2\sum_{(i,j)\in E_1,j>i}|f_{ij}|.$$

因此，建立模型

$$\text{(M1)}\quad\begin{cases}\min\ F(\tilde{w})=2\sum\limits_{(i,j)\in E_1,j>i}|f_{ij}|\\ \text{s.t.}\quad \tilde{w}\in\Gamma.\end{cases}$$

定理 4.3　模型(M1)必存在最优解.

证明　设 $F(\tilde{w})$ 在有限向量空间 Γ 内有定义的区域为 Γ^*，则 $F(\tilde{w})$ 在 Γ^* 内是连续函数，且 $F(\tilde{w})\geqslant 0$，因此 $F(\tilde{w})$ 有下确界，即存在一个常数 d，使得

$$d=\inf\{F(\tilde{w})\mid\tilde{w}\in\Gamma^*\}.$$

由连续函数的性质知存在 $\tilde{w}^*\in\Gamma^*\subseteq\Gamma$，使得 $F(\tilde{w}^*)=d$. 故 $\tilde{w}^*=(\tilde{w}_1^*,\tilde{w}_2^*,\cdots,\tilde{w}_n^*)$ 为模型

(M1)的最优解. □

由定理4.3知模型(M1)必存在最优解,设之为

$$\tilde{w}^* = (\tilde{w}_1^*, \tilde{w}_2^*, \cdots, \tilde{w}_n^*).$$

则其可以作为区间互补判断矩阵 $\bar{R}$ 的合理权重,然后根据可能度法求得权重之间比较的模糊互补判断矩阵

$$(q_{ij}^*)_{n\times n} = (p(\tilde{w}_i^* \geqslant \tilde{w}_j^*))_{n\times n},$$

采用中转法得精确数型的排序向量

$$\bar{\omega}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^* + \frac{n}{2} - 1}{n(n-1)},\ i = 1,2,\cdots,n \quad (10)$$

另外,由模型(M1)易得以下结论.

定理4.4 $\bar{R} = ([r_{ij}^-, r_{ij}^+])_{n\times n}$ 为拟一致性区间互补判断矩阵当且仅当模型(M1)的最优值 $F(\tilde{w}^*) = 0$.

由定理4.4知:拟一致性区间互补判断矩阵权重求解过程是一般区间互补判断矩阵权重求解过程的特例.因此,根据节3和节4部分的讨论,针对区间互补判断矩阵的权重问题,我们给出如下的算法步骤.

步骤1 对于给定的区间互补判断矩阵

$$\bar{R} = ([r_{ij}^-, r_{ij}^+])_{n\times n},$$

计算矩阵

$$(p([r_{ij}^-, r_{ij}^+] \geqslant [r_{ji}^-, r_{ji}^+]))_{n\times n} = (p_{ij})_{n\times n}.$$

步骤2 根据模型(M1),计算区间互补判断矩阵 $\bar{R}$ 的权重

$$\tilde{w}^* = (\tilde{w}_1^*, \tilde{w}_2^*, \cdots, \tilde{w}_n^*).$$

步骤3 根据可能度法求得权重之间比较的模糊互补判断矩阵 $(q_{ij}^*)_{n\times n}$.

步骤4 采用式(10)求得得精确数型的排序向量 $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \cdots, \bar{\omega}_n)$.

5 实例分析

为了验证方法的可行性,本文选取文献[9]中的例1数据进行分析决策.原始区间互补判断矩阵 $\bar{R}$ 如下:

$$\begin{bmatrix} [0.5,0.5] & [0.3,0.4] & [0.5,0.7] & [0.4,0.5] \\ [0.6,0.7] & [0.5,0.5] & [0.6,0.8] & [0.2,0.6] \\ [0.3,0.5] & [0.2,0.4] & [0.5,0.5] & [0.4,0.8] \\ [0.5,0.6] & [0.4,0.8] & [0.2,0.6] & [0.5,0.5] \end{bmatrix}.$$

首先由 $\bar{R}$ 计算矩阵

$$(p([r_{ij}^-, r_{ij}^+] \geqslant [r_{ji}^-, r_{ji}^+]))_{n\times n} = (p_{ij})_{n\times n}$$

为

$$\begin{bmatrix} 0.5000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.5000 & 1.0000 & 0.2500 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.5000 & 0.7500 \\ 1.0000 & 0.7500 & 0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

根据模型(M1)得到如下结果:

$$\min F(\tilde{w}) = 2\left|0.25 - \frac{w_2^+ - w_4^-}{w_2^+ - w_2^- + w_4^+ - w_4^-}\right| + 2\left|0.75 - \frac{w_3^+ - w_4^-}{w_3^+ - w_3^- + w_4^+ - w_4^-}\right|$$

$$\text{s.t.}\quad w_1^+ \leqslant w_2^-, w_3^+ \leqslant w_1^-, w_1^+ \leqslant w_4^-,$$
$$w_3^+ \leqslant w_2^-,\ 0 \leqslant w_i^- \leqslant w_i^+ \leqslant 1,$$
$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_j^- + w_i^+ \leqslant 1,\ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_j^+ + w_i^- \geqslant 1,$$
$$i = 1,2,3,4.$$

