文章编号:0253-2778(2016)11-0912-07

损失厌恶假设下带有消费和终端收益的投资组合

潘 晨[1],张曙光[2]

(1.中国科学技术大学数学科学学院,安徽合肥 230026;2.中国科学技术大学统计与金融系,安徽合肥 230026)

摘要:考虑前景理论框架下的带有消费和终端收益的连续时间投资组合问题.这里假设终端效用具有损失厌恶的性质,并且抛弃 Inada 条件,而限定效用函数具有一定的正则性.首先,考虑参考点依赖于财富值的问题,得到相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程.然后,假设终端效用依赖于收益过程,并建立一个把参考点作为控制的一部分的新模型.这使得随机控制问题变成了非 Markov 的.为了处理此问题,借用亚式期权定价中的方法将问题转换成 Markov 型问题.最后,得到一个奇异 Markov 控制问题,并得到相应的 HJB 型变分不等式.

关键词:HJB 方程;损失厌恶;参考点;S 型效用函数;随机控制

中图分类号:O231.3 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.11.006

2010 Mathematics Subject Classification: 49K20;91B16;93E20

引用格式:潘晨,张曙光. 损失厌恶假设下带有消费和终端收益的投资组合[J]. 中国科学技术大学学报,2016,46(11):912-918,953.
PAN Chen, ZHANG Shuguang. Portfolio with consumption and terminal gains under loss aversion[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016,46(11):912-918,953.

Portfolio with consumption and terminal gains under loss aversion

PAN Chen[1], ZHANG Shuguang[2]

(1. *School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*;
2. *Department of Statistics and Finance, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

Abstract: A continuous-time portfolio selection problem with consumption and terminal gains was considered in the framework of prospect theory. The Inada conditions for the utility functions were discarded by assuming a regularity condition on the terminal utility. First, the problem with the reference point depending on the wealth was considered, and the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation was derived. Then, by assuming that the terminal utility relies on the gains process, a new model with the reference point as part of the control was established. This makes the optimal control problem non-Markovian. To deal with this problem, the idea for transforming the Asian option pricing problem into a Markov problem was used. A singular Markov control problem was yielded, and then acorresponding HJB variational inequality was derived.

Key words: HJB equation; loss aversion; reference point; S-shaped utility functions; stochastic control

---

收稿日期:2015-10-08;**修回日期**:2016-04-10

作者简介:潘晨,男,1987年生,博士. 研究方向:金融工程. E-mail: panchen@mail.ustc.edu.cn

通讯作者:张曙光,博士/教授. E-mail: sgzhang@ustc.edu.cn

0　引言

数学已经成为投资管理中最重要的工具，随机分析和随机最优控制成为处理投资组合选择问题的基本方法. 而近 30 年来，金融学中最重要的革命是开始于 20 世纪 80 年代的行为金融学. 行为金融学并不像新古典金融学那样假设投资者是理性的，而是认为投资者的决策可能受到其自身的情感和心理因素的影响. 但是，行为金融学问题带来的数学上的极大难度，使得在连续时间设定下的相关模型极其稀少[16].

Kahneman 等[7]引入了前景理论(prospect theory，PT). PT 是行为金融的一个重要组成部分，它后来被 Tversky 等[14]发展为累积前景理论(cumulative prospect theory，CPT). 在前景理论框架下，关于资产分配有 3 个主要假设：第一，价值是根据参考点由收益和损失来决定的；第二，效用函数对于收益是凹的，对于损失是凸的，从而被称作 S 型函数，并且对于损失的斜率比对于收益的斜率更大(即损失厌恶)；第三，概率经过高估小概率和低估大概率被扭曲. 而且概率的扭曲是造成数学处理上困难的主要原因，因为在不可加的概率下，通常是没有时间一致性的，从而导致了动态规划方法和鞅方法这些用来处理新古典金融学中的问题的强有力工具失效. Jin 等[6]在 CPT 理论框架下，发展了用来系统解决连续时间投资组合问题的新理论. 为了处理 S 型效用函数，他们把原来的问题分解成两个子问题——收益部分问题和损失部分问题，为克服扭曲概率带来的困难，他们使用了 Choquet 最优化的方法. Zhang 等[18]推广了文献[6]的方法来处理带有损失控制的投资组合问题，即，带有额外上边界的 Choquet 最小化问题. Cheung[4]在 CPT 理论框架下考虑了带有消费和终端财富投资组合问题，他利用文献[8]中的分解技巧将投资者的财富分成了两个部分，使得其中一个部分用来最优化仅来自于消费部分的效用，另一部分投资于市场用来最优化仅来自于终端财富的效用.

