第44卷第3期 中国科学技术大学学报 Vol. 44,No. 3
2014年3月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Mar. 2014

文章编号:0253-2778(2014)03-0194-09

模型不确定环境下最优动态投资组合问题的研究

余敏秀,费为银,吕会影

(安徽工程大学金融工程系,安徽芜湖 241000)

摘要:研究了在模型不确定环境以及在一般的半鞅市场下的最优投资组合问题.首先,用鞅方法和对偶理论去寻求最优投资组合问题的解,证明了在适当的假设条件下,投资组合问题的对偶问题的HJB方程解的存在性和唯一性,并对这个唯一解进行相关的刻画.其次,推导出原问题和对偶问题的值函数是共轭函数.最后,考虑了一个跳扩散模型,其系数依赖于一个马尔柯夫链,且投资者对马尔柯夫链状态间的切换的速率是不确定的.当代理人具有对数效用函数时,用随机控制方法去推导相应的HJB方程,并得到对偶问题的解,从而推出最优投资组合问题的显式解.

关键词:模型不确定;最优投资组合;马尔柯夫切换模型;对偶理论;鞅方法

中图分类号:O211.63;O231;F830 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2014.03.005

AMS Subject Classification (2000): Primary 60J20; Secondary 91G10

引用格式: Yu Minxiu, Fei Weiyin, Lyu Huiying. Optimization of dynamic portfolio under model uncertainty[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014,44(3):194-202.
余敏秀,费为银,吕会影. 模型不确定环境下最优动态投资组合问题的研究[J]. 中国科学技术大学学报,2014,44(3):194-202.

Optimization of dynamic portfolio under model uncertainty

YU Minxiu, FEI Weiyin, LYU Huiying

(*Department of Financial Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China*)

Abstract: The problem of optimal portfolio under model uncertainty and a general semimartingale market was studied. First, a solution to the investment problem was obtained using the martingale method and the dual theory. It was proven that under appropriate assumptions a unique solution to the investment problem exists and is characterized. Then, the value functions of the primal and dual problem are convex conjugate functions. Finally, a diffusion-jump-model was considered where the coefficients depend on the state of a Markov chain and the investor is uncertain about the intensity of the underlying Poisson process. For an agent with logarithmic utility function, the stochastic control method was adopted to derive the Hamilton-Jacobi-Bellmann-equation. Furthermore, the solution of the dual problem can be determined and it was shown how the optimal portfolio can be explicitly computed.

Key words: model uncertainty; optimal portfolio; Markovian switching model; dual theory; martingale method

---

收稿日期:2012-07-16;**修回日期**:2012-10-23

基金项目:国家自然科学基金(71171003),安徽省自然科学基金(090416225),安徽省高校自然科学基金(KJ2012B019,KJ2013B023)资助.

作者简介:余敏秀,女,1978年生,硕士/助教. 研究方向:金融工程. E-mail: yuminxiu01@126.com

通讯作者:费为银,博士/教授. E-mail: wyfei@ahpu.edu.cn

0　引言

连续时间最优消费与投资起源于 Merton[1-2] 的研究,此后,最优消费与投资组合问题在数理金融中就成为主要的研究领域之一.投资者投资决策除了考虑风险外,另一个发展方向便是 Knight 不确定(即含糊)[3],或称模型不确定.如 Gilboa 等[4] 研究了带非唯一先验的最大最小期望效用问题.即

$$\inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U(X)] \tag{1}$$

可以去刻画模型不确定代理人的偏好.这里 U 是一个效用函数,$\mathcal{Q}$ 是一类概率测度,$\mathcal{Q}$ 中的元素可以解释为可能描述未来所有情景概率的先验模型,对这些先验模型的期望效用取下确界是最糟糕的情形. Kramkov 等[5] 用对偶方法刻画了一般情形下最优终端财富偏好的非稳健问题的解. Cvitanic 等[6],Karatzas 等[7] 及 Hugonnier 等[8] 都考虑了代理人在收到某些额外随机禀赋时的最优消费过程的例子. Schied[9],Schied 等[10] 及 Gundel[11] 也都借由对偶理论或是鞅方法解决了稳健优化问题. Duffie 等[12] 用随机控制方法计算出带有随机禀赋模型的最优投资问题,Quenez[13] 也用随机控制方法解决了在稳健情形下的最优投资策略. Becherer[14] 和 Muller[15] 运用倒向随机微分方程计算出最优投资组合的解. Bauerle 等[16] 在马尔柯夫切换模型下,算出最优投资组合问题的解. Hernandez-Hernandez 等[17] 解决了在一般罚项下,带有对数效用下消费的稳健最大化问题. Fei[18] 用最大最小效用的加权平均,即用 α-MEU 研究了最优投资组合选择问题. Fei[19] 探讨了带预期的最优消费投资问题,推广了现有的模型. Fei[20] 研究了投资者在 Knight 不确定下带有通胀的最优消费和投资决策,利用鞅和对偶技术建立了最优策略的存在性,并就对数效用投资者,建立了明确的最优消费投资公式.杨招君[21] 研究了部分信息下极大化终止时刻期望效用的最优投资策略问题.夏登峰等[22] 讨论了变折现率下带含糊和预期的投资问题.韩立岩等[23] 探讨了基于奈特不确定性随机波动率期权定价.李娟等[24] 研究了 Knight 不确定下资产收益率发生紊乱的最优投资策略问题.费为银等[25] 讨论了 Knight 不确定下考虑负效用的消费和投资问题. Fei 等[26] 运用次线性期望和 G 布朗运动理论第一次提出了随机控制的最优化原理,且在此理论框架下探讨了最优消费和投资选择问题. Wittmuss[27-28] 运用鞅方法和对偶理论等方法探讨了在模型不确定下最优动态消费流的问题,并得出消费和投资比率最优解的存在性和唯一性,同时将其结果运用到马尔柯夫切换模型的应用中,在该模型中的投资者带有对数和双曲绝对风险厌恶效用函数,但只讨论了投资者是风险厌恶型和风险喜好型两种极端的情形,并给出相应的最优消费和投资比率.本文在 Wittmuss 的基础下研究模型不确定环境下最优动态投资策略问题.本文与 Wittmuss[28] 的不同之处是:本文所讨论的效用函数只与终端财富有关.

