

# 基于对分区间抽样法的结构可靠性灵敏度分析

陈鹏霏<sup>1,2</sup>, 刘海芳<sup>1</sup>, 刘巧伶<sup>2</sup>

(1. 长春工业大学机电工程学院, 吉林长春 130012; 2. 吉林大学机械科学与工程学院, 吉林长春 130025)

**摘要:** 针对工程结构系统的极限状态方程通常为隐式, 且计算工作量较大的情况, 提出一种基于对分区间抽样法的结构可靠性灵敏度分析方法. 所提方法综合结构可靠性分析验算点法和对分区间抽样法思想, 先根据 Taylor 公式将初始点附近的方程线性展开, 依据梯度信息确定最优步长; 之后, 采用对分可靠度指标  $\beta$  抽样步长区间的方法来确定新的抽样点; 最后, 经过若干次迭代找出满足结构系统精度要求的设计验算点 (MPP), 计算可靠度, 并根据抽样路径信息算得各影响参数对应的灵敏度. 给出了数值算例和工程算例, 通过与以往解决隐式结构的可靠性分析方法比较, 结果显示所提方法具有收敛可靠、抽样次数少的优点, 尤其适用于分析大型复杂隐式结构系统可靠度问题.

**关键词:** Taylor 展开; 可靠度指标; 验算点; 可靠性灵敏度分析

**中图分类号:** TB114.3      **文献标识码:** A      doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.09.010

**引用格式:** Chen Pengfei, Liu Haifang, Liu Qiaoling. An analysis method for structural reliability sensitivity based on the bisection method of sampling[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015, 45(9):763-769.

陈鹏霏, 刘海芳, 刘巧伶. 基于对分区间抽样法的结构可靠性灵敏度分析[J]. 中国科学技术大学学报, 2015, 45(9):763-769.

## An analysis method for structural reliability sensitivity based on the bisection method of sampling

CHEN Pengfei<sup>1,2</sup>, LIU Haifang<sup>1</sup>, LIU Qiaoling<sup>2</sup>

(1. School of Mechatronic Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China;  
2. School of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

**Abstract:** Targeting the problem of limit state equations being often implicit and demanding a great amount of computation, an analysis method was proposed for structural reliability sensitivity based on the bisection method of sampling. Combining with the most probable point method of structure reliability analysis and the bisection method of sampling, the proposed method first linearizes the state equations near the initial point based on Taylor expansion method and determines the optimal step-length based on gradient information; then, it locates the new sampling point by means of bisect sampling step-length of reliability index  $\beta$ ; finally, by several iterations, it finds out the most probable point (MPP) that meet the accuracy requirement of the structures and system to calculate reliability and reliability sensitivity of influencing

收稿日期:2014-03-27; 修回日期:2014-12-16

基金项目:国家自然科学基金(61374138), 教育部“春晖计划”项目(Z2014133)资助.

作者简介:陈鹏霏(通讯作者),男,1980年生,博士/讲师. 研究方向:机械可靠性工程与故障预报. E-mail: chenpengfei98@163.com

parameters according to the information of the sampled path. Examples of the computation and engineering were given. A comparison with existing methods for solving implicit structure reliability problems indicated that the proposed method possesses the advantages of reliable convergence and less sampling, making it especially suitable for performing reliability analyses of large-scale complicated implicit structures and systems.

**Key words:** Taylor expansion method; reliability index; most probable point; reliability sensitivity analysis

## 0 引言

随机因素普遍地存在于工程系统当中,如实地把工程系统当作随机系统来研究是十分必要的<sup>[1]</sup>. 同时,由于工程随机系统的复杂性,其模型函数一般都具有隐式特征. 如何准确、高效地确定隐式随机系统结构可靠性以及影响因素灵敏度,一直是可靠性分析领域的研究热点之一.

目前,可靠性定量分析法主要包括解析法和随机模拟法两大类. 解析法根据极限状态方程 Taylor 级数展开式,应用一次二阶矩、二次二阶矩等方法来近似计算可靠度<sup>[2-4]</sup>. 如,均值点法(MEAN)、验算点法(FORM)和 JC 法均是目前可靠度计算中应用广泛的解析方法. 不过,解析法要求极限状态方程必须为显式,且收敛性不稳定. 例如,文献<sup>[2]</sup>指出验算点法对于有些非线性问题可能会收敛到错误的点,故存在收敛误差. 随机模拟法包括: Monte Carlo 法(CMC)、重要抽样法(MCIS)和自适应重要抽样法(MCAIS)等<sup>[5-7]</sup>. 该类方法无需构建极限状态方程,具有普遍适用性,对于高度非线性问题也非常有效. 2007 年, Richard 等<sup>[6]</sup>应用 MCIS 法,通过最小化重要抽样函数的方差,来使落入失效域的点数显著增加,从而提高抽样效率;而 Au 等<sup>[7]</sup>通过引入马尔可夫随机过程,提出了一种自适应的重要抽样法思想,能够使抽样函数参数的分布随着抽样次数的增加而改变,最终达到了有效减少抽样计算量的目的. 吕震宙等<sup>[8-9]</sup>等在发展可靠性重要抽样算法方面也获得了很多成果. 然而,目前各种改进的重要抽样法,都是通过系统在失效区域(即重要区域)内不断修正抽样密度函数,而后进行随机抽样,这样确实能够大大提高失效样本点落入失效区域,甚至验算点附近区域的概率,但是建立在随机抽样前提下的样本点抽取,终究还是难以使抽样效率大幅度地提高.