然而，从数学的角度来看，不考虑概率扭曲这一因素，相应的投资组合问题仍然是有趣的. Berkelaar 等[2]得到了两个带有损失厌恶的不同效用函数的最优投资策略，并引入参考点动态更新法则分析了其对最优解的影响. 文献[1]考虑了一个多时期模型，假设一个效用函数不仅依赖于收益过程和风险资产的值，而且还依赖于收益的历史，并且其中参考点是风险资产和无风险利率的函数. 本文中，我们将假设参考点依据财富过程动态地更新，这样也符合一个投资者会随着其财富水平的变化而对收益和损失具有不同的认知. Mi 等[11]采用了鞅方法解决了一个非完备市场中带有损失厌恶的投资组合问题. 张松[17]研究了一个将效用函数的 Inada 条件替换成正则性条件的投资组合问题. 而现实中，一个投资者对于金融市场中的小收益或损失是不敏感的. 并且在 PT 理论框架中，投资者的效用函数依赖于收益或损失，因此 Inada 条件是不恰当的. 本文将抛弃加在消费效用和终端收益的效用函数上的 Inada 条件，而假设它们有足够的正则性. 因此，我们可以利用动态规划的方法来处理投资组合问题，从而尝试解决文献[6]中提到的把参考点作为整个决策的一部分的问题.

1　模型

我们在一个有限投资期限内的完备标准金融市场中考虑投资组合问题. 给定时间 $T>0$ 为该投资期限，令无风险资产的价格过程为

$$\mathrm{d}S_0(t)=rS_0(t)\mathrm{d}t,\ t\in[0,T],$$

其中，$r>0$ 是常数. 设风险资产(股票)的价格过程满足如下的随机微分方程(stochastic differential equations，SDE)：

$$\mathrm{d}S_n(t)=S_n(t)\Big[b_n(t)\mathrm{d}t+\sum_{d=1}^{N}\sigma_{nd}(t)\mathrm{d}W^{(d)}(t)\Big],\quad t\in[0,T],$$

或者

$$S_n(t)=S_n(0)\exp\Big\{\int_0^t\Big[b_n(u)-\frac{1}{2}\sum_{d=1}^{N}\sigma_{nd}{}^2(u)\Big]\mathrm{d}u+\sum_{d=1}^{N}\int_0^t\sigma_{nd}(u)\mathrm{d}W^{(d)}(u)\Big\},\quad n=1,\cdots,N,t\in[0,T],$$

其中，$b:[0,T]\to\mathbb{R}^N$，$\sigma:[0,T]\to\mathbb{R}^{N\times N}$都是 Lipschitz 连续的确定性函数，而且 σ^{-1} 也是有界的.

为方便起见，作如下的记号：

① 风险的市场价格：

$$\theta(t)\triangleq\sigma^{-1}(t)[b(t)-r\mathbf{1}],\mathbf{1}=(1,\cdots,1)'\in\mathbb{R}^N,$$

② 指数局部鞅：

$$Z_0(t)\triangleq\exp\Big\{-\int_0^t\theta'(u)\mathrm{d}W(u)-\frac{1}{2}\int_0^t\|\theta(u)\|^2\mathrm{d}u\Big\},$$

③ 状态价格的密度过程：

$$H_0(t)\triangleq\frac{Z_0(t)}{S_0(t)}.$$

考虑一个具有消费速率过程 $c(\cdot)\geqslant 0$ 的投资者，且 c 是一个满足下列条件的适应过程：

$$\int_0^T c(t)\mathrm{d}t<\infty,\ \text{a.s.}.$$

假设初始禀赋为 $x_0\geqslant 0$，则累计收入过程为

$$\Gamma(t)\triangleq x_0-\int_0^t c(u)\mathrm{d}u,\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{1}$$

进一步，假设投资组合过程 $(\pi_0(\cdot),\pi(\cdot))$ 是自融资的（或者是 $\Gamma(\cdot)$ 融资的，i.e.，$1=\pi_0(t)+\pi(t)'\mathbf{1}$），则投资者的财富过程 $X(\cdot)$ 由下面方程给出：

$$\mathrm{d}X(t)=\mathrm{d}\Gamma(t)+rX(t)\mathrm{d}t+\pi'(t)[b(t)-r\mathbf{1}]X(t)\mathrm{d}t+\pi'(t)\sigma(t)X(t)\mathrm{d}W(t) \tag{2}$$

或

$$X(t)=x_0\mathrm{e}^{rt}Z_t-\int_0^t \mathrm{e}^{r(t-u)}c(u)\frac{Z_t}{Z_u}\mathrm{d}u,0\leqslant t\leqslant T \tag{3}$$

