第45卷第9期 中国科学技术大学学报 Vol. 45, No. 9
2015年9月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Sep. 2015

文章编号:0253-2778(2015)09-0733-04

关于有限群 p 超可解性的一些新判定

刘阿明,李保军

(成都信息工程大学应用数学学院,四川成都 610225)

摘要: 有限群 G 的一个子群 H 称为在 G 中是 n 嵌入的,如果存在 G 的一个正规子群 T 使得 $HT=H^G$ 且 $H\cap T\leqslant H_{sG}$,其中,H_{sG} 是包含在 H 中的 G 中的最大 s 拟正规子群. 这里利用某些子群的 n 嵌入性质给出有限群为 p 超可解群的一些新的判定.

关键词: 有限群;p 超可解群;Sylow 子群;n 嵌入子群

中图分类号: O152.1 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.09.005

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 20D10; Secondary 20D20

引用格式: Liu Aming, Li Baojun. Some new criteria on p-supersolubility of finite groups[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015,45(9):733-736.
刘阿明,李保军. 关于有限群 p 超可解性的一些新判定[J]. 中国科学技术大学学报,2015,45(9):733-736.

Some new criteria on p-supersolubility of finite groups

LIU Aming, LI Baojun

(*College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information and Technology, Chengdu* 610225, *China*)

Abstract: A subgroup H of a group G is called n-embedded in G if there exists a normal subgroup T of G, such that $HT=H^G$ and $H\cap T\leqslant H_{sG}$, where H_{sG} is the maximum s-quasinormal subgroup of G contained in H. Here, some new criteria on p-supersolubility of finite groups are obtained by n-embedded property of some subgroups.

Key words: finite group; p-supersoluble group; Sylow subgroup; n-embedded subgroup

0 引言

本文所讨论的群皆为有限群. 文中所用的符号和概念都是标准的,对未交代的符号和概念,读者可参阅文献[1-2].

本文中,G 表示一个群,$\pi(G)$ 为 G 的阶的所有素因子的集合;群 G 的所有极大子群的交称为 G 的 Frattini 子群,记作 $\Phi(G)$. G 的一个主因子 H/K 称为是 G 的 Frattini 主因子,如果 $H/K\subseteq\Phi(G/K)$. G 的最大正规幂零子群,称作 G 的 Fitting 子群,记作 $F(G)$;$F_p(G)$ 为 G 的最大正规 p 幂零子群. 设 H 为 G 的一个子群,$H^G=\langle H^g\mid g\in G\rangle$ 为包含 H 的 G 的最小正规子群.

群 G 的两个子群 H 与 K 称为是可置换的,如果 $HK=KH$. 子群的置换性与群的结构有着极为密切的联系. Ore 首先研究了一个群中与所有子群

收稿日期: 2014-01-15;**修回日期:** 2014-05-08

基金项目: 国家自然科学基金(11471055),成都信息工程学院中青年学术带头人科研基金(J201512)资助.

作者简介: 刘阿明,男,1988年生,硕士生. 研究方向:群论. E-mail:aming8809@163.com

通讯作者: 李保军,博士/副教授. E-mail: baojunli@cuit.edu.cn

都可置换的子群,并称之为拟正规子群[3]. 此后,Kegel[4], Deskins[5]发现,如果 G 的一个子群 H 与 G 的所有 Sylow 子群置换,那么 H 有着许多与拟正规子群类似的性质,这类子群被称为 s 拟正规子群(或 s 置换子群). 近年来,子群的各种置换性质被广泛而深入地进行研究,并得到了一大批有意义的研究成果(如文献[6-8]等). 为进一步深入研究 s 拟正规子群及其对群结构的影响,郭文彬等在文献[9]中提出了 n 嵌入子群的概念. 群 G 的一个子群 H 称为在 G 中是 n 嵌入的,如果存在 G 的一个正规子群 T 使得 $HT=H^G$ 且 $H\cap T\leqslant H_{sG}$,其中,H_{sG} 是包含在 H 中的 G 中的最大 s 拟正规子群. 本文将进一步研究 n 嵌入子群对群结构的影响,并给出群的 p 超可解性的一些新的判别方法.

1 预备知识

为了方便引用,本节中我们列出一些已知结论作为引理,它们将在我们后面的证明中得到应用.