故此,本文综合了经典验算点法和对分区间法思想,提出了一种基于对分区间抽样法的结构可靠性灵敏度分析方法. 首先,在失效域内找出一一点作为

初始点,并将其转换到标准状态空间,通过(数值)试算计算该点的状态函数值、状态曲面梯度值和对应的可靠度指标  $\beta$ (即与空间原点之间的距离);并且,依据该点的梯度信息和状态函数值确定初始抽样步长  $\Delta\beta$ ;然后,根据 Taylor 公式将该点处状态方程线性展开,确定标准状态空间原点至展开后线性状态方程间最短距离的方向,在该方向上确定下一抽样点(对应可靠度指标为  $\beta + \Delta\beta$ )的具体坐标值,同样获得其状态函数值、梯度值和该点对应的可靠度指标;之后,按上述过程依次抽取样本点,直到某相邻抽样点的状态函数值符号相反时,说明真实验算点就位于上述两点之间,基于介值定理对分两点之间可靠度指标步长  $\Delta\beta$ ,抽取下一样本点;最后,将极限状态方程值符号相反的相邻两点可靠度指标步长反复减半,直到获得满足迭代精度要求的样本点,将其作为验算点. 同时,本文利用抽样路径信息,根据偏导数定义,推导了相应的可靠性灵敏度分析计算式. 通过与 Monte Carlo 法获得的可靠性灵敏度真值比较,说明本文所提方法具有较高的计算效率和精度.

## 1 正态随机空间的可靠度分析

由于很多非正态相关随机变量均可转化为正态独立的随机变量,因此本文将主要讨论相互独立的正态随机变量情况. 假设向量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  中包含有  $n$  个相互独立的正态分布随机变量,其对应的极限状态方程为

$$z = g(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

式(1)表示以  $x_1, \dots, x_n$  为坐标轴构成的正态随机空间  $\mathbf{X}$  中的一个超曲面. 将正态随机向量  $\mathbf{x}$  转换成标准正态随机向量  $\mathbf{y}$ ,有<sup>[2]</sup>

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \times \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (2)$$

式中,矩阵  $\mathbf{T}$  和向量  $\mathbf{b}$  分别为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{x_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_{x_n} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mu_{x_1}/\sigma_{x_1} \\ -\mu_{x_2}/\sigma_{x_2} \\ \vdots \\ -\mu_{x_n}/\sigma_{x_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $\mu_{x_i}$  为随机变量  $x_i$  的均值 (其中,  $i=1, 2, \dots, n$ );  $\sigma_{x_i}$  为  $x_i$  的标准差。

这里, 随机变量  $x_i$  和  $y_i$  之间满足<sup>[3]</sup>

$$F_i(x_i) = \Phi(y_i) \quad (5)$$

式中,  $F_i(\cdot)$  为基本随机变量  $x_i$  的概率分布函数;  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布函数. 由式(5)有

$$x_i = F_i^{-1}[\Phi(y_i)] \quad (6)$$

于是,  $\mathbf{Y}$  空间内结构构件的状态函数可表示为

$$\begin{aligned} z &= g(F_1^{-1}[\Phi(y_1)], F_2^{-1}[\Phi(y_2)], \dots, F_n^{-1}[\Phi(y_n)]) = \\ G(y_1, y_2, \dots, y_n) &= G(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7)$$

Haosfer 和 Lind 将可靠度指标  $\beta$  定义为: 标准正态空间  $\mathbf{Y}$  内原点到极限状态面的最短距离. 同时, 将最短距离在极限状态面上对应的点称为设计验算点  $\mathbf{y}^* = [y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*]$  (简称验算点 MPP)<sup>[4]</sup>, 如图 1 所示.