式中，

$$Z_t=\exp\left\{\int_0^t\pi'(u)\sigma(u)\mathrm{d}W(u)+\int_0^t\left[\pi'(u)\sigma(u)\theta(u)-\frac{1}{2}\mid\pi'(u)\sigma(u)\mid^2\right]\mathrm{d}u\right\}.$$

记控制集为

$$\mathscr{A}_0=\{(c,\pi):c:[0,T]\times\Omega\to[0,\infty)\text{ 是适应过程，并满足}\int_0^T c(u)\mathrm{d}u<\infty,\text{a.s.},\ \pi:[0,T]\times\Omega\to[0,1]^N\text{ 是循序可测过程}\},$$

如果过程对 $(c,\pi)\in\mathscr{A}_0$ 在 $x_0\geqslant 0$ 处是允许的(admissible)，则记作 $(c,\pi)\in\mathscr{A}(x_0)$，当相应于 x_0，c，π 的财富过程 $X^{x_0,c,\pi}(\cdot)$ 满足条件 $X^{x_0,c,\pi}(t)\geqslant 0$，a.s. $0\leqslant t\leqslant T$ 时. 对于 $x_0<0$，令 $\mathscr{A}(x_0)=\emptyset$.

根据文献[8]，控制对 (c,π) 是允许的，当且仅当下列预算限制条件满足：

$$E\left[\int_0^T H_0(u)c(u)\mathrm{d}u+H_0(T)X(T)\right]\leqslant x_0 \tag{4}$$

假设 1 假设有函数 $U_1:[0,T]\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ 和 $U_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足条件：

① U_1 有界一致连续. 对 $\forall t\in[0,T]$，$U_1(t,\cdot)$ 是非减凹的 Lipschtiz 连续函数. 并且

$$\lim_{x\to\infty}U'_1(t,x)=0.$$

② U_2 是 Lipschtiz 连续的，具有连续的一阶导数，并且 $U_2(x)=U_2^+(x^+)-U_2^-(x^-)$，其中 U_2^+，U_2^-：$[0,\infty)\to[0,\infty)$ 都是凹的，$U_2^+(0)=U_2^-(0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(U_2^+)'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(U_2^-)'(x)=0$.

注 1 注意到我们并没有假设 Inada 条件，i.e.，$(U_2^+)'(0+)=+\infty$ 和 $U_2{}^-(0+)=-\infty$，反之，假设 U_2 在 $x=0$ 处是连续可微的，这将有利于处理微分方程. 相应的解释，读者可以参考文献[17，第四章]. 一个简单的原因就是，在展望理论中，投资者根据他的收益和损失来做决策，而不是他的总财富，这使得他对于参考点附近的小的改变并不敏感.

现在来看我们将要研究的主要问题.

问题 1 由于一些技术上的原因，我们假设 $c(t)=\gamma(t)X(t)$，其中 $\gamma:[0,T]\times\Omega\to[0,\infty)$ 是一个循序可测过程，则 c 自然是允许控制，并仍记作过程对 $(\gamma,\pi)\in\mathscr{A}_0$. 目的是寻找如下控制问题的最优对 $(\gamma,\pi)\in\mathscr{A}(x_0)$：

$$V(x_0)\triangleq\sup_{(\gamma,\pi)\in\mathscr{A}(x_0)}E\left[\int_0^T U_1(t,\gamma(t)X(t))\mathrm{d}t+U_2(X(T)-\Theta(X(T)))\right] \tag{5}$$

通过最大化期望消费效用和终端财富效用的和，其中连续函数 $\Theta:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ 是参考点，它满足下列条件：①（线性增长性）：$0\leqslant\Theta(x)\leqslant L(1+|x|)$ 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 和某个常数 $L>0$. ②（导数的有界性）：$|\Theta'(x)|<1$ 对任意的 $x\in[0,\infty)$.

由于投资者根据收益和损失来做决策，我们考虑了另一个问题，虽然类似于前一个问题，但是在 PT 理论框架下更合理. 根据文献[8]，我们定义收益过程：

$$G(t)\triangleq X(t)-\Gamma(t),\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{6}$$

问题 2 目标是寻找下列控制问题的最优对 $(c,\pi)\in\mathscr{A}(x_0)$：

$$V(x_0)\triangleq\sup_{(c,\pi)\in\mathscr{A}(x_0)}E\left[\int_0^T U_1(t,c(t))\mathrm{d}t+U_2(G(T))\right] \tag{7}$$

注 2 由于收益过程 $\{G(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 由式(6)给出，并注意到表达式(1)，可知这是一个新的行为投资组合问题，它在连续时间情形下将参考点作为控制的一部分（见文献[6，注 2.2]）.