引理 1.1[9,引理2.7] G 是一个群且 $H\leqslant K\leqslant G$:

① 若 H 在 G 中正规,那么,K/H 在 G/H 中是 n 嵌入的当且仅当 K 在 G 中是 n 嵌入的;

② H 在 G 中是 n 嵌入的,则在 K 中也 n 嵌入的;

③ 设 H 在 G 中正规. 则对 G 的任何满足 $(|H|,|E|)=1$ 的 n 嵌入子群 E 有 HE/H 在 G/H 中是 n 嵌入的.

引理 1.2[1,定理1.8.17] 令 N 是 G 的非平凡可解正规子群. 若 $N\cap\Phi(G)=1$, 那么 N 的 Fitting 子群 $F(N)$ 是包含在 N 中的 G 的一些极小正规子群的直积.

引理 1.3[1,引理1.8.19] 若 G 是 p 可解的,这里 $p\mid|G|$. 那么 $C_G(F_p(G))\leqslant F_p(G)$.

引理 1.4[10,引理2] 若 p 子群 H 在群 G 中是 s 置换的,则①$H\leqslant O_p(G)$;②$O^p(G)\leqslant N_G(H)$.

2 主要结果

定理 2.1 设 G 为一个 p 可解群. G 为 p 超可解群的充要条件是对于 G 的任一非 Frattini p 主因子 H/K, 存在 G 的 Sylow$p$ 子群的某个极大子群 P_1 在 G 中是 n 嵌入的,且 P_1 不覆盖 H/K.

证明 我们首先证明条件的充分性. 用反证法,假设命题不成立并设 G 为一个极小阶反例. 通过以下步骤完成证明:

① $O_{p'}(G)=1$

假设 $O_{p'}(G)\neq 1$,并设 N 为包含在 $O_{p'}(G)$ 中 G 的一个极小正规子群. 设 $(H/N)/(K/N)$ 为 G/N 的任一非 Frattini p 主因子,则显然 H/K 是 G 的 p 主因子. 若 $H/K\subseteq\Phi(G/K)=\bigcap_{K\subseteq M<\cdot G}M/K$,则 $H\subseteq\bigcap_{K\subseteq M<\cdot G}M$,即 $H/N\subseteq\bigcap_{K\subseteq M<\cdot G}M/N$,从而

$$(H/N)/(K/N)\subseteq\Phi((G/N)/(K/N))=\\(\bigcap_{K\subseteq M<\cdot G}M/N)/(K/N),$$

矛盾. 这说明 H/K 是 G 的非 Frattini p 主因子. 由条件可知,存在 G 的 Sylow p 子群的极大子群 P_1,使得 P_1 在 G 中是 n 嵌入的,并且 P_1 不覆盖 H/K. 由于 $N\leqslant O_{p'}(G)$,由引理 1.1③有 P_1N/N 在 G/N 中是 n 嵌入的. 因此条件对 G/N 成立. 由 G 的选择可知 G/N 为 p 超可解群,从而 G 为 p 超可解群,矛盾. 因此 $O_{p'}(G)=1$.

② 设 N 是 G 的任一极小正规子群,则 G/N 是 p 超可解的

设 $(H/N)/(K/N)$ 为 G/N 的任一非 Frattini p 主因子,同上讨论,有 H/K 是 G 的非 Frattini p 主因子. 由于 $O_{p'}(G)=1$ 且 G 为 p 可解群,$N\leqslant O_p(G)$. 由 P_1 不覆盖 H/K,我们断言 $N\leqslant P_1$. 否则由 P_1 的极大性有,$P_1N=G_p$ 为 G 的一个 Sylow p 子群,而 G 的 Sylow p 子群覆盖 G 的所有 p 主因子,因此 P_1N 覆盖 H/K,即 $H\leqslant P_1NK=P_1K$. 这表明 P_1 覆盖 H/K,矛盾,因此断言成立. 由引理 1.1①,有 P_1/N 在 G/N 中是 n 嵌入的. 所以,G/N 满足定理条件,从而由 G 的极小性知 G/N 是 p 超可解的.

③ N 是 G 的唯一的极小正规子群,$N=O_p(G)=F(G)$ 且 $\Phi(G)=1$

设 N 和 R 是 G 的两个不同的极小正规子群,则由(2)可知,G/N 和 G/R 都是 p 超可解的,所以 $G\simeq G/(N\cap R)$ 是 p 超可解的,矛盾. 因此,N 是 G 的唯一的极小正规子群.

假设 $\Phi(G)\neq 1$,则 $N\subseteq\Phi(G)$. 由②,G/N 是 p 超可解的. 但我们知道所有 p 超可解群的群类为饱和群系,所以 G 是 p 超可解的群,这与 G 的选择矛盾. 因此 $\Phi(G)=1$.