运用MATLAB7.0求解此非线性优化问题,得最优解为

$$[w_1^-, w_1^+] = [0.2222, 0.2222],$$
$$[w_2^-, w_2^+] = [0.2222, 0.3333],$$
$$[w_3^-, w_3^+] = [0.0000, 0.2222],$$
$$[w_4^-, w_4^+] = [0.2222, 0.5556],$$

且模型最优值为1.5.由定理4.3知,区间互补判断矩阵 $\bar{R}$ 不具有拟一致性.再根据可能度法求得权重之间比较的模糊互补判断矩阵 $(q_{ij}^*)_{n\times n}$ 为

$$\begin{bmatrix} 0.5000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.5000 & 1.0000 & 0.2499 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.5000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.7500 & 1.0000 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

采用中转法得到精确数型的排序向量

$$\bar{\omega}_1 = 0.2083,\ \bar{\omega}_2 = 0.3125,$$
$$\bar{\omega}_3 = 0.1250,\ \bar{\omega}_4 = 0.3542.$$

可得方案的排序结果为方案4 $\overset{0.7500}{\succ}$ 方案2 $\overset{1}{\succ}$ 方案1 $\overset{1}{\succ}$ 方案3.

另外,若使用矩阵 $(p_{ij})_{n\times n}$,则计算的结果为

$$\bar{\omega}_1 = 0.2083,\ \bar{\omega}_2 = 0.3125,$$
$$\bar{\omega}_3 = 0.1875,\ \bar{\omega}_4 = 0.2917.$$

故,方案2 $\overset{0.2500}{\succ}$ 方案4 $\overset{1}{\succ}$ 方案1 $\overset{1}{\succ}$ 方案3.由于方案2优于方案4的程度只有0.25,而方案4优于方案3的程度是0.75,因此这个排序结果不合理.通过比较矩阵 $(q_{ij}^*)_{n\times n}$ 和矩阵 $(p_{ij})_{n\times n}$,发现 p_{34} 与 q_{34}^* 及 p_{43} 与 q_{43}^* 不同.由 $p_{34} = 0.75$,$p_{43} = 0.25$ 知方案3优于方案4的可能性为0.75,而方案4优于方案3的可能性为0.25,因此,方案4不会优于方案3.这也能

说明根据矩阵$(p_{ij})_{n\times n}$得到的排序结果不合理. 另一方面，由 $q_{34}^{*}=0$，$q_{43}^{*}=1$ 知方案 4 优于方案 3，而 $p_{34}=0.75$，$p_{43}=0.25$. 因此，它们是有区别的，这一点可以理解为利用权重向量得到的模糊互补判断矩阵$(q_{ij}^{*})_{n\times n}$是对原始决策矩阵的一种修正，使得决策结果更合理.

6 结论

我们给出了拟加型一致性、拟积型一致性及拟一致性的概念，并指出拟加型一致性和拟积型一致性可以统一为拟一致性. 本质上，拟一致性是从可能度角度表达了区间互补判断矩阵元素与其权重向量之间的关系. 本文提出的区间互补判断矩阵拟加型一致性、拟积型一致性概念与模糊互补判断矩阵的加型、积型一致性的定义均是利用相对优势度反映矩阵元素与其权重向量之间的联系，因此它们是一致的. 本文针对拟一致性区间互补判断矩阵，运用可能度法求得权重之间比较的模糊互补判断矩阵，并利用中转法得到精确数型的排序向量；然而决策者给出的矩阵不一定满足拟一致性，将权重向量与判断矩阵元素之间的这种关系看成近似关系，建立偏差函数；根据偏差最小化思想，建立模型以求出原区间互补判断矩阵权重. 本文的特点是：先找出模糊互补判断矩阵加型一致性和积型一致性的共同特征，然后将其推广为区间互补判断矩阵相应的一致性并利用其求解权重，避免了要对区间互补判断矩阵的加型一致性与积型一致性进行选择. 本文为研究区间互补判断矩阵的一致性问题提供了一种新的思路. 当然本文对区间互补判断矩阵权重问题只是做了初步研究，还有很多问题值得探讨. 例如，从理论上能否证明区间互补判断矩阵的加型一致性和积型一致性之间是等价的.

参考文献(References)

[1] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京：科学出版社，2008.

[2] Xu Z S. A practical method for priority of interval number complementary judgment matrix [J]. Operations Research and Management Science, 2001, 10(1): 16-19.
徐泽水. 区间数互补判断矩阵排序的一种实用方法[J]. 运筹与管理，2001，10(1)：16-19.

[3] Xu Z S. Priority method based on possibility and error analysis for interval number complementary judgment matrix [J]. Journal of PLA University of Science and Technology, 2003, 4(2): 96-98.
徐泽水. 基于可能度和误差分析的区间互补矩阵排序法[J]. 解放军理工大学学报，2003，4(2)：96-98.