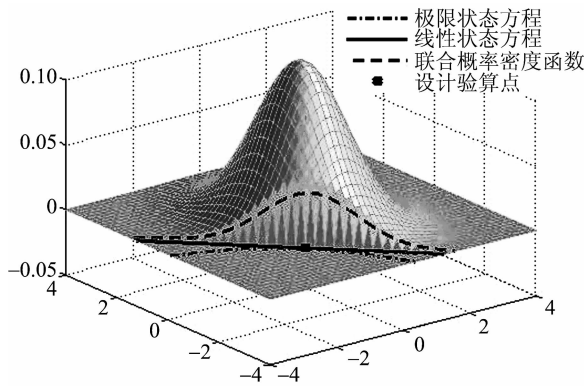


图 1 标准正态空间非线性极限状态方程与设计验算点示意图

Fig. 1 Schematic of nonlinear limit state equation and most probable point of design in standard normal space

于是, 结构构件的失效概率为

$$\begin{aligned} P_f &= P\{\mathbf{x}; g(\mathbf{x}) \leq 0\} = P\{\mathbf{y}; G(\mathbf{y}) \leq 0\} = \\ &\int_{G(\mathbf{y}) \leq 0} f_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ &\int_{G(\mathbf{y}) \leq 0} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T\right) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (8)$$

式中,  $f_Y(\mathbf{y})$  为  $\mathbf{Y}$  空间向量  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  的联合概率密度函数.

根据广义随机空间内可靠度指标的定义,  $\beta$  可由下式解出:

$$\beta^{*2} = \min_{G(\mathbf{y})=0} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T) = \mathbf{y}^* \cdot \mathbf{y}^{*T} \quad (9)$$

由式(8)知,  $f_Y(\mathbf{y})$  与距离平方  $\beta^{*2}$  成反比. 因此, 当距离取最小时, 可知  $f_Y(\mathbf{y})$  应为最大.

## 2 对分区间抽样法

### 2.1 验算点可靠度分析法

根据 Taylor 展开法, 在随机向量  $\mathbf{y}$  的验算点  $\mathbf{y}^*$  处将式(7)表达的极限状态方程线性化, 有<sup>[3]</sup>

$$\mathbf{z}_L = G(\mathbf{y}^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_i} (y_i - y_i^*) \quad (10)$$

式中,  $\partial G/\partial y_i = \partial g/\partial x_i \cdot \partial x_i/\partial y_i$ . 其中,  $\partial x_i/\partial y_i$  在随机向量  $\mathbf{y}$  的验算点  $\mathbf{y}^*$  处计算;  $\partial g/\partial x_i$  在随机向量  $\mathbf{x}$  的验算点  $\mathbf{x}^*$  处计算. 于是, 由式(6)可知

$$\partial x_i/\partial y_i = \varphi(y_i^*) \cdot f_i(x_i^*) \quad (11)$$

式中,  $\varphi(\cdot)$  为标准正态概率密度函数;  $f_i(\cdot)$  为基本随机变量  $x_i$  的概率密度函数.

由于  $\mathbf{z}_L$  为  $\mathbf{y}$  的线性组合, 因此  $\mathbf{z}_L$  也服从正态分布, 其均值  $\mu_{z_L}$  和标准差  $\sigma_{z_L}$  分别为<sup>[3]</sup>

$$\mu_{z_L} = G(\mathbf{y}^*) - \sum_{i=1}^n y_i^* \frac{\partial G}{\partial y_i} \quad (12)$$

$$\sigma_{z_L} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial y_i} \sigma_{y_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

于是, 式(8)中结构构件的失效概率亦可近似表示为

$$P_f \approx P\{\mathbf{z}_L \leq 0\} = \Phi(-\beta_L) \quad (14)$$

式中,  $\beta_L$  为极限状态方程线性化后的可靠度指标, 并且

$$\beta_L = \mu_{z_L}/\sigma_{z_L} \quad (15)$$

这里, 根据式(10)、(12)、(13)和(15)即可导出空间  $\mathbf{Y}$  内验算点  $\mathbf{y}^*$  的坐标值<sup>[4]</sup>

$$y_i^* = -\frac{\beta_L}{\sigma_{z_L}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*} = \beta_L \cos \theta_{y_i} \quad (16)$$

式中,  $\cos \theta_{y_i}$  称为验算点重要度系数<sup>[4]</sup>, 表示为

$$\cos \theta_{y_i} = -\frac{1}{\sigma_{z_L}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*} \quad (17)$$

于是, 基本随机向量  $\mathbf{x}$  的验算点  $\mathbf{x}^*$  可按式(6)计算. 由上述推导可知, 失效概率  $P_f$  的估算误差主要是由于将极限状态方程线性化造成的.

### 2.2 可靠度指标对分区间抽样法

经典验算点法根据重要度系数不断迭代出新的验算点, 但是难以保证迭代过程的收敛性<sup>[4]</sup>. 对分区间法 (bisection method) 是基于介值定理的一种数

值计算方法,其具有结构简单,收敛可靠等特点<sup>[11]</sup>.