由引理 1.2,$F(G)$ 可以写成 G 的极小正规子群的直积,即 $F(G)=R_1\times R_2\times\cdots\times R_t$,其中 R_i 是 G 的极小正规子群. 然而,G 只有一个极小正规子群 N,所以 $N=O_p(G)=F(G)$.

④ $|N|=p$

由①和③知，$N\cong N/1$ 为 G 的非 Frattini p 主因子. 由条件，存在 G 的 Sylow p 子群的极大子群 P_1，使得 P_1 不覆盖 N，且 P_1 在 G 中是 n 嵌入的. 即存在 G 的正规子群 T 使得 $(P_1\cap T)\leqslant P_{1sG}$ 且 $P_1T=P_1^G$. 若 $T=1$，则 $P_1=P_1T=P_1^G\lhd G$. 但 N 为 G 的唯一极小正规子群，因此 $N\leqslant P_1$ 或 $P_1=1$. 若 $N\leqslant P_1$，则 P_1 覆盖 N，矛盾. 若 $P_1=1$，则 G 的 Sylow p 子群循环，从而由 G 为 p 可解群得 G 为 p 超可解，矛盾. 因此 $T\neq 1$. 又由于 N 为 G 的唯一极小正规子群，有 $N\leqslant T$. 由 $P_{1sG}\cap T\leqslant P_1\cap T\leqslant P_{1sG}$ 知 $P_1\cap T=P_{1sG}\cap T$ 为 G 的 s 拟正规子群，因此 $P_1\cap N=P_1\cap T\cap N$ 为 G 的 s 拟正规子群. 由引理 1.4 得 $O^p(G)\leqslant N_G(P_1\cap N)$. 显然 $P_1\cap N\lhd P_1$，且由 N 的交换性可知，$P_1\cap N\lhd N$. 因此 $P_1\cap N\lhd\langle P_1,N\rangle$. 由 P_1 不覆盖 N 以及 P_1 的极大性知 $\langle P_1,N\rangle=G_p$ 为 G 的一个 Sylow p 子群. 因此 $P_1\cap N\lhd G=\langle O^p(G),G_p\rangle$. N 为 G 的极小正规子群表明 $P_1\cap N=1$，因此有 $|N|=p$.

由③，G/N 为 p 超可解，因此 G 也是，这一矛盾完成了充分性的证明.

下面证明条件的必要性. 假设 G 为 p 超可解. 则 G 的任意 p 主因子 H/K 为 p 阶循环群，因此 $\mathrm{Aut}(H/K)$ 为 $p-1$ 阶循环群，并由此得到 $G/C_G(H/K)$ 为幂指数整除 $p-1$ 的循环群. 特别地，$G/C_G(H/K)$ 为 p' 群. 由文献[1，定理 1.8.13]，$F_p(G)$ 为 G 的所有 p 主因子的中心化子的交，因此 $G/F_p(G)$ 为一些 p' 群的次直积，从而也是 p' 群. 这表明 $G/O_{p'}(G)$ 为 p 闭的，即 $O_{p'}(G)G_p\lhd G$，其中 G_p 为 G 的一个 Sylow p 子群. 设 $\Phi=\Phi(G_p)$. 则

$$\Phi O_{p'}(G)/O_{p'}(G)\ \mathrm{char}\ G_pO_{p'}(G)/O_{p'}(G)\lhd G/O_{p'}(G).$$

因此 $\Phi O_{p'}(G)\lhd G$. 设 H/K 为 G 的任意非 Frattini p 主因子. 则显然有 $\Phi O_{p'}(G)$ 不覆盖 H/K. 因此 $H\Phi O_{p'}(G)/K\Phi O_{p'}(G)\cong H/K$. 由于

$$G_pKO_{p'}(G)/K\Phi O_{p'}(G)\cong$$
$$(G_pKO_{p'}(G)/\Phi O_{p'}(G))/(K\Phi O_{p'}(G)/\Phi O_{p'}(G))$$