1　模型框架和对偶理论

在本节中,我们在一般的半鞅框架下研究投资组合问题,且代理人投资于股票市场,并收到一份额外的随机禀赋(endowment).若考虑代理人对每个可能的模型应用一个额外的罚函数,即用到稳健偏好泛函和货币风险度量之间的联系,这些效用泛函与凸风险测度是密切相关的,风险度量就是把风险转化为一个实际值的过程,而一个一致风险度量是风险度量 ρ 满足单调性、凸性、同质性和平移不变性.凸性意味着多样化投资组合有一个更小的风险.故对于一致风险度量,有

$$\rho(X)=\sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(-X).$$

若对含糊厌恶的代理人试图最大化,有

$$\inf_{Q\ll P}\left(E_Q[U(X_T)]+\gamma(Q)\right) \tag{2}$$

这里,γ 表示一个罚函数.若对于喜欢含糊的投资者,则有

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U(X))+\gamma(Q).$$

若是对介于含糊厌恶和含糊喜好者之间的投资者,则可以借由 α-MEU 进行建模,并估计收益 X,也即

$$\alpha\inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U(X)]+(1-\alpha)\sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U(X)),$$

$\forall\alpha\in[0,1]$.在本文中,我们只考虑 $\alpha=1$ 的特殊情形.

下面,我们给出式(2)的对偶函数.像通常的效用最大化理论一样,只不过这里的下确界是在相对应的对偶集 $\mathcal{D}$ 上取得的,而这个对偶集在某种程度上与等价鞅测度集 $\mathcal{M}$ 有关.在后面我们还将证明原最大化问题的解和对偶问题的解是存在的,还是彼此共轭的.并且原问题的解与对偶问题的解是等价的.我们考虑一个代理人想最大化来自于关于终端 T 时刻财富的预期效用,该代理人被赋予一个初始资本,假设代理人将初始资本和随机禀赋投资到 d

个风险资产中.设信息流$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T},P)$满足通常的条件,金融市场被假定是无套利的,故等价于概率测度 P 的上鞅集 $\mathscr{M}$ 非空.设投资组合过程为 $\theta=(\theta_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$,且$\int_0^t \theta_u \mathrm{d}S_u$ 从下方有界,初始资本记为 x,随机禀赋是一个非递减,适应 RCLL 过程且为 $\mathscr{E}=(\mathscr{E}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$,且令终端财富非负,即

$$x+\mathscr{E}_T+\int_0^T \theta_t \mathrm{d}S_t \geqslant 0 \tag{3}$$

令 $\pi_t^i=\dfrac{\theta_t^i S_t^i}{X_t}$表示 t 时刻投资到第 i 个风险资产上的财富比例,$\pi_t=(\pi_t^1,\cdots,\pi_t^d)$.记 $\mathscr{A}(x)$为满足式(3)的所有可能的投资组合 π 之集.

对于式(2)中的 γ,我们需要下列假设.

假设 1 我们假定风险度量 ρ 是从下方连续,序列$(Y_n)\subset L^\infty(P)$单调递减,即 $Y\in L^\infty(P)$,有$\rho(Y_n)\searrow\rho(Y)$,且对所有 $Y\in L_-^\infty(P)\setminus\{0\}$,$\rho(Y)$恒为正.

假设 2 对固定的时间 $t\in[0,T]$,效用函数 $U(t,\cdot)$是严格凹、非递减、连续可微且对所有的 $t\geqslant0$,有$\lim\limits_{x\to0}U_x(t,x)=\infty$和$\lim\limits_{x\to\infty}U_x(t,x)=0$.边际效用是介于两个单调递减连续函数之间,即

$$K_1(x)\leqslant U_x(t,x)\leqslant K_2(x),$$

且

$$\lim_{x\to\infty}\sup\frac{K_2(x)}{K_1(x)}<\infty,\ \lim_{x\to\infty}\inf_{t\in[0,T]}U(t,x)>0.$$

特别有

$$\lim_{x\to\infty}\sup\left\{\sup_t\frac{xU_x(t,x)}{U(t,x)}\right\}<1.$$

记 $\mathscr{Q}_e:=\{Q\in\mathscr{Q}\,|\,Q\sim P\}$,$\mathscr{Q}_e^f$ 表示满足条件 $Q\in\mathscr{Q}_e$,且 $u_Q(x)<\infty$(对某个 $x>0$).

$$\mathscr{U}_Q(x)=E_Q[U(X_T)],$$
$$u_Q(x)=\sup_{\pi\in\mathscr{A}(x)}\mathscr{U}_Q(x).$$

假设 3 假设存在 $Q_0\in\mathscr{Q}_e$,使得对某些 $x>0$,有 $u_{Q_0}(x)<\infty$成立.

为了估计 $E_Q([U(X_T)]+\gamma(Q))$的值,令

$$\mathscr{Q}=\{Q\ll P\mid\gamma(Q)<\infty\},$$

则式(2)的优化问题为

$$\max_{\pi\in\mathscr{A}(x)}\ \inf_{Q\ll P}(E_Q[U(X_T)]+\gamma(Q)).$$

我们定义上式最大化问题的值函数为

$$u(x)=\sup_{\pi\in\mathscr{A}(x)}\ \inf_{Q\in\mathscr{Q}}(E_Q[U(X_T)]+\gamma(Q)) \tag{4}$$

接下来将用对偶理论来刻画式(4)的解.设等价上鞅测度集 $\mathscr{M}$ 的弱*闭包(weak*-closure)$\mathscr{D}$ 为对偶区域,我们用 $\mathscr{D}$ 来考虑该式(4)的对偶问题.设每个 $R\in\mathscr{D}$,必有一非负且 RCLL 上鞅 $Y^R=(Y_t^R)_{t\in[0,T]}$(Y_R 对密度过程 R^r 是上鞅,其中 R^r 是 R 的唯一分解的正则部分).Y^R 的存在性,Y^R 及 $\mathscr{D}$ 的性质可以参见文献[7].记号$\langle R,\mathscr{E}_T\rangle$表示典则配对(canonical pairing),且$\langle R,I_\Omega\rangle=1$.再由任一 t 时刻资本非负这一约束条件,可推出对偶问题的值函数为

$$v(y)=\inf_{Z\in\mathscr{Z}}\left\{\inf_{R\in\mathscr{D}}\left\{E\left[ZV\left(y\frac{Y_T^R}{Z_T}\right)\right]\right\}+y\langle R,\mathscr{E}_T\rangle+\gamma(Z)\right\} \tag{5}$$

其中,V 是 U 的凸共轭函数,

$$\mathscr{Z}=\left\{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\middle|\,Q\in\mathscr{Q}\right\},\ Z_t=\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{F}_t}.$$

换句话说,

$$V(y)=\sup_{x\geqslant0}(U(x)-xy).$$

设函数 u_Q 为在主观概率测度 Q 下的优化问题的解,

$$u_Q(x)=\sup_{\pi\in\mathscr{A}(x)}E_Q[U(X_T)+\gamma(Q)],$$

若记 $\mathscr{V}_Q(Y_T^R)=E_Q\{V(Y_T^R)\}$,则可定义一个与之相对应的对偶问题的值函数 v_Q 为

$$v_Q(y)=\inf_{R\in\mathscr{D}}\left\{\mathscr{V}_Q\left(y\frac{Y_T^R}{Z_T^Q}\right)+y\langle R,\mathscr{E}_T\rangle\right\}.$$

由对偶理论,我们有下面的定理.