首先,依据工程经验或简单的数值方法确定失效域中的一点  $\mathbf{x}^{(0)}$  作为初始点,根据式(2)将其转换为标准正态空间  $\mathbf{Y}$  内点  $\mathbf{y}^{(0)}$ ,计算点  $\mathbf{y}^{(0)}$  处对应的状态函数值  $G(\mathbf{y}^{(0)})$  和梯度  $\nabla G(\mathbf{y}^{(0)})$ ,根据式(9)计算其对应的可靠度指标  $\beta^{(0)}$  (假设其为验算点).显然,因为  $\mathbf{y}^{(0)}$  是失效域内一点,故  $G(\mathbf{y}^{(0)}) < 0$ ,且对应的  $\beta^{(0)} > \beta^*$  ( $\beta^*$  为真实验算点对应的可靠度指标).其次,依据抽样点的状态函数值大小和其梯度信息来确定第  $k$  点的抽样步长  $\Delta\beta^{(k-1)} = G(\mathbf{y}^{(k-1)}) / \|\nabla G(\mathbf{y}^{(k-1)})\|$ ,且  $\beta^{(k)} = \beta^{(k-1)} + \Delta\beta^{(k-1)}$ ,根据式(16)确定下一抽样点.之后,假设结构状态方程  $g(\mathbf{x})$  在其取值空间  $\mathbf{X}$  内连续,可知在标准正态空间  $\mathbf{Y}$  内每个抽样点  $\mathbf{y}^{(k)}$  对应的可靠度指标  $\beta^{(k)}$  也是连续的(其中,  $k=1, 2, \dots, m, m$  为抽样次数).若经过若干次抽样后,可靠度指标恰在区间  $[\beta^{(t)}, \beta^{(t+1)}]$  上,且  $\beta^{(t)}$  和  $\beta^{(t+1)}$  对应样本点的状态函数值符号相反.根据介值定理,在  $(\beta^{(t)}, \beta^{(t+1)})$  区间内必存在数  $\beta^{*'}$ ,使得其对应的样本点  $\mathbf{y}^{*'}$  状态方程为零,即  $G(\mathbf{y}^{*'}) = 0$ .尽管满足  $G(\mathbf{y}) = 0$  的点并不唯一,但是,这里利用式(17)计算其对应的抽样点.因此,在验算点方向系数  $\cos \theta_{y_i}$  确定的方向上  $\beta^{*'}$  在区间  $(\beta^{(t)}, \beta^{(t+1)})$  内的根是唯一的.根据对分区间法的思想,将  $[\beta^{(t)}, \beta^{(t+1)}]$  区间反复减半,在每一步都选取含有根  $\beta^{*'}$  的那一半.最终,得到满足精度要求的  $\beta^{*'}$ ,将  $\beta^{*'}$  作为可靠度指标输出,即可算得结构的可靠度.具体过程如图 2 所示.

上述过程即为可靠度指标对分区间抽样法.在抽样  $t+1$  步之后,可靠度指标  $\beta$  的每一个区间长度都是前一个区间长度的一半,因此可以保证  $\beta^{(t)}$  和  $\beta^{(t+1)}$  都收敛于  $\beta^{*'}$ .其误差为<sup>[11]</sup>

$$|\beta^{(m)} - \beta^{*'}| \leq \frac{|\beta^{(m)} - \beta^{(m-1)}|}{2} = \frac{|\beta^{(t)} - \beta^{(t+1)}|}{2^{m-t+1}} = \frac{\Delta\beta_t}{2^{m-t+1}} \quad (18)$$

图 3 为二变量非线性功能函数  $g(\mathbf{x}) = x_1^4 + \exp(x_1^2) + x_2^3 + 6$  验算点求解过程示意图,其中,变量  $x_1, x_2$  相互独立,且均服从正态分布;均值点  $\mu_{x_1} = 3, \mu_{x_2} = -5$ ;初始抽样点  $x_1 = 1.5, x_2 = -6$ .分别利用经典验算点法和可靠度指标对分区间抽样法来获得极限状态方程  $g(\mathbf{x}) = 0$  的验算点过程.图 3 中的粗实线表示极限状态方程,由于  $x_1$  和  $x_2$  的变异系数较小,其非线性特征较弱,故似一条直线.从图

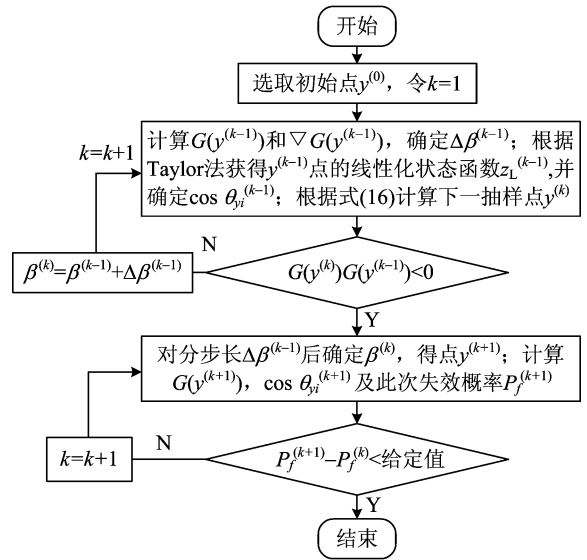


图 2 基于对分区间抽样法的结构可靠性分析流程图

Fig. 2 Flow charts of structural reliability analysis based on the Bisection method of sampling