[4] Gong Z W, Liu S F. Research on consistency and priority of interval number complementary judgment matrix[J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 14(4): 64-69.
巩在武，刘思峰. 区间数互补判断矩阵的一致性及其排序研究[J]. 中国管理科学，2006，14(4)：64-69.

[5] Liu F, Shi L H. An approach for interval number priority weight based on convex-combination and possibility degree [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(4): 112-119.
刘芳，兰继斌，史丽华. 基于凸组合和可能度的区间数优先权重法[J]. 模糊系统与数学，2008，22(4)：112-119.

[6] Xu Y J, Zhang Y Z, Wei C P. Acceptable consistency analysis of interval complement comparison matrices [J]. Control and Decision, 2011, 26(3): 327-331.
徐迎军，张玉忠，魏翠萍. 区间互补判断矩阵可接受一致性[J]. 控制与决策，2011，26(3)：327-331.

[7] Yue Q, Fan Z P, Shi L H. New approach to determine the priorities from interval fuzzy preference relations [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2011, 22(2): 267-273.

[8] Liu F, Zhang W G, Fu J H. A new method of obtaining the priority weights from an interval fuzzy preference relation[J]. Information Sciences, 2012, 185: 32-42.

[9] Xu Z S, Chen J. Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 184: 266-280.

[10] Wang J, Lan J B, Ren P Y, et al. Some programming models to derive priority weights from additive interval fuzzy preference relation [J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 27: 69-77.

[11] Lan J B, Hu M M, Ye X M, et al. Deriving interval weights from an interval multiplicative consistent fuzzy preference relation[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 26: 128-134.

[12] Wang Z J, Li K. Goal programming approaches to deriving interval weights based on interval fuzzy preference relations[J]. Information Sciences, 2012, 193: 180-198.

[13] Xu Z S. Approaches to multiple attribute decision making with intuitionistic fuzzy preference information [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2007, 27(11): 62-71.

徐泽水．直觉模糊偏好信息下的多属性决策途径[J]．系统工程理论与实践，2007，27(11)：62-71.
[14] Gong Z W, Li L S, Zhou F X, et al. Goal programming approaches to obtain the priority Vectors from the intuitionistic fuzzy preference relations[J]. Computers & Industrial Engineering, 2009,57:1 187-1 193.
[15] Genc S, Boran F E, Akay D, et al. Interval multiplicative transitivity for consistency, missing values and priority weights of interval fuzzy preference relations[J]. Informations Sciences, 2010,180:4 877-4 891.
[16] Xu Z S. Consistency of interval fuzzy preference relations in group decision making[J]. Applied Soft Computing, 2011,11:3 898-3 909.
[17] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12: 117-131.
[18] 李荣钧．模糊多准则决策理论与应用[M]．北京：科学出版社，2000.
[19] 徐泽水．不确定多属性决策方法及应用[M]．北京：清华大学出版社，2004.
[20] Gong Z W, Li L S, Forrest J, et al. The optimal priority models of the intuitionistic fuzzy preference relation and their application in selecting industries with higher meteorological sensitivity[J]. Expert Systems with Applications, 2011,38(4):4 394-4 402.
[21] Sugihara K, Ishii H, Tanaka H. Interval priorities in AHP by interval regression analysis[J]. European Journal of Operation Research, 2004,158:745-754.
[22] Gong Z W, Li L S, Yao T X. Group decision making based on incomplete intuitionistic fuzzy preference relations[J]. Operations Research and Management Science, 2010,19(6):45-51.
巩在武，李廉水，姚天祥．基于残缺信息的直觉模糊判断矩阵群决策方法[J]．运筹与管理，2010，19(6)：45-51.

(上接第247页)

[3] Jorion P. Portfolio optimization in practice [J]. Financial Analysts, 1992, 48(1):68-74.
[4] Ledoit O, Wolf M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection[J]. Journal of Empirical Finance, 2003,10(5):603-621.
[5] Markowitz H. Portfolio analysis with factors and scenarios [J]. Journal of Finance, 1981, 36(4): 871-877.
[6] Frost P A, Savarino J E. An empirical Bayes approach to efficient portfolio selection[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1986,21(3):293-305.
[7] Jorion P. Bayesian and CAPM estimators of the means: Implications for portfolio selection[J]. Journal of Banking and Finance, 1991,15(3): 717-727.
[8] Merton R C. Ananalytic derivation of the efficient portfolio frontier[J]. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1972,7(4):1 851-1 872.
[9] Laloux L, Cizeau P, Bouchaud J P, et al. Noise dressing of financial correlation matrices[J]. Physical Review Letters, 1999,83(7):1 467-1 470.
[10] Plerou V, Gopikrishnan P, Amaral L N, et al. Random matrix approach to cross correlations in financial data [J]. Physical Review E, 2002,65:066126.