定理 1.1 假设上面 3 个假设均成立,则有

① 值函数 u 和 v 取唯一的有限值,且满足 $u'(\infty-)=0$ 及 $v'(0+)=0$.

② 值函数 u 满足

$$u(x)=\sup_{\pi\in\mathscr{A}(x)}\ \inf_{Q\in\mathscr{Q}}(E_Q[U(X_T)]+\gamma(Q))=\inf_{Q\in\mathscr{Q}}\ \sup_{\pi\in\mathscr{A}(x)}(E_Q[U(X_T)]+\gamma(Q)).$$

③ 值函数 u 和 v 是相互共轭的,即

$$u(x)=\inf_{y>0}(v(y)+xy),$$
$$v(x)=\sup_{x>0}(u(x)-xy),$$

尤其 v 是凸的.

④ v 的导数满足

$$v'(\infty-)\in\left[\inf_{R\in\mathscr{D}}\langle R,\mathscr{E}_T\rangle,\sup_{R\in\mathscr{D}}\langle R,\mathscr{E}_T\rangle\right].$$

若 $\mathscr{E}_T=0$,则 u 和 v 的导数满足 $u'(0+)=\infty$ 及 $v'(\infty-)=0$.

⑤ 存在对偶问题的一个解$(\hat{Q},\hat{R})\in\mathscr{Q}\times\mathscr{D}$,即

$$v(y)=\mathscr{V}_{\hat{Q}}\left(y\frac{Y_T^{\hat{R}}}{Z_T^{\hat{Q}}}\right)+y\langle\hat{R},\mathscr{E}_T\rangle+\gamma(\hat{Q}).$$

⑥ 对任一 $x>0$,必存在一个最优投资策略 $\hat{\pi}_t$,若$(\hat{Q},\hat{R})$是对偶问题的解,对 $y>0$,$x=-v'(y)$,则

$$u(x)=\inf_{Q\in\mathcal{Q}}(\mathcal{U}_Q(\hat{X}_T)+\gamma(Q))=\mathcal{U}_{\hat{Q}}(\hat{X}_T)+\gamma(\hat{Q})=u_{\hat{Q}}(x)+\gamma(\hat{Q}).$$

且

$$\hat{X}_T=I\left(\frac{yY_T^{\hat{R}}}{\hat{Z}_T}\right),$$

其中,

$$\hat{Z}_T=\frac{\mathrm{d}\hat{Q}}{\mathrm{d}P},\ I(\cdot)=\left(\frac{\partial U}{\partial x}(\cdot)\right)^{-1}.$$

证明　①～③. 由于满足上述 3 个假设条件,故由文献[9,定理 2.3 和 2.5],则可推出①,②和③结论成立.

④ 若 $\mathcal{E}_T=0$,则由文献[9,定理 2.3]可直接得出 $u'(0+)=\infty$及 $v'(\infty-)=0$.

若 $\mathcal{E}_T>0$,由文献[7,引理 A.7],对偶值函数 $v(y)$的渐近性质,可得

$$v'(\infty-)\in[\inf_{R\in\mathcal{D}}\langle R,\mathcal{E}_T\rangle,\sup_{R\in\mathcal{D}}\langle R,\mathcal{E}_T\rangle].$$

⑤ 由①知,值函数 $v(y)$取有限值,即 $v(y)<\infty$时,由文献[9,引理 4.3],故存在 $Y^{\hat{R}}\in\mathcal{Y}_{\mathcal{D}}$($\mathcal{Y}_{\mathcal{D}}$为与 $\mathcal{D}$ 等价的上鞅集),及 $Z^{\hat{Q}}\in\mathcal{Z}$,使得

$$v(y)=E\left[Z^{\hat{Q}}V\left(\frac{Y_T^{\hat{R}}}{Z_T^{\hat{Q}}}\right)\right]+y\langle\hat{R},\mathcal{E}_T\rangle+\gamma(\hat{Q})=E_{\hat{Q}}\left[V\left(y\frac{Y_T^{\hat{R}}}{Z_T^{\hat{Q}}}\right)\right]+y\langle\hat{R},\mathcal{E}_T\rangle+\gamma(\hat{Q})=\mathcal{V}_{\hat{Q}}\left(y\frac{Y_T^{\hat{R}}}{Z_T^{\hat{Q}}}\right)+y\langle\hat{R},\mathcal{E}_T\rangle+\gamma(\hat{Q}).$$

⑥ 设 $y>0$,使得 $v(y)+yx=u(x)$,由于 $v'(0+)=-\infty$和 $v'(\infty-)=0$,故这样的 y 是存在的. 对 y,取对偶问题的解$(\hat{Q},\hat{R})$. 类似于文献[28,定理 3.5]的证明,我们可以得到$(\hat{Q},\hat{R})$是稳健问题的一个鞍点. 下面证明

$$\hat{X}_T=I(yY_T^{\hat{R}})\hat{Q}-\text{a. s.}.$$

我们有

$$0\leqslant V\left(\frac{yY_T^{\hat{R}}}{\hat{Z}_T}\right)+\frac{yY_T^{\hat{R}}}{\hat{Z}_T}\hat{X}_T-U(\hat{X}_T).$$

因此

$$0\leqslant E_{\hat{Q}}\left[V\left(\frac{yY_T^{\hat{R}}}{\hat{Z}_T}\right)+\frac{yY_T^{\hat{R}}}{\hat{Z}_T}\hat{X}_T-U(\hat{X}_T)\right]=v(y)+E[yY_T^{\hat{R}}\hat{X}_T]-y\langle\hat{R},\mathcal{E}_T\rangle-u(x)\leqslant v(y)+yx-u(x)=0.$$