2 主要结果

由于 U_2 的非凸非凹性，并不能根据文献[8]或

[9]中的方法研究相应问题的解. 在此利用纯随机控制的方法来对问题 1 和 2 进行求解. 我们给出相应的动态规划方程，对于问题 1，该方程是一个 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程，而对于问题 2，动态规划方程是一个 HJB 变分不等式.

2.1 问题 1 的求解

由于消费速率为 $c(t)=\gamma(t)X(t)$，其中，$\gamma:[0,T]\times\Omega\to[0,\infty)$. 由 SDE 的比较定理，可知 $X(t)\geqslant 0$ a. s. 对每个 $t\in[0,T]$成立，如果 $X(0)\geqslant 0$. 为了使得值函数 v 是连续的，我们需要作如下额外的假设.

假设 2 假设存在一个正常数 M 使得 $\gamma(t)\leqslant M$ a. s. 对所有的 $t\in[0,T]$成立. 并令

$$\mathscr{A}_M \triangleq \{(\gamma,\pi)\in\mathscr{A}_0: 0\leqslant\gamma\leqslant M\}.$$

注 3 以上假设的一个解释为：考虑文献[8]中的投资组合问题，若假设效用函数 U_1 和 U_2 都是严格凹的满足 Inada 条件，i. e.，$\frac{\partial U_1}{\partial c}(t,0+)=+\infty$ 和 $\frac{\partial U_1}{\partial c}(t,c)\to 0$ 当 $c\to+\infty$，则可以找到一个最优消费速率 $\gamma(t,x)x=\frac{1}{x}I_1\left(t,x\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\right)$，其中 $I_1(t,\cdot)$ 是 $\frac{\partial U_1}{\partial c}(t,\cdot)$ 的反函数. 注意到 $I_1(t,0+)=+\infty$ 和 $I_1(t,y)\to 0$ 当 $y\to+\infty$ 时. 假设 γ 是有界的，等价于投资者将不会在其财富小于某个常数 $\gamma_0>0$ 时进行消费，并且当财富足够大时会按照其当前财富的一定比例进行消费.

命题 2.1 值函数 $v\in C([0,T]\times[0,\infty))$.

为证明 v 的连续性，我们需要如下引理.

引理 2.2 任给 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$，$x,y\in[0,\infty)$ 和 $(\gamma,\pi)\in\mathscr{A}_M$，则有

$$E[|X^{s,x}(u)-X^{t,y}(u)|^2]\leqslant C_M(x^2\wedge y^2)|s-t|+\overline{C}|x-y|^2,\quad u\in[t,T],$$

$$E[|X^{s,x}(u)|]\leqslant\sqrt{\overline{C}}x,\ u\in[t,T],$$

其中，$C_M>0$ 是依赖于 M 和 T 的常数，而常数 $\overline{C}>0$ 依赖于 T 但是独立于 M.

证明 不失一般性，设 $x\leqslant y$. 注意到

$$|X^{s,x}(u)-X^{t,y}(u)|\leqslant |X^{s,x}(u)-X^{t,x}(u)|+|X^{t,x}(u)-X^{t,y}(u)|.$$

由 X 所满足的 SDE，对 $u\in[t,T]$，有

$$X^{t,x}(u)-X^{t,y}(u)=x-y+\int_t^u[B(\theta,\pi(\theta))-\gamma(\theta)][X^{t,x}(\theta)-X^{t,y}(\theta)]\mathrm{d}\theta+\int_t^u\Sigma(\theta,\pi(\theta))[X^{t,x}(\theta)-X^{t,y}(\theta)]\mathrm{d}W(\theta),$$

其中，$B(t,\pi)=r+\pi'(b(t)-r\mathbf{1})$ 和 $\Sigma(t,\pi)=\pi'\sigma(t)$，于是解此线性 SDE 得

$$\begin{aligned}&|X^{t,x}(u)-X^{t,y}(u)|^2=\\&|x-y|^2\exp\left\{2\int_t^u\left[B(\theta,\pi(\theta))-\gamma(\theta)-\frac{1}{2}\Sigma^2(\theta,\pi)\right]\mathrm{d}\theta+2\int_t^u\Sigma(\theta,\pi(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right\}\leqslant\\&|x-y|^2\exp\left\{\int_t^u[2\overline{B}+\overline{\Sigma}^2-2\Sigma^2(\theta,\pi)]\mathrm{d}\theta+2\int_t^u\Sigma(\theta,\pi(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right\},\end{aligned}$$

然后有

$$E[|X^{t,x}(u)-X^{t,y}(u)|^2]\leqslant|x-y|^2\exp\{(2\overline{B}+\overline{\Sigma}^2)(u-t)\},$$

其中，$\overline{B}$ 和 $\overline{\Sigma}$ 分别为过程 $B(t,\pi)$ 和 $\Sigma(t,\pi)$ 的界. 可以取 $\overline{C}=\mathrm{e}^{2(\overline{B}^2+\overline{\Sigma}^2)T}$.