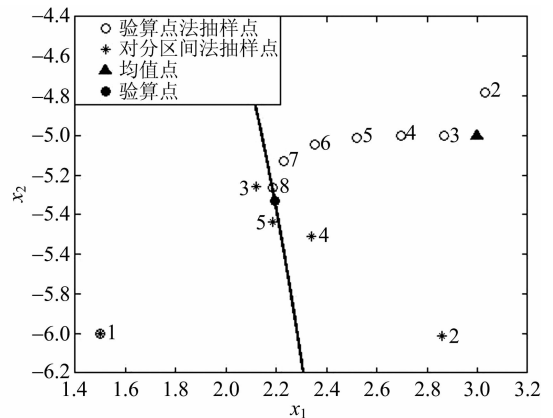


图 3 经典验算点法与对分区间抽样法的抽样点分布图

Fig. 3 Distribution chart of sample points on the most probable point method and the bisection method of sampling

3 可以看出,与经典验算点可靠度迭代算法相比,可靠度指标对分区间抽样法经过 5 次迭代即到达了满足一定精度要求的验算点区域附近;而经典验算点法一般需先跳跃到均值点附近,而后再不断迭代至验算点附近.由此可见,在可靠度指标  $\beta$  的约束下,对分区间抽样法的收敛性有保证,且速度更快.

### 2.3 抽样过程中偏导数的计算

偏导数能够研究多元函数关于其某一自变量的变化率问题<sup>[8]</sup>,它是进行可靠性灵敏度分析的有效手段.假设函数  $g(\mathbf{x})$  在点  $\mathbf{x}_0$  的某一邻域内有定义,令向量  $\mathbf{x}_0$  中的一个变量  $x_i$  在  $x_{i0}$  处有增量  $\Delta x_i$ ,相应的函数  $g(\mathbf{x})$  便会有增量  $\Delta g(\mathbf{x}_0)$ .这里,  $\Delta g(\mathbf{x}_0)$

与 $\Delta x_i$ 之比在 $\Delta x_i$ 趋于无穷小时,即为函数 $g(\mathbf{x})$ 在点 $\mathbf{x}_0$ 处对 $x_i$ 的偏导数.于是,可由向前差分法和中心差分法两种方法来求抽样过程中隐式函数 $g(\mathbf{x})$ 的偏导数<sup>[9]</sup>.

向前差分法

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta g_{\Delta x_i}}{\Delta x_i} = \frac{g_{x_i+\Delta x_i} - g_{x_i}}{\Delta x_i} \quad (19)$$

中心差分法

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta g_{2\Delta x_i}}{2\Delta x_i} = \frac{g_{x_i+\Delta x_i} - g_{x_i-\Delta x_i}}{2\Delta x_i} \quad (20)$$

式中,

$$g_{x_i} = g(x_1, \dots, x_n),$$

$$g_{x_i+\Delta x_i} = g(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n),$$

$$g_{x_i-\Delta x_i} = g(x_1, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n).$$

图3所示是关于显式极限状态方程函数的可靠度求解,故其偏导数可根据 $g(\mathbf{x})$ 直接求出,而总的抽样点数 $N^* = n_0 + 1$ (其中, $n_0$ 表示迭代次数).对于隐式极限状态方程,若采用向前差分法,则总的抽样点数 $N^* = n_0(n+1) + 1$ ;若采用中心差分法,则总的抽样点数 $N^* = n_0(2n+1) + 1$ (这里, $n$ 表示变量个数).一般而言,中心差分法的计算精度优于向前差分法.

### 3 基于抽样路径的灵敏度分析

结构系统的失效概率是由所有随机变量 $x$ 的分布类型、分布参数以及极限状态方程的具体形式共同决定.这些随机变量分布类型的选取和分布参数的确定,直接决定了结构失效概率的大小,审慎选择这些随机变量的信息可以进一步提高结构系统的可靠度.可靠性灵敏度分析就是用来确定不同随机变量及其分布参数对于失效概率的敏感程度<sup>[8]</sup>.

当随机变量 $\mathbf{x}$ 的分布类型和极限状态方程确定后,失效概率只与随机变量的分布参数有关.取随机变量 $x_i$ 的某一分布参数 $\theta_i^{(s)}$ (其中, $i=1, \dots, n, s=1, \dots, l_k, l_k$ 为第 $i$ 个变量分布参数的总数), $\theta_i^{(s)}$ 表示第 $i$ 个基本随机变量 $x_i$ 第 $s$ 个分布参数.这里,可靠度指标 $\beta$ 关于 $\theta_i^{(s)}$ 的偏导数为

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta_i^{(s)}} = \nabla \beta(\mathbf{y}^*)^T \frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial \theta_i^{(s)}} \quad (21)$$