所以有

$$0=V\left(\frac{yY_t^{\hat{R}}}{\hat{Z}_t}\right)+\frac{yY_t^{\hat{R}}}{\hat{Z}_t}\hat{X}_t-U(\hat{X}_t)\hat{Q}-\text{a. s.},$$

从而 $\hat{X}_T=I\left(\frac{yY_T^{\hat{R}}}{\hat{Z}_T}\right)$. □

推论 1.1　若假设 3 和 $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}_e$ 成立,且 γ 在 $\mathcal{Q}$ 上严格凸,则值函数 u 连续可微,u 的对偶值函数 v 严格凸,对每个 $y>0$,存在 $\hat{Q}\in\mathcal{Q}$ 及 $\hat{R}\in\mathcal{D}$,使得

$$v(y)=\mathcal{V}_{\hat{Q}}\left(y\frac{Y_T^{\hat{R}}}{Z_T^{\hat{Q}}}\right)+y\langle\hat{R},\mathcal{E}_T\rangle+\gamma(\hat{Q}).$$

此外,$Y^{\hat{R}}$是唯一的,对任意 $x>0$,投资问题的最优解 $\hat{X}_t$ 是唯一的.

为了证明对偶问题的解的存在性,类似 Wittmuss[28]的讨论,可得到下列引理.

引理 1.1　存在 $\hat{Z}\in\mathcal{Z}$及 $\hat{R}\in\mathcal{D}$,使得

$$v(y)=E\left[\hat{Z}V\left(y\frac{Y_T^{\hat{R}}}{\hat{Z}_T}\right)\right]+y\langle\hat{R},\mathcal{E}_T\rangle+\gamma(\hat{Z}).$$

引理 1.2　稳健问题(4)的对偶值函数满足

$$\tilde{v}(y)=v(y)=\inf_{Q\in\mathcal{Q}_e^f}(v_Q(y)+\gamma(Q))=\inf_{Q\in\mathcal{Q}_e}(v_Q(y)+\gamma(Q)).$$

引理 1.3　对任意 $x>0$,必存在一个投资组合 $\hat{\theta}\in\mathcal{A}(x)$,使得

$$\inf_{Q\in\mathcal{Q}}(E_Q[U(\hat{X}_T)]+\gamma(Q))=u(x).$$

2　马尔柯夫切换模型的应用

在本节,我们将把前面的理论结果应用到一个特定的市场模型中去,这个特定的市场模型是通过一个具体的不确定集 $\mathcal{Q}$ 和一个对数效用函数给定. 我们通过建立相应的 HJB 方程来描述最优问题的解. 此时,HJB 方程是一个一般的微分方程,可以利用 MATLAB 模拟计算出该微分方程的数值解,故可以根据数值解计算出最优投资策略.

我们考虑一个马尔柯夫切换模型,即目前的经济状态是通过一个连续时间的马尔柯夫链给出. 假设该经济状态影响着简单跳扩散模型的系数,且假定代理人是知道这些经济状态的.

在本文中,投资者关于马尔柯夫切换状态的速

率是不确定的. 首先,证明我们的含糊集 $\mathscr{Q}$ 满足前面的假设条件,这样就可以直接用前面的对偶理论结论. 其次,我们考虑对数效用函数的最优投资组合问题,之后建立相应的 HJB 方程,给出这些 HJB 方程的解的性质,并就悲观投资者计算出其最优投资策略.

设$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{\leqslant T},P)$为一带流概率空间,$\Omega$ 为(W,Y)的路径空间,其中,W 是一个布朗运动,Y 是一个对应状态空间$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$上的连续时间马尔柯夫链,生成元(Q 矩阵)为

$$A=\begin{pmatrix}-\lambda^0 & \lambda^0 p_{1,2} & \cdots & \lambda^0 p_{1,n}\\ \lambda^0 p_{2,1} & -\lambda^0 & \cdots & \lambda^0 p_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda^0 p_{n,1} & \cdots & \lambda^0 p_{n,n-1} & -\lambda^0\end{pmatrix},$$

其中,λ^0 是马尔柯夫链固定跳的速率,而 $P=(p_{i,j})_{i,j=1,\cdots,n}$是一个随机矩阵,$p_{i,i}=0$,$i=1,\cdots,n$. 因此,我们可以通过一个带有强度为 $\lambda^0>0$ 及给定跳的次数的泊松过程 N 和一个转移矩阵为 P 的离散时间马尔柯夫链 $\widetilde{Y}$ 来等价描述 Y,当然,如果有一次跳会发生,则 $\widetilde{Y}$ 的转移矩阵 P 中的 $p_{i,j}$就是一个固定的转移概率. 为了方便起见,我们只考虑 $n=2$ 的情形.

假设上面的信息流满足通常的条件,且设 M 是一个补偿泊松过程,即 $M_t=N_t-\lambda^0 t$. 注意到在概率测度 Q 下的密度为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\mathscr{E}\left(\int_0^{\cdot}\frac{(\lambda_s-\lambda^0)}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\right)_T,$$

其中,$(N_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$是一个随机强度为$(\lambda_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$的泊松过程. 设在外部市场因素 Y 下债券和股票的动力学方程为

$$\mathrm{d}S_t^0=S_t^0 r(Y_t)\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}S_t=S_{t-}(\sigma(Y_t)\mathrm{d}W_t+b(Y_t)\mathrm{d}t+\delta(Y_{t-})\mathrm{d}N_t),$$

其中,$\sigma>0$,这个随机微分方程的解是存在的. 由于投资者以初始资本 $x>0$ 投资在股票和债券上,由于在时刻 t 投资在股票上的财富比例为 π_t,故财富过程的随机微分方程为

$$\mathrm{d}X_t^\pi=\frac{X_{t-}^\pi\pi_{t-}}{S_{t-}}\mathrm{d}S_t+\frac{X_{t-}^\pi(1-\pi_{t-})}{S_{t-}^0}\mathrm{d}S_t^0,$$

$$X_0=x.$$

与前面类似,我们要确保财富非负,故

$$X_t^\pi\geqslant 0 \tag{6}$$

在这种情形下,一个效用函数为对数效用的悲观投资者的优化问题就成为

$$\max_{\pi\in\mathscr{A}(x)}\inf_{Q\in\mathscr{Q}}E_Q[\ln(U(X(T)))].$$

由于我们考虑投资者对经济状态的转换速率是含糊的,也即泊松过程 N 跳的速率是不确定的,且我们假定不同经济状态之间的转移概率是已知的. 若设 a_1,a_2 为正的常数,则出现在稳健效用泛函中的集 $\mathscr{Q}$ 为

$$\mathscr{Q}=\left\{Q\left|\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\mathscr{E}\left(\int_0^{\cdot}\frac{(\lambda_s-\lambda^0)}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\right)_T,\ \lambda\in\Lambda\right.\right\},$$