取 $t=s$，$y=0$，则第二个不等式由以上估计可得.

不失一般性，假设 $s\leqslant t$，则

$$\begin{aligned}&|X^{s,x}(u)-X^{t,x}(u)|=\\&\left|\int_s^t[B(\theta,\pi(\theta))-\gamma(\theta)]X^{s,x}(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_t^u[B(\theta,\pi(\theta))-\gamma(\theta)](X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta))\mathrm{d}\theta+\int_s^t\Sigma(\theta,\pi(\theta))X^{s,x}(\theta)\mathrm{d}W(\theta)+\int_t^u\Sigma(\theta,\pi(\theta))(X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right|\leqslant\\&\int_s^t|B(\theta,\pi(\theta))-\gamma(\theta)|X^{s,x}(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_t^u|B(\theta,\pi(\theta))-\gamma(\theta)||X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta)|\mathrm{d}\theta+\\&\left|\int_s^t\Sigma(\theta,\pi(\theta))X^{s,x}(\theta)\mathrm{d}W(\theta)\right|+\left|\int_t^u\Sigma(\theta,\pi(\theta))[X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta))]\mathrm{d}W(\theta)\right|\leqslant\\&(\overline{B}+M)\int_s^tX^{s,x}(\theta)\mathrm{d}\theta+(\overline{B}+M)\int_t^u|X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta)|\mathrm{d}\theta+\\&\left|\int_s^t\Sigma(\theta,\pi(\theta))X^{s,x}(\theta)\mathrm{d}W(\theta)\right|+\left|\int_t^u\Sigma(\theta,\pi(\theta))[X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta))]\mathrm{d}W(\theta)\right|,\end{aligned}$$

因而，

$$
\begin{aligned}
&E[\,|X^{s,x}(u)-X^{t,x}(u)|^2\,]\leqslant\\
&2(\overline{B}+M)^2\int_s^t E[(X^{s,x}(\theta))^2]\mathrm{d}\theta+\\
&2(\overline{B}+M)^2\int_t^u E[\,|X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta)|^2\,]\mathrm{d}\theta+\\
&2\int_s^t E[\Sigma(\theta,\pi(\theta))^2(X^{s,x}(\theta))^2]\mathrm{d}\theta+\\
&2\int_t^u E[\Sigma(\theta,\pi(\theta))^2[X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta))]^2]\mathrm{d}\theta\leqslant\\
&2[(\overline{B}+M)^2+\overline{\Sigma}^2]\int_s^t E[(X^{s,x}(\theta))^2]\mathrm{d}\theta+\\
&2[(\overline{B}+M)^2+\overline{\Sigma}^2]\int_t^u E[\,|X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta)|^2\,]\mathrm{d}\theta\leqslant\\
&Cx^2\,|s-t|+\int_t^u E[\,|X^{s,x}(\theta)-X^{t,x}(\theta)|^2\,]\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

利用 Gronwall 不等式,可得

$$E[\,|X^{s,x}(u)-X^{t,x}(u)|^2\,]\leqslant C_M x^2\,|s-t|.\quad\square$$

命题 2.1 的证明 对任给的 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, $x,y\in[0,\infty)$和$(\gamma,\pi)\in\mathscr{A}_M$,由 $U_1(t,\cdot)$和 U_2 的 Lipschitz 连续性,得

$$
\begin{aligned}
&|v(s,x)-v(t,y)|\leqslant\\
&\quad\sup_{\gamma,\pi}E\Big[\int_s^t U_1(u,\gamma(u)X^{s,x}(u))\mathrm{d}u+\\
&\quad\int_t^T\gamma(u)L\,|X^{s,x}(u)-X^{t,x}(u)|\,\mathrm{d}u\Big]+\\
&\quad\sup_{\gamma,\pi}E[L\,|X^{s,x}(T)-X^{t,y}(T)|\,]\leqslant\\
&\quad C\,|t-s|+TMLC_M(x\wedge y)\sqrt{|s-t|}+\\
&\quad L[C_M(x\wedge y)\sqrt{|s-t|}+\overline{C}\,|x-y|\,],
\end{aligned}
$$

于是有 $v\in C([0,T]\times(0,\infty))$. $\square$

基于假设 1 和 Θ 满足的条件①与②,可以证明问题 1 中的值函数 v 具有如下命题中性质：

命题 2.3 问题 1 中的值函数 v 是局部有界的,且对某个常数 $K>0$ 满足

$$|v(s,x)|\leqslant K(1+|x|),\quad \forall(s,x)\in[0,T]\times(0,\infty).$$

进一步,v 关于 x 是严格增的.