式中, $\nabla \beta(\mathbf{y}^*)$ 为可靠度指标 $\beta$ 在验算点 $\mathbf{y}^*$ 处的梯度,而 $\frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial \theta_i^{(s)}}$ 仅与随机变量 $\mathbf{y}$ 的概率分布及其相关性有关.同时,失效概率 $P_f$ 对随机变量 $\mathbf{x}$ 分布参数 $\theta_i^{(s)}$

的偏导数为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_i^{(s)}} \approx \frac{\partial \Phi(-\beta)}{\partial \theta_i^{(s)}} = \frac{\partial \Phi(-\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i^{(s)}} = -\varphi(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial \theta_i^{(s)}} \quad (22)$$

本文取 $\theta_i^{(s)}$ 分别为随机变量 $x_i$ 的均值 $\mu_{x_i}$ 和标准差 $\sigma_{x_i}$ .为了比较具有不同量纲分布参数对失效概率的影响,参考文献[8-9]建立式(22)和(23)所示的无量纲灵敏度指标:

$$S_{\mu_{x_i}} = \frac{\sigma_{x_i}}{P_f} \frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{-\sigma_{x_i} \varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \nabla \beta(\mathbf{y}^*) \frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial \mu_{x_i}} \quad (23)$$

$$S_{\sigma_{x_i}} = \frac{\sigma_{x_i}}{P_f} \frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{x_i}} = \frac{-\sigma_{x_i} \varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \nabla \beta(\mathbf{y}^*) \frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial \sigma_{x_i}} \quad (24)$$

式中, $\partial \mathbf{y}^* / \partial \mu_{x_i}$ 和 $\partial \mathbf{y}^* / \partial \sigma_{x_i}$ 分别为独立标准正态随机向量对原随机变量 $x_i$ 的概率分布参数(均值、标准差)的偏导数向量. $S_{\mu_{x_i}}, S_{\sigma_{x_i}}$ 分别称为失效概率对随机变量 $x_i$ 的均值、标准差灵敏度指标,它们分别反映了随机变量 $x_i$ 的均值、标准差对失效概率的影响程度.从 $S_{\mu}, S_{\sigma}$ 的正负号还可以判断随机变量的均值、标准差对失效概率的影响趋势.不同随机变量 $S_{\mu}, S_{\sigma}$ 绝对值之间的对比提供了这种影响程度的量化比较.

### 4 算例分析

本节分别采用数值算例和工程算例来说明所提方法的精度和效率.对于每个算例,基于Monte Carlo大样本模拟的可靠性灵敏度分析结果可看做精确解,记为MC\_RS,将其和基于对分区间抽样法的可靠性灵敏度分析结果以及其他解决隐式结构可靠性灵敏度分析方法的计算结果均列在表格中,以便比较各种方法的精度;同时,各方法的抽样次数也列在了表格当中,以便比较其对应的效率和成本.

**算例1** 非线性功能函数 $g(\mathbf{x}) = x_1^4 + \exp(x_1^2) + x_2^3 + 6$ ,其中变量 $x_1, x_2$ 相互独立,且均服从正态分布,均值 $\mu_{x_1} = 3, \mu_{x_2} = -5$ .当变异系数 $C_v$ 取不同值时(表1中分别取0.1, 0.2, 0.3和0.5),利用Monte Carlo法,重要抽样法(MCIS),含有交叉项的二次响应面法(RSM),验算点法(FORM)以及本文提出的对分区间抽样法,算得的失效率结果 $P_f$ 和所需取样次数 $N^*$ ,均列于表1中.

由表1可知,与Monte Carlo法算得的真值相比,不同变异系数情况下,重要抽样法的计算精度较高(即相对误差和绝对误差均较小),但抽样次数太大,不适用于大型系统结构的可靠性分析;含有交叉

表 1 不同情况下算例 1 失效概率计算结果和抽样次数统计表

Tab. 1 Statistical table of example No. 1 about the failure probability results and the sampling number under different situation

	$C_v$							
	0.1				0.2			
	$P_f$	$N^*$	xw	jw	$P_f$	$N^*$	xw	jw
MC_RS	$2.64830 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^7$	0	0	$7.76408 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^7$	0	0
MCIS	$2.83355 \times 10^{-3}$	5 000	$6.99 \times 10^{-2}$	$1.85 \times 10^{-4}$	$7.81851 \times 10^{-2}$	5 000	$7.01 \times 10^{-3}$	$5.44 \times 10^{-4}$
RSM	$3.67492 \times 10^{-2}$	5	12.9	$3.41 \times 10^{-2}$	0.186 273	5	1.399	0.109
FORM	$2.78794 \times 10^{-3}$	9	$5.27 \times 10^{-2}$	$1.39 \times 10^{-4}$	$8.28938 \times 10^{-2}$	9	$6.77 \times 10^{-2}$	$5.25 \times 10^{-3}$
本文方法	$2.78793 \times 10^{-3}$	6	$5.27 \times 10^{-2}$	$1.39 \times 10^{-4}$	$8.28940 \times 10^{-2}$	6	$6.77 \times 10^{-2}$	$5.25 \times 10^{-3}$