其中,Λ 可被定义为

$$\Lambda=\{\lambda\mid\lambda_s\in[a_1,a_2],a_1<\lambda^0<a_2\}.$$

由文献[28,引理 4.1]知,假设 1 是成立的,故我们可以用前面对偶理论的结果. 在这里,我们用 $\widetilde{U}$ 表示 U 的对偶函数,故可设对偶集为

$$\mathscr{D}=\left\{Q\mid\mathrm{d}Q=\mathscr{E}\left(-\int_0^{\cdot}\frac{b(Y_s)-r(Y_s)+\delta(Y_s)\nu_s}{\sigma(Y_s)}\mathrm{d}W_s+\int_0^{\cdot}\frac{\nu_s-\lambda^0}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\right)_T\mathrm{d}P,\ \nu\in\mathscr{N}\right\},$$

其中,

$$\mathscr{N}=\{\nu\mid\nu_s>0,\int_0^t\nu_s^2\mathrm{d}s<\infty\},$$

ν是可料的过程.

定理 2.1 若假设 1 和假设 2 均成立,则式(4)的对偶问题由下式给出,即

$$v(y)=\inf_{Q\in\mathscr{Q}}\inf_{D\in\mathscr{D}}E_Q\left[\widetilde{U}\left(y\frac{D_TS_T^0}{Z_T^Q}\right)\right].$$

因此,有

$$u(x)=\inf_{y>0}(v(y)+xy),$$

其中,

$$D_t=\mathscr{E}\left(-\int_0^{\cdot}\frac{b(Y_s)-r(Y_s)+\delta(Y_s)\nu_s}{\sigma(Y_s)}\mathrm{d}W_s+\int_0^{\cdot}\frac{\nu_s-\lambda^0}{\lambda^0}\mathrm{d}M_s\right)_t,$$

$$\theta_t=-\frac{b(Y_t)-r(Y_t)+\delta(Y_t)\nu_t}{\sigma(Y_t)}.$$

证明 设 $\mathscr{Y}_Q(y)$为测度 Q 上所有正上鞅集,且 $Y_0=y$,由文献[9,Remark 2.7],知稳健问题的值函数可定义为

$$v(y):=\inf_{Q\in\mathscr{Q}}\inf_{Y\in\mathscr{Y}_Q(y)}(E_Q[V(Y_T)]+\gamma(Q))=$$

$$\inf_{Q\in\mathscr{Q}}\inf_{D\in\mathscr{D}}(E_Q[\widetilde{U}(Y_T)]+\gamma(Q))=$$

$$\inf_{P^*\in\mathscr{M}}\inf_{Q\in\mathscr{Q}_e}\left(E_Q\left[\widetilde{U}\left(y\frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}Q}\right)\right]+\gamma(Q)\right),$$

其中,$\mathscr{M}$ 为 P 的局部等价鞅测度,$\mathscr{D}\subseteq\mathscr{Y}_Q(y)$,$D\in\mathscr{D}$ 是一个正的局部鞅,$P^*\in\mathscr{D}$,$\widetilde{U}(y)=V(y)$,从而结论成立. □

接下来我们借助于对偶问题的 HJB 方程来描绘最优投资组合策略. 由于假设效用函数 U 明显满足假设 2,若存在 $Q_0\in\mathscr{Q}$,且 $x>0$,使得

$$u_{Q_0}(x)<\infty,$$

则假设 3 也就满足了,故可以应用前面对偶理论的结果.

令 $z>0$,根据定理 2.1,对偶问题为

$$\tilde{u}(z)=\inf_{\nu\in\mathscr{N}}\inf_{\lambda\in\Lambda}E_{Q_\lambda}\left[\widetilde{U}\left(\frac{zD_T^\nu}{S_T^0Z_T^\lambda}\right)\right]=\inf_{\nu\in\mathscr{N}}\inf_{\lambda\in\Lambda}E_{Q_\lambda}\left[-1-\ln\frac{zD_T^\nu}{S_T^0Z_T^\lambda}\right],$$

其中,

$$D_T^\nu=\mathscr{E}\left(\int_0^\cdot\theta_s^\nu dW_s+\int_0^\cdot\frac{\nu_s-\lambda^0}{\lambda^0}dM_s\right)_T,$$

$$Z_T^\lambda=\mathscr{E}\left(\int_0^\cdot\frac{\lambda_s-\lambda^0}{\lambda^0}dM_s\right)_T.$$

则我们得到原问题(4)的解

$$u(x)=\min_{z>0}(\tilde{u}(z)+xz)=\tilde{u}\left(\frac{1}{x}\right)+1.$$

为了计算出上面原问题(4)的解,由文献[28,引理 4.3],对所有 $t\geqslant0$,有

$$\inf_{\nu\in\mathscr{N}}\inf_{\lambda\in\Lambda}E_{Q_\lambda}\left[-1-\ln\frac{D_t^\nu}{S_t^0Z_t^\lambda}\right]=\inf_{\lambda\in\Lambda}E_{Q_\lambda}\left[-1+\int_0^t\left(\frac{1}{2}(\theta_s^{\nu^*})^2+\nu_s^*-\lambda_s+(\ln\lambda_s-\ln\nu_s^*)-r\right)ds\right],$$

其中,

$$\nu_s^*=\nu^*(Y_s,\lambda_s)=\begin{cases}\dfrac{\eta_s+\sqrt{\eta_s^2+4\delta_s^2\sigma_s^2\lambda_s}}{2\delta_s^2}, & \text{if } \delta(Y_s)\neq0;\\ \lambda_s, & \text{if } \delta(Y_s)=0,\end{cases}$$

而 $\eta_s=b(Y_s)\delta(Y_s)+\sigma(Y_s)^2$.