参考文献[5,第Ⅳ.7 节],[12,第 3.3 节]和[15,第 4.3 节],可证如下定理：

定理 2.4(问题 1 的动态规划原理) 对于任给的$(s,x)\in[0,T)\times(0,\infty)$和 $h\geqslant0$ 满足 $s+h\in[0,T)$,有

$$v(s,x)=\sup_{\gamma,\pi}E\Big[\int_s^{s+h}U_1(t,\gamma(t)X(t))\mathrm{d}t+v(s+h,X(s+h))\Big]\tag{8}$$

于是函数 v 满足动态规划方程：

定理 2.5 问题 1 中值函数 v 是如下非线性方程的黏性解：

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sup_{(\gamma,\pi)\in[0,M]\times[0,1]}\{\mathscr{L}^{\gamma,\pi}v(t,x)+U_1(t,\gamma x)\}=0,\quad (t,x)\in[0,T)\times(0,\infty),\tag{9}$$

式中,

$$\mathscr{L}^{\gamma,\pi}\triangleq\frac{1}{2}\|\pi'\sigma(t)\|^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+[r+\pi'(b(t)-r\mathbf{1})-\gamma]x\frac{\partial}{\partial x}.$$

而且,v 满足初边值条件：

$$\left.\begin{aligned}&v(T,x)=U_2(x-\Theta(x)),\ x\in(0,\infty),\\&v(t,0)=U_2(-\Theta(0)),\ t\in[0,T]\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

考虑以上 PDE 的偶延拓,并定义

$$
\begin{aligned}
&\tilde{B}(t,x,\pi,\gamma)=[r+\pi'(b(t)-r\mathbf{1})-\gamma]\cdot|x|,\\
&\tilde{\Sigma}(t,x,\pi)=\pi'\sigma(t)\,|x|,\\
&\tilde{f}(t,x,\gamma)=U_1(t,\gamma\,|x|),\\
&\tilde{\phi}(x)=U_2(|x|-\Theta(|x|)),\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R},
\end{aligned}
$$

则,函数 $\tilde{v}(t,x)=v(t,|x|)$满足以下全空间上的 HJB 方程的终值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\partial_t\tilde{v}(t,x)+\sup_{\gamma,\pi}\Big\{\frac{1}{2}(\tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma}^{\mathrm{T}})(t,x,\pi)\partial_x^2\tilde{v}(t,x)+\\&\tilde{B}(t,x,\pi,\gamma)\partial_x\tilde{v}(t,x)+\tilde{f}(t,x,\gamma)\Big\}=0,\\&(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R},\\&\tilde{v}(T,x)=\tilde{\phi}(x),\ x\in\mathbb{R}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

注意到 $\tilde{\Sigma}$ 和 $\tilde{B}$ 都是关于(t,x)一致局部 Lipschitz 连续的,且由于 $\gamma\in[0,M]$,$\tilde{f}$ 关于(t,x)一致连续,根据假设(1),而且 $\tilde{\phi}$ 具有线性增长.那么,类似于文献[12](或者[3])中的证明,可以得到以上 HJB 方程黏性解的唯一性.

定理 2.6 假设 $v_1,v_2\in C([0,T]\times\mathbb{R})$为 HJB 方程(11)的两个解,且 $v_1(T,x)=v_2(T,x)=\tilde{\phi}(x)$.则在$[0,T]\times\mathbb{R}$上,$v_1=v_2$.

因此,动态规划方程(9)具有唯一的黏性解.

注 4 终端函数的非凸非凹性导致了值函数的

非凸非凹性,从而无法利用一阶条件将 HJB 方程转化为更简单形式的偏微分方程. 虽然经典的情形中, Inada 条件使得在 HARA 效用函数的假设下,利用效用函数的凸对偶,可以得到相应的线性偏微分方程,从而问题变得可解(可参见文献[9]).

2.2　问题 2 的求解

本节中,我们需要如下假设.

假设 3　① 漂移项 b 和波动率 σ 都是常数, i. e. ,$b(t)\equiv b$ 和 $\sigma(t)\equiv\sigma$,其中,$b\in\mathbb{R}^d$ 和 $\sigma\in L(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$为常数.

② 终端财富效用函数 U_2 是有界的.

注 5　这里有一个例子 $U_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足假设 1 和假设 3:取

$$U_2(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x\geqslant 0;\\ \dfrac{\alpha}{\beta}(\mathrm{e}^{\beta x}-1), & x<0.\end{cases}$$

其中,$0<\alpha\leqslant\beta$.