	$C_v$							
	0.3				0.5			
	$P_f$	$N^*$	xw	jw	$P_f$	$N^*$	xw	jw
MC_RS	0.163 476	$1 \times 10^7$	0	0	0.251 183	$1 \times 10^7$	0	0
MCIS	0.163 292	5 000	$1.13 \times 10^{-3}$	$1.84 \times 10^{-4}$	0.248 057	5 000	$1.24 \times 10^{-3}$	$3.13 \times 10^{-3}$
RSM	0.284 935	5	0.743	0.121	0.392 793	5	0.564	0.142
FORM	0.177 766	9	$8.74 \times 10^{-2}$	$1.43 \times 10^{-2}$	0.289 671	9	0.153	$3.85 \times 10^{-2}$
本文方法	0.177 766	6	$8.74 \times 10^{-2}$	$1.43 \times 10^{-2}$	0.289 671	6	0.153	$3.85 \times 10^{-2}$

【注】 xw 表示失效概率与真值比较的相对误差; jw 表示绝对误差。

项的响应面法尽管抽样效率较高(两个变量时依据中心复合法抽样, 仅需 5 个样本点), 但是计算精度差, 尤其在变异系数极小或极大两种情况下, RSM 法的计算结果几乎失真. 而本文所提的对分区间抽样法与经典验算点法的计算精度一致, 尤其适用于弱非线性状态方程的计算(如表 1 所示, 变异系数  $C_v$  越小, 则此范围内对应的状态方程  $g(\mathbf{x})$  的非线性特征越弱, 因此计算精度也越高. 当  $C_v=0.1$  时, 其精度甚至会超过重要抽样法. 但随着  $C_v$  的增大, 重要抽样法计算非线性状态方程的优势亦越来越明显). 总体来说, 由于本文方法在抽样过程中考虑了初始点的梯度信息以及是在可靠度指标  $\beta$  的约束下进行抽样的, 因此收敛过程稳定, 且速度较快.

**算例 2** 汽车行驶平顺性主要与车身加速度方差  $\sigma_a^2$  有关.  $\sigma_a^2$  小, 则平顺性好. 而  $\sigma_a^2$  又与车身、车轮双自由度系统的振动参数有关. 其中, 包括车身固有频率  $\omega_0$ , 相对阻尼系数  $\psi$  和刚度比  $\gamma$ . 这里, 以  $\sigma_a^2$  作为度量平顺性的指标, 采用对分区间抽样法来分析该车辆系统行驶平顺性的可靠性灵敏度.

根据汽车有关设计参数的取值范围, 影响其平顺性的各随机参数均值和标准差如表 2 所列.

由车辆双自由度系统动力学可知<sup>[12]</sup>

$$\sigma_a^2 = 2 \sum_{n_Q=1}^{20} S_q(n_Q \Delta f) \left| \frac{a}{q}(n_Q \Delta f) \right|^2 \Delta f \quad (25)$$

表 2 影响汽车平顺性各随机参数均值和标准差

Tab. 2 Mean and standard deviation of the random parameters influencing vehicle ride comfort

随机参数	均值 $\bar{x}$	标准差 $s_x$
固有频率 $\omega_0$ / Hz	6	0.3
相对阻尼系数 $\psi$ / Hz <sup>-1</sup>	0.5	0.05
刚度比 $\gamma$	3	0.15

式中,

$$\left| \frac{a}{q}(n_Q \Delta f) \right| = \omega^2 \gamma \left[ \frac{1 + 4\psi^2 (\omega/\omega_0)^2}{\Delta_2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_2 = \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \left[ 1 + \gamma - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] - 1 \right\}^2 + 4\psi^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left[ \gamma - \left( \frac{1}{\mu} + 1 \right) \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2.$$

其中,  $\omega=2\pi n_Q \Delta f$  为圆频率,  $f$ /Hz 为频率;  $\Delta f$  为频带宽度;  $\mu$  为车身车轮质量比;  $S_q(n_Q \Delta f) = C_{BP} v / (n_Q \Delta f)^2$ ,  $C_{BP}$  为路面不平度系数;  $v$  为汽车行驶速度.

根据上述解析模型, 可知车辆双自由度系统是一个较为复杂的非线性系统. 在此, 假设其解析模型未知, 采用对分区间抽样法对其进行可靠性灵敏度分析(抽样过程中偏导数的计算采用中心差分法), 结果如表 3 所示.