为初等交换 p 群且 $G/G_pKO_{p'}(G)$ 为 p' 群，由 Maschke 定理(参见文献[2，Ch Ⅵ，定理 3.9])，存在 $H\Phi O_{p'}(G)/K\Phi O_{p'}(G)$ 在 $G_pKO_{p'}(G)/K\Phi O_{p'}(G)$ 的一个补子群 $M/K\Phi O_{p'}(G)$ 正规于 $G/K\Phi O_{p'}(G)$. 令 $M_1=M\cap O_{p'}(G)G_p$，则 $M_1\lhd G$ 且 M_1 是 p 幂零的. 设 $P_1=M_1\cap G_p$ 为 M_1 的一个 Sylow p 子群，则 $P_1=M\cap G_p$ 也是 M 的一个 Sylow p 子群. 由于 G 为 p 超可解群，$H\Phi O_{p'}(G)/K\Phi O_{p'}(G)\cong H/K$ 为 p 阶群. 因此 $|G_pKO_{p'}(G):M|=p$. 从而

$$|G_p:P_1|=|G_pKO_{p'}(G):P_1KO_{p'}(G)|=$$
$$|G_pKO_{p'}(G):M|=p,$$

即 P_1 为 G 的 Sylow p 子群 G_p 的一个极大子群. 我们下面证明 P_1 在 G 中是 n 嵌入的，从而完成定理的证明. 由于

$$O_{p'}(G)\leqslant M,O_{p'}(G)\leqslant M\cap O_{p'}(G)G_p=M_1,$$

又由 $M_1\leqslant O_{p'}(G)G_p$，有 $O_{p'}(G)$ 为 M_1 的正规 Hall p' 子群，因此 $P_1O_{p'}(G)=M_1\lhd G$. 令 $T=O_{p'}(G)\cap P_1^G$，则 $T\lhd G$ 且 $P_1\cap T=1$. 另一方面，由于

$$P_1T=P_1(O_{p'}(G)\cap P_1^G)=P_1O_{p'}(G)\cap P_1^G=$$
$$M_1\cap P_1^G\lhd G$$

且 P_1^G 为包含 P_1 的 G 的最小正规子群，得 $P_1T=P_1^G$. 因此 P_1 在 G 中是 n 嵌入的，定理得证. □

定理 2.2 设 G 是 p 可解的，且 $p\mid |G|$. 如果 $F_p(G)$ 中包含 $O_{p'}(G)$ 的所有极大子群在 G 中是 n 嵌入的，那么 G 是 p 超可解的.

证明 假设结论不成立，并设 G 为极小阶反例. 通过下列步骤来证明定理结论：

① $O_{p'}(G)=1$，并因此有 $F(G)=O_p(G)=F_p(G)$

假设 $K=O_{p'}(G)\neq 1$. 考虑商群 G/K，显然有 $F_p(G/K)=F_p(G)/K$. 令 M/K 为 $F_p(G/K)$ 的极大子群且满足 $O_{p'}(G/K)\leqslant M/K$. 那么 M 也是 $F_p(G)$ 的包含 $O_{p'}(G)$ 的极大子群. 由题意可知，M 在 G 中是 n 嵌入的. 根据引理 1.1①我们有 M/K 在 G/K 中是 n 嵌入的. 因此 G/K 满足定理条件. 由 G 的极小选择知 G/K 是 p 超可解的，因而 G 也是 p 超可解群的，矛盾.

② $\Phi(G)=1$

若否，令 $L=\Phi(G)\neq 1$. 考虑商群 G/L. 因为 $L=\Phi(G)$，所以有 $F_p(G/L)=F_p(G)/L$. 令 P_1/L 是 $F_p(G/L)$ 的极大子群，则 P_1 是 $F_p(G)$ 的极大子群. 由题意知 P_1 在 G 中是 n 嵌入的，因此由引理 1.1①知 P_1/L 在 G/L 中是 n 嵌入的. 因此 G/L 满足定理条件. 由 G 的选择知 G/L 是 p 超可解的. 由于所有 p 超可解群组成的群类是饱和群系，所以 G 也是 p 超可解的，矛盾.

③ G 的每个包含在 $F(G)$ 中的极小正规子群为 p 阶循环群.