注意到在最优化问题中,在成本泛函中出现了关于控制过程的积分,我们期望这是个奇异控制问题. 初步观察,该问题并不是 Markov 的,然而利用处理亚式期权的方法[13,第7.5节],我们可以将问题转化成 Markov 问题. 为此,定义一个新的过程 $Y(t)=\Gamma(t)\leqslant x_0$,则原问题变化成一个 Markov 控制,即

$$(\gamma(t),\pi(t))=(\gamma(t,X(t),Y(t)),\pi(t,X(t),Y(t))).$$

现在,受控系统变为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\end{pmatrix}=\\&\qquad\begin{pmatrix}rX(t)+[\pi'(t)(b-r\mathbf{1})-\gamma(t)]X(t)\\-\gamma(t)X(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t+\\&\qquad\begin{pmatrix}\pi'(t)\sigma X(t)\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathrm{d}W(t),\\&\begin{pmatrix}X(0)\\Y(0)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\x_0\end{bmatrix},\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

式中,$\mathbf{0}=(0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^N$,它是一个二维的 Markov 过程.

考虑如下的最优化问题:

问题 2′　对以下问题寻求最优对$(\gamma,\pi)\in\mathscr{A}(x)$:

$$\begin{aligned}v(s,x,y)=\sup_{(\gamma,\pi)\in\mathscr{A}(x)}&E\Big[\int_s^T U_1(t,\gamma(t)X(t))\mathrm{d}t+\\&U_2(X(T)-Y(T))\mid X(s)=x,Y(s)=y\Big]\end{aligned}\tag{13}$$

式中,$(s,x,y)\in[0,T)\times(0,\infty)\times(-\infty,x_0]$.

命题 2.7(v 的单调性)　v 关于 x 严格单调增,关于 y 单调减.

证明　注意到,对任给的初始值$(s,x,y)\in[0,T)\times(0,\infty)\times(-\infty,x_0]$以及$(\gamma,\pi)\in\mathscr{A}_0$,则有

$$Y(u)=y-\int_s^u\gamma(\theta)X(\theta)\mathrm{d}\theta,\ s\leqslant u\leqslant T,$$

$$X(T)-Y(T)=X(T)-y+\int_s^u\gamma(\theta)X(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

由于 X 关于 x 几乎确定的严格增,且 $U_1(t,\cdot)$和 $U_2(\cdot)$都是严格增的. 因此,v 关于 x 严格增,关于 y 单调减.

我们有如下的动态规划原理:

定理 2.8(问题 2′的动态规划原理)　设$(s,x,y)\in[0,T)\times(0,\infty)\times(-\infty,x_0]$. 对于任给的停时$\theta\geqslant s$,有如下关系式:

$$\begin{aligned}v(s,x,y)=\sup_{\gamma,\pi}\ &E\Big[\int_s^{\theta\wedge T}U_1(t,\gamma(t)X(t))\mathrm{d}t+\\&v(\theta\wedge T,X(\theta\wedge T),Y(\theta\wedge T))\Big]\end{aligned}\tag{14}$$

定理 2.8 的证明可以参考文献[5,12,15].

以上最优化问题的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}(t,z,p,A)=\\&\sup_{\gamma,\pi}\Big\{\frac{1}{2}\mid\pi'\sigma\mid^2A_{11}+[r+\pi'(b-r\mathbf{1})]z_1p_1-\\&\gamma z_1p_1-\gamma z_1p_2+U_1(t,\gamma z_1)\Big\}\end{aligned}\tag{15}$$

式中,$(t,z,p,A)\in[0,T)\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}_2$. $\mathbb{S}_2$ 表示 $\mathbb{R}^{2\times 2}$中的对称矩阵集合. 注意到$c\in[0,\infty)$,则,当 $p_1+p_2<0$ 时 $\mathscr{H}$取值为∞. 因此,命题 2.7 表示该控制问题可能是奇异的. 定义

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(\mathscr{H})\triangleq\{&(t,z,p,A)\in[0,T)\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}_2;\\&H(t,z,p,A)<\infty\}\end{aligned}$$

和 $g(p)=p_1+p_2$,则 $\mathscr{H}$在定义域 $\mathrm{dom}(\mathscr{H})$中是连续的,且

$$(t,z,p,A)\in\mathrm{dom}(\mathscr{H})\Leftrightarrow(p)\geqslant 0.$$

由于 U_1 和 U_2 都是有界的,v 在$[0,T)\times(0,\infty)\times(-\infty,x_0]$中也是有界的,根据文献[12,定理 4.3.1],则可以得到动态规划方程如下:

定理 2.9(问题 2′的动态规划方程)　式(13)中给定的函数 v 是如下 HJB 变分不等式的一个黏性解,

$$\begin{aligned}&\min\Big\{-\frac{\partial}{\partial t}v(t,z)-\mathscr{H}(t,z,D_zv,D_z^2v),g(D_zv)\Big\}=0,\\&\qquad(t,z)\in[0,T)\times(0,\infty)\times(-\infty,x_0]\end{aligned}\tag{16}$$