故由动态规划原理,可定义

$$J(t,y,\nu,\lambda):=E\left[Z_T^\lambda\ln\frac{S_T^0Z_T^\lambda}{D_T^\nu}\right]=E_{Q_\lambda}\left[\ln\frac{S_T^0Z_T^\lambda}{D_T^\nu}\right].$$

故值函数为

$$V(t,y):=\inf_{\nu\in\mathscr{N}}\inf_{\lambda\in\Lambda}J(t,y,\nu,\lambda).$$

从而 $\tilde{u}(z)=-1-\ln z$.

下面利用经典的随机控制结果可得到相应的 HJB 方程. 设马尔柯夫链 Y 的生成元矩阵为 A,则在测度 Q_λ 下生成元可设为

$$A_t^\lambda=\begin{pmatrix}-\lambda_t & \lambda_tp_{1,2} & \cdots & \lambda_tp_{1,n}\\ \lambda_tp_{2,1} & -\lambda_t & \cdots & \lambda_tp_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_tp_{n,1} & \cdots & \lambda_tp_{n,n-1} & -\lambda_t\end{pmatrix},$$

$$0\leqslant t\leqslant T,$$

其中,$(\lambda_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$是一个可料的随机过程,它本身依赖于 Y. 下面,我们将证明下列 HJB 方程系统刻画了上面的值函数,且 HJB 方程的解必须满足

$$v_t^i(t)=\inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}(c_i(\lambda)+(A^\lambda v(t,\cdot))_i)=\inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}\left(c_i(\lambda)+\lambda\left(\sum_{j=1}^np_{i,j}v^j(t)-v^i(t)\right)\right)\tag{7}$$

其中,边界条件为

$$v^i(0)=0,\ i=1,\cdots,n\tag{8}$$

且若 $\delta(e_i)\neq0$,

$$c_i(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\frac{b(e_i)-r(e_i)+\delta(e_i)\left(\beta(e_i)+\sqrt{\beta(e_i)^2+\dfrac{\sigma(e_i)^2\lambda}{\delta(e_i)^2}}\right)}{\sigma(e_i)}\right)^2-\lambda+\beta(e_i)+\sqrt{\beta(e_i)^2+\frac{\sigma(e_i)^2\lambda}{\delta(e_i)^2}}+r(e_i)+\left(\ln\lambda-\ln(\beta(e_i)+\sqrt{\beta(e_i)^2+\frac{\sigma(e_i)^2\lambda}{\delta(e_i)^2}}\right)\lambda,$$

若 $\delta(e_i)=0$,则

$$c_i(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\frac{b(e_i)-r(e_i)}{\sigma(e_i)}\right)^2,$$

其中,

$$\beta=-\frac{(b(e_i)-r(e_i))\delta(e_i)+\sigma(e_i)^2}{2\delta(e_i)^2}.$$

定理 2.2 HJB 方程(7)和(8)存在唯一的经典解 $v\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$,且该解满足 $v=V$,若 λ^* 是一可测过程,则(7)在 $\hat{\lambda}:=\lambda^*$ 处取得最小值,而 λ^* 是来自集 Λ 的一个可行的控制策略,若定义 $\hat{\nu}=\nu_s^*$,则 $\hat{\nu}$ 是 $\mathscr{N}$ 中的一个元素,且有 $V(t,y)=J(t,y,\hat{\nu},\hat{\lambda})$.

证明 只证 $n=2$ 的情形.

设 $\nu\in\mathcal{N}$，λ 是在 $[a_1,a_2]$ 上取值的一个可料过程. 由前面定义知

$$J(t,y,\nu,\lambda)=E\left[Z_T^{\lambda}\ln\frac{S_T^0Z_T^{\lambda}}{D_T^{\nu}}\right]=$$
$$E_{Q_\lambda}\left[\ln\frac{S_T^0Z_T^{\lambda}}{D_T^{\nu}}\right]=$$
$$E_{Q_\lambda}\left[\int_0^T\left(\frac{1}{2}(\theta_s^{\nu})^2+\nu_s-\lambda_s+r+\right.\right.$$
$$\left.\left.(\ln\lambda_s-\ln\nu_s)\lambda_s\right)ds\right],$$

其中，

$$M_t^{\lambda}=N_t^{\lambda}-\int_0^T\lambda_s ds.$$

函数 $J(t,y,\nu,\lambda)$ 在

$$\nu_s^*=\begin{cases}\beta+\sqrt{\beta^2+\dfrac{\sigma^2\cdot\lambda_s}{\delta^2}}, & \text{if }\delta(Y_s)\neq 0;\\ \lambda_s, & \text{if }\delta(Y_s)=0\end{cases}$$

处取得最小.

现选一函数 $v\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$，使得

$$v(t,e_i)=v^i(t),\ i=1,2.$$

由 Itô 引理，有

$$dv(u-t,Y_{t^-})=-v_t(u-t,Y_{t^-})dt=$$
$$v_y(u-t,Y_{t^-})dY_t+\Delta v(u-t,Y_t)-$$
$$v_y(u-t,Y_{t^-})\Delta Y_t=$$
$$-v_t(u-t,Y_{t^-})dt+\Delta v(u-t,Y_t).$$

由于 $v\in C^1$，故当且仅当马尔柯夫经济状态发生改变时才有一次跳 $(0<t<T)$，我们记 $\hat{Y}_t$ 为状态 Y_t 的对立状态. 则

$$\sum_{0\leqslant t\leqslant T}\Delta v(u-t,Y_t)=\sum_{0\leqslant t\leqslant T}(v(u-t,\hat{Y}_{t^-})-$$
$$v(u-t,Y_{t^-}))(dM_t^{\lambda}+\lambda_t dt),$$

其中，

$$M^{\lambda}=N-\int_0^T\lambda_s ds,$$

且 M^{λ} 是 Q_λ 的鞅. 由于 dt 项的系数在边界上连续，所以有

$$\int_0^u dv(u-t,Y_t)=v(0,Y_u)-v(u,y)=$$
$$\int_0^u(-v_t(u-t,Y_{t^-})+$$
$$(v(u-t,\hat{Y}_{t^-})-v(u-t,Y_{t^-}))\lambda_t)dt+$$
$$\int_0^u(v(u-t,\hat{Y}_{t^-})-v(u-t,Y_{t^-}))dM_t^{\lambda}=$$
$$\int_0^u(-v_t(u-t,Y_{t^-})+$$
$$(v(u-t,\hat{Y}_t)-v(u-t,Y_{t^-}))\lambda_t dt+$$
$$\int_0^u v(v(u-t,\hat{Y}_{t^-})-v(u-t,Y_{t^-}))dM_t^{\lambda}\geqslant$$
$$\int_0^u c(Y_t,\lambda_t)dt+$$
$$\int_0^u(v(u-t,\hat{Y}_{t^-})-v(u-t,Y_{t^-}))dM_t^{\lambda}.$$