经分析表 3 中数据可知, 相对阻尼系数  $\psi$  和刚度比  $\gamma$  对汽车平顺性失效概率  $P_f$  的影响较大. 这

表3 汽车平顺性失效概率和各影响参数灵敏度  
Tab.3 Failure probability and sensitivity of influence parameters on vehicle ride comfort

	MC_RS	本文方法
$P_f$	$3.887\ 123 \times 10^{-2}$	$3.215\ 715 \times 10^{-2}$
$S_{\rho_{\phi 0}}$	-57.734	-91.928
$S_{\rho_{\psi}}$	-267.227	-316.951
$S_{\rho_{\gamma}}$	376.109	329.452
$S_{\sigma_{\phi 0}}$	83.192	102.359
$S_{\sigma_{\psi}}$	349.022	405.492
$S_{\sigma_{\gamma}}$	217.432	283.846
抽样点数	$1 \times 10^7$	126

里,  $P_f$  随  $\phi$  均值的增大而减小, 随  $\gamma$  均值的增大而增大; 且  $P_f$  会随 3 个随机参数标准差的增大而增大, 这些均与事实相符. 同时, 本文提出的对分区间抽样法计算的失效概率值, 与 Monte Carlo 模拟获得的真值相比, 虽有差异, 但比较接近(其误差主要是由于将极限状态方程线性化而造成的); 且本文方法获得的可靠性灵敏度值亦与 Monte Carlo 法真值较为接近, 能够正确反映出各随机参数对结构可靠性的影响. 并且, 从抽样次数上来看, 本文方法具有更高的计算效率(这里, 灵敏度的计算误差主要来自差分法求偏导数过程中的步长选取. 若步长过大则误差较大; 但若步长过小, 又会影响到响应函数输出值的读取精度, 同样会造成误差. 本文取随机参数标准差  $s_x$  的 1/15 作为求取偏导数的步长).

## 5 结论

(I) 本文提出基于对分区间抽样法的结构可靠性灵敏度分析方法, 具有计算精度高、抽样次数少等特点, 尤其适用于计算量较大的大型工程结构系统分析.

(II) 与经典验算点法计算结构可靠度相比, 本文所提方法能够充分利用初始迭代点的梯度信息和可靠度指标  $\beta$ , 在  $\beta$  的约束下能够更快地逼近验算点, 使其收敛性获得保证.

(III) 根据本文的推导过程可知, 理论上失效概率  $P_f$  的计算误差主要是由于将极限状态方程线性化而造成的. 因此, 本文所提方法仅适用于工程中常见的非强非线性系统结构. 对于强非线性系统结构的可靠性灵敏度分析, 作者将另文讨论.

### 参考文献(References)

[1] Zhang Yimin. Connotation and development of

mechanical reliability-based design [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(14):167-188.

张义民. 机械可靠性设计的内涵与递进[J]. 机械工程学报, 2010, 46(14):167-188.

[2] Zhao Y G, Ono T. Moment methods for structural reliability [J]. Structural Safety, 2001, 23(1): 47-75.

[3] Huang B, Du X P. Probabilistic uncertainty analysis by mean-value first order saddle point approximation [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(2):325-336.

[4] Du X, Chen W. A most probable point based method for efficient uncertainty analysis[J]. Journal of Design and Manufacturing Automation, 2001, 4(1):47-66.

[5] Zhao Weitao, An Weiguang, Yan Xinchu. Second-order second-moment reliability index[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2004, 25(2): 240-242.

赵维涛, 安伟光, 严心池. 二阶二次矩可靠性指标[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2004, 25(2): 240-242.

[6] Richard J F, Zhang W. Efficient high-dimensional importance sampling [J]. Journal of Econometrics, 2007, 141(2):1 385-1 411.

[7] Au S K, Beck J L. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations [J]. Structural Safety, 1999, 21(2):135-158.

[8] Song Shufang, Lu Zhenzhou, Zheng Chunqing. Directional simulation for sensitivity analysis of structural reliability [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2008, 29(3):264-271.

宋述芳, 吕震宙, 郑春青. 结构可靠性灵敏度分析的方向(重要)抽样法[J]. 固体力学学报, 2008, 29(3):264-271.

[9] Zhang Feng, Lyu Zhenzhou, Cui Lijie. [J]. Improved reliability sensitivity estimation and its variance analysis by a novel  $\beta$  hyper-plane based importance sampling method[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2011, 28(2):176-186.

张峰, 吕震宙, 崔利杰. 基于  $\beta$  面截断重要抽样法可靠性灵敏度估计及其方差分析[J]. 工程数学学报, 2011, 28(2):176-186.

[10] Yang Jie, Zhao Deyou. Rotation gradient algorithm for calculating structural reliability index [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2011, 51(2):221-225.

杨杰, 赵德有. 结构可靠性指标计算的旋转梯度算法 [J]. 大连理工大学学报, 2011, 51(2):221-225.

[11] 令锋, 傅守忠, 陈树敏, 等. 数值计算方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2012:66-78.

[12] Wang Lianming, Song Baoyu, Zhou Yan, et al. Modeling and simulation of automobile ride [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 1998, 30(5):80-84.

王连明, 宋宝玉, 周岩, 等. 汽车平顺性建模及其仿真研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1998, 30(5):80-84.