式中，$z=(x,y)$.

v 满足如下边界条件：

$$\left.\begin{aligned} & v(T,x,y)=U_2(x-y), \\ & \qquad (x,y)\in(0,\infty)\times(-\infty,x_0], \\ & v(t,0,y)=U_2(-y), \\ & \qquad (t,y)\in[0,T)\times(-\infty,x_0] \end{aligned}\right\} \tag{BC}$$

可见 v 关于 y 是 Lipschitz 连续函数. 但由于 Hamilton 函数可能是奇异的，v 在 T 处可能是不连续的. 为陈述下列结果，需要定义 v 在$[0,\infty)\times(-\infty,x_0]$中的上(下)半连续包络：

① v 的上半连续(USC)包络 v^*：$v^*(t,z)\triangleq \varliminf_{\tilde{z}\to z} \sup v(t,\tilde{z}),t\in[0,T]$；

② v 的下半连续(LSC)包络 v_*：$v_*(t,z)\triangleq \varliminf_{\tilde{z}\to z} \inf v(t,\tilde{z}),t\in[0,T]$.

定理 2.10 $v(T,\cdot)$的上半连续包络 $v^*(T,\cdot)$是如下变分不等式的下解：

$$\min\{v^*(T,x,y)-U_2(x-y),g(Dv^*(T,x,y))\}=0,$$
$$\text{在}[0,\infty)\times(-\infty,x_0]\text{上}；$$

而 $v(T,\cdot)$的下半连续包络 $v_*(T,\cdot)$是如下变分不等式的上解：

$$\min\{v_*(T,x,y)-U_2(x-y),g(Dv_*(T,x,y))\}=0,$$
$$\text{在}[0,\infty)\times(-\infty,x_0]\text{上}.$$

3 结论

我们考虑了损失厌恶下两类带有消费和终端收益的投资组合选择问题. 一个假设了参考点是依赖财富过程的函数，另一个假设收益过程如文献[8]所定义(见式(6)). 然后，我们利用随机控制的方法得到相应的最优化问题的值函数分别是 HJB 方程和 HJB 型变分不等式的黏性解. 其中在第二个问题中，我们将参考点的动态更新作为决策本身的一部分，这是文献[6]中的一个未解决的公开问题，我们在特殊系数条件下，将问题转化成一个完全非线性的变分不等式，提供了一个解决方向.

由于我们仅仅得到了值函数所满足的偏微分方程，而且方程是完全非线性的，将来的工作将集中在设计相应的数值计算方法来求解这些偏微分方程. 虽然从目前来看这并不容易. 已有的结果主要是针对非奇异的随机控制问题(参见经典文献[10])，但是这并不适用于我们这里考虑的问题.

参考文献(References)

[1] BARBERIS N, HUANG M, SANTOS T. Prospect theory and asset prices[J]. Quarterly Journal of Economics, 2001, 116: 1-53.

[2] BERKELAAR A, KOUWENBERG R, POST T. Optimal portfolio choice under loss aversion[J]. The Review of Economics and Statistics, 2004, 86(4): 973-987.

[3] BUCKDAHN R, LI J. Stochastic differential games and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs equations[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2004, 47(1):444-475.

[4] CHEUNG H L A. Utility maximisation: Non-concave utility and non-linear expectation [D]. Oxford: Mathematical Institute, University of Oxford, 2011.

[5] FLEMING W H, SONER H M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions [M]. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 2006.

[6] JIN H, ZHOU X Y. Behavioral portfolio selection in continuous time[J]. Mathematical Finance, 2008, 18(3): 385-426.

[7] KAHNEMAN D, TVERSKY A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47: 263-290.

[8] KARATZAS I, SHREVE S E. Methods of Mathematical Finance[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[9] KARATZAS I, LEHOCZKY J P, SHREVE S E. Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon[J]. SIAM Journal of Control and Optimizaiton, 1987, 25(6): 1 557-1 586.

[10] KUSHNER H J, DUPUIS P G. Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.

[11] MI H, ZHANG S G. Continuous-time portfolio selection with loss aversion in an incomplete market [J]. Operations Research Transactions, 2012, 16(1): 1-12.

[12] PHAM H. Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications [M]. New York: Springer-Verlag, 2009.

[13] SHREVE S E. Stochastic Calculus for Finance Ⅱ: Continuous-Time Models [M]. New York: Springer, 2004.

[14] TVERSKY A, KAHNEMAN D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty [J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5: 297-323.

(下转第 953 页)