由于 v 有界，故

$$v(u,y)\leqslant E_Q\left[\int_0^u c(Y_t,\lambda_t)dt\right]\leqslant J(u,y,\nu,\lambda).$$

取

$$\lambda^*(t,e_i)=\underset{\lambda\in\Lambda}{\operatorname{argmin}}(c_i(\lambda)+\lambda(v(t,\hat{e}_i)-v(t,e_i))).$$

由于 $c_i(\lambda)$ 是关于 λ 严格凸函数，且可微，因此，$\lambda^*(t,e_i)$ 要么取 a_1，要么取 a_2，或者满足下面的微分方程：

$$c_i'(\lambda)=v(t,\hat{e}_i)-v(t,e_i).$$

该方程右边是一个关于时间 t 的连续函数，而 $c_i'(\lambda)$ 严格单调减，$\lambda^*(t,e_i)$ 是 t 的连续函数. 故 $\hat{\lambda}_s=\lambda^*(u-s,Y_{s^-})$ 是一个可容许策略. 又由式(7)，得到 $v=V$. □

若微分方程(7)满足全局 Lipschitz 条件，则式(7)有唯一解.

若给定参数 σ,δ 和 b，我们可以用 MATLAB 计算出上面的 HJB 方程的解，满足

$$\inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}c_2(\lambda)>\inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}c_2(\lambda)>0,$$

且 $v^2>v^1$. 下面给出的是给定一些特定参数时，对应 HJB 方程的数值解. 在这里，我们只考虑两个状态之间的转换，即 $i=1,2$ 的情形，这时对应的 HJB 方程，也即式(7)为

$$\left.\begin{aligned}v_t^1(t)&=\inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}(c_i(\lambda)+\lambda(v^2(t)-v^1(t))),\\ v_t^2(t)&=\inf_{\lambda\in[a_1,a_2]}(c_i(\lambda)+\lambda(v^1(t)-v^2(t)))\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

若给定以下参数

$$a_1=1.2,a_2=30,T=7,r=0,$$
$$\delta=[-0.7,-0.316],b=[1,0.035],\sigma=[1,1].$$

图 1 是式(9)的两个状态转换的 HJB 方程的数值模拟解，图 2 是满足式(9)的 HJB 方程解的最优 λ 的模拟取值.

当数值模拟解出来后，我们就可以根据下列命题求出悲观投资者的最优投资策略.

命题 2.1 悲观投资者的最优财富过程为

$$\hat{X}_t=x\frac{S_t^0Z_t^{\hat{\nu}}}{D_t^{\hat{\nu}}},$$

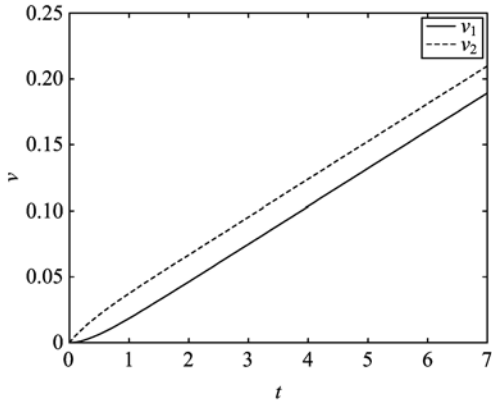

图 1　HJB 方程(6)的解

Fig. 1　The solution for (6)

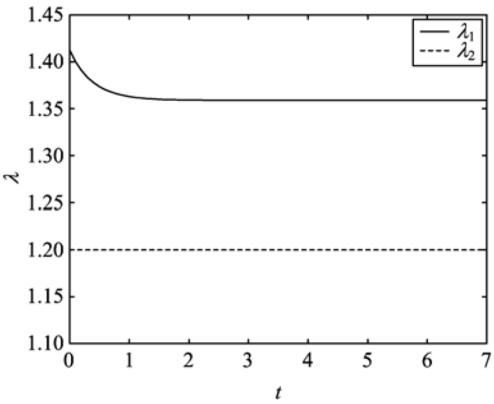

图 2　HJB 方程(6)的最优 λ 的取值

Fig. 2　The optimal λ's develop

最优投资组合过程为

$$\hat{\pi}(t,Y_t)=\begin{cases}\dfrac{b(Y_t)-r(Y_t)+\hat{\nu}_t\delta(Y_t)}{\sigma(Y_t)^2}=\dfrac{\hat{\lambda}_t-\hat{\nu}_t}{\delta(Y_t)\hat{\nu}_t}, \\ \qquad \text{if } \delta(Y_t)\neq 0; \\ \dfrac{b(Y_t)-r(Y_t)}{\sigma(Y_t)^2}, \quad \text{if } \delta(Y_s)=0.\end{cases}$$

其中,x 为初始资本,$\hat{\lambda}$ 和 $\hat{\nu}$ 是定理 2.2 中的最优值.

证明　考虑 P 下的鞅 $R=(R_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$,并定义

$$R_t=\frac{\hat{X}_t D_t^{\hat{\nu}}}{S_t^0},0\leqslant t\leqslant T.$$

由鞅性及定理 1.1 中的 $I(y)=\dfrac{1}{y}$,$\hat{z}=\dfrac{1}{x}$,可得出

$$\hat{X}_t=x\frac{S_t^0 Z_t^{\hat{\lambda}}}{D_t^{\hat{\nu}}}.$$

对 $\hat{X}_t=x\dfrac{S_t^0 Z_t^{\hat{\lambda}}}{D_t^{\hat{\nu}}}$应用 Itô 公式以及文献[28,式(4.5)],有

$$d\hat{X}_t=\hat{X}_{t-}\Big(-\theta_t^{\hat{\nu}}dW_t+\frac{\hat{\lambda}_t-\hat{\nu}_t}{\hat{\nu}_t}dM_t+$$
$$\Big((\theta_t^{\hat{\nu}})^2+\hat{\nu}_t-\hat{\lambda}_t+r_t+\lambda^0\frac{\hat{\lambda}_t-\hat{\nu}_t}{\hat{\nu}_t}\Big)dt\Big).$$