由引理 1.2 知 $F(G)$ 是包含在 $F(G)$ 中 G 的一些极小正规子群的直积. 因为 G 是 p 可解的且

$O_{p'}(G)=1$，由引理 1.3 有 $C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$. 而 $\Phi(G)=1$ 表明了 $F(G)$ 是一个非平凡初等交换 p 群. 因此 $F(G)=C_G(F(G))$. 由引理 1.2，可设 $F(G)=R_1\times R_2\times\cdots\times R_t$，这里 R_i 是 G 的包含在 $F(G)$ 中的极小正规子群，$i=1,2,\cdots,t$. 假设存在某一 i 使得 R_i 不是 p 阶子群. 设 R_i^* 是 R_i 的极大子群，则 $R_1^*\neq 1$. 由 p 群性质，不妨设 R_i^* 为 G 的某个 Sylow p 子群 G_p 的正规子群. 令 $P_1=R_i^*R$，这里 $R=\Pi_{j\neq i}R_j$. 由

$$|F(G):P_1|=|R_iR:R_i^*R|=|R_i:R_i^*|=p$$

知 P_1 为 $F(G)$ 的极大子群. 由题设知 P_1 在 G 中是 n 嵌入的. 由引理 1.1①，P_1/R 在 G/R 中是 n 嵌入的，即存在 G/R 的正规子群 T/R 使得

$$(P_1\cap T)/R\leqslant (P_1/R)_{s(G/R)},$$

$$(P_1T)/R=(P_1/R)^G=P_1^G/R.$$

因为 $R_i^*\neq 1$，则 $(R_i^*)^G=R_i$. 因此 $R_i=R_i^G\leqslant P_1^G=P_1T$. 从而 $F(G)=R_iR=R_iP_1\leqslant P_1T$. 进一步，

$$F(G)=F(G)\cap P_1T=P_1(F(G)\cap T).$$

这表明 $F(G)\cap T$ 不是 P_1 的子群，从而 R 为 $F(G)\cap T$ 的真子群. 显然 $F(G)\cap T\lhd G$，由于 $F(G)/R\cong R_i$ 为 G 的主因子，因而 $F(G)\cap T=F(G)$，即 $P_1\leqslant F(G)\leqslant T$. 这说明 $(P_1\cap T)/R=P_1/R$ 是在 G/R 中 s 拟正规的，从而 P_1 是在 G 中 s 拟正规的. 于是，$R_i^*=P_1\cap R_i$ 在 G 中 s 拟正规. 由引理 1.4 知 $O^p(G)\leqslant N_G(R_i^*)$. 另一方面，$R_i^*\lhd G_p$. 因此 $R_i^*\lhd G=\langle O^p(G),G_p\rangle$. 这与 R_i 为 G 的极小正规子群矛盾，因此必有 $|R_i|=p$，③成立.

④ 最后矛盾

由③知 $F(G)=R_1\times R_2\times\cdots\times R_t$，这里 R_i 是 G 的 p 阶的一些极小正规子群. 对于每个 i，$G/C_G(R_i)=N_G(R_i)/C_G(R_i)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(R_i)$ 的子群且 $\mathrm{Aut}(R_i)$ 是 $p-1$ 阶循环群. 因为所有 p 超可解群组成的群类是饱和群系，所以 $G/\bigcap_{i=1}^{t}(C_G(R_i))$ 是 p 超可解的. 因为 $\bigcap_{i=1}^{t}C_G(R_i)=C_G(F(G))=F(G)$. 而含于 $F(G)$ 内的 G 的所有 G 主因子是 p 阶循环群，故 G 是 p 超可解的. □

参考文献(References)

[1] Guo W. The Theory of Classes of Groups [M]. Beijing/ New York: Science Press/ Kluwer, 2000.

[2] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京:科学出版社,1999.

[3] Ore O. Contributions in the theory of groups of finite order[J]. Duke Math J, 1939, 5: 431-460.

[4] Kegel O. Sylow-gruppen and subnormalteiler endlicher gruppen[J]. Math Z, 1962, 87: 205-221.

[5] Deskins W. On quasinormal subgroups of finite groups [J]. Math Z, 1963, 82: 125-132.

[6] Skiba A N. On weakly *s*-permutable subgroups of finite groups[J]. J Algebra, 2007, 315: 192-209.

[7] Guo W, Shum K P, Skiba A N. *X*-semipermutable subgroups of finite groups[J]. J Algebra, 2007, 315: 31-41.

[8] Li B. On *Π*-property and *Π*-normality of subgroups of finite groups[J]. J Algebra, 2011, 334: 321-337.

[9] Guo W, Skiba A. Finite groups with given *s*-embedded and *n*-embedded subgroups [J]. Journal of Algebra, 2009, 321: 2 843-2 860.

[10] Xie Fengyan, Li Baojun, Luo Gongzhi. Two sufficient conditions for supersovability of finite groups [J]. Journal of Xuzhou Normal University (Natural Science Edition), 2008,26(4):8-10.
谢凤燕,李保军,骆公志. 超可解的两个判别准则[J]. 徐州师范大学学报,2008,26(4):8-10.