又根据财富演变过程的随机微分方程有

$$d\hat{X}_t=\hat{X}_{t-}(\sigma(Y_t)\pi_t dW_t+(b(Y_t)-r(Y_t))\pi_t+$$
$$r(Y_t)dt+\pi_t\delta(Y_t)dN_t)=$$
$$\hat{X}_{t-}(\sigma(Y_t)\pi_t dW_t+\pi_t\delta(Y_t)dM_t+$$
$$((b(Y_t)-r(Y_t)+\lambda^0\delta(Y_t))\pi_t+r(Y_t))dt).$$

通过比较 dW_t 和 dM_t 项,故可推出 $\hat{\pi}_t$.　□

3　结论

本文是在模型不确定框架下,利用稳健偏好理论和对偶理论处理了在没有消费的情形下的最优投资决策问题,本文讨论的模型不同于 Wittmuss[28] 的模型.我们讨论的悲观投资者效用函数与消费无关,只与终端财富有关,这在某一的特定时期,不考虑消费,也是符合市场实际的,因此本文的结论具有一定的理论意义和实际应用价值.基于 Knight 不确定环境下,利用稳健偏好及对偶理论处理带动态消费流和终端财富效用函数的最优消费和投资策略问题则有待进一步研究.

参考文献(References)

[1] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case[J]. Review of Economics and Statistics, 1969, 51: 247-257.

[2] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3: 373-413.

[3] Knight F H. Risk, Uncertainty and Profit [M]. Boston: Houghton Mifflin, 1921.

[4] Gilboa I, Schmeidler D. Maxim expected utility with non-unique prior [J]. Journal of Mathematical Economics, 1989, 18:141-153.

[5] Kramkov D, Schachermayer W. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets[J]. Annals of Applied Probability, 1999, 9(3): 904-950.

[6] Cvitanic J, Schachermayer W, Wang H. Utility maximization in incomplete markets with random endowment[J]. Finance and Stochastics, 2001, 5(2): 259-272.

[7] Karatzas I, Zitkovic G. Optimal consumption from

investment and random endowment in incomplete semimartingale markets [J]. Annals of Probability, 2003, 31(4): 1 821-1 858.

[8] Hugonnier J, Kramkov D. Optimal investment with random endowments in incomplete markets[J]. Annals of Applied Probability, 2004, 14(2): 845-864.

[9] Schied A. Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: A duality approach [J]. Finance and Stochastics, 2007, 11(1): 107-129.

[10] Schied A, Wu C T. Duality theory for optimal investments under model uncertainty [J]. Statistics Decisions, 2005, 23(3): 199-217.

[11] Gundel A. Robust utility maximization for complete and incomplete market models [J]. Finance and Stochastics, 2005, 9(2): 151-176.

[12] Duffie D, Zariphopoulou T. Optimal investment with undiversifiable income risk[J]. Mathematical Finance, 1993, 3:135-148.

[13] Quenez M C. Optimal portfolio in a multiple-priors model[J]. Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications Ⅳ, Progress in Probability, 2004, 58: 291-321.

[14] Becherer D. Bounded solutions to backward SDE's with jumps for utility optimization and indifference hedging [J]. Annals of Applied Probability, 2006, 16(4): 2 027-2 054.

[15] Muller M. Market completion and robust utility maximization [D]. Berlin: Humboldt University, 2005.

[16] Bauerle N, Rieder U. Portfolio optimization with jumps and unobservable intensity process [J]. Mathematical Finance, 2007, 2(17): 205-224.

[17] Hernandez-Hernandez D, Schied A. A control approach to robust utility maximization with logarithmic utility and time consistent penalties [J]. Stochastic Processes and Applications, 2007, 117(8): 980-1 000.

[18] Fei W Y. Optimal portfolio choice based on α-MEU under ambiguity [J]. Stochastic Models, 2009, 25: 455-482.

[19] Fei W Y. Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation [J]. Information Sciences, 2007, 177: 5 178-5 190.

[20] Fei Weiyin, Li Shujuan. Study on optimal consumption and portfolio with inflation under Knightian uncertainty [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2012, 29(6): 799-806.
费为银，李淑娟. Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究[J]. 工程数学学报，2012，29(6)：799-806.

[21] Yang Zhaojun. Maximizing the expected utility from terminal wealth under the case of partial information [J]. Control Theory & Applications, 2006, 20(2): 11-13.
杨招军. 部分信息下极大化终止时刻期望效用[J]. 控制理论与应用，2006，20(2)：11-13.

[22] Xia Dengfeng, Fei Weiyin, Liu Hongjian. On study of optimal investment with ambiguity and anticipation under fluctuated discounting rate[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2010, 26(3): 270-276.
夏登峰，费为银，刘宏建. 变折现率下带含糊和预期的投资问题研究[J]. 应用概率统计，2010，26(3)：270-276.

[23] Han Liyan, Pan Min. Knightian uncertainty based option pricing with stochastic volatility [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2012, 32(6): 1 175-1 183.
韩立岩，泮敏. 基于奈特不确定性随机波动率期权定价[J]. 系统工程理论与实践，2012，32(6)：1 175-1 183.

[24] Li Juan, Fei Weiyin, Shi Xueqin, et al. Optimal trading strategy under disordered asset return and Knightian uncertainty [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2013, 28(1): 13-22.
李娟，费为银，石学芹，等. 奈特不确定下资产收益率发生紊乱的最优投资策略[J]. 高校应用数学学报，2013，28(1)：13-22.

[25] Fei Weiyin, Chen Chao, Liang Yong. Optimal consumption-portfolio and retirement problem with disutility under Knightian Uncertainty [J]. Chinese Journal of applied probability and statistics, 2013, 29(1): 53-63.
费为银，陈超，梁勇. Knight 不确定下考虑负效用的消费和投资问题研究[J]. 应用概率统计，2013，29(1)：53-63.

[26] Fei W Y, Fei C. Optimal stochastic control and optimal consumption and portfolio with G-Brownian motion[DB/OL]. arXiv: 1309.0209v1, 2013.

[27] Wittmuss W. Robust optimization of consumption with random endowment[J]. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2008, 80(5): 459-475.

[28] Wittmuss W. Optimization of dynamic consumption streams under model uncertainty [D]. Germany: Berlin University of Technology, 2010.