

自适应交叉近似结合压缩感知快速求解电大目标宽角度电磁散射问题

曹欣远, 陈明生, 孔 勳, 张 量, 程亮亮, 陈兵兵, 齐 琦

(合肥师范学院电子信息工程学院, 安徽合肥 230601)

摘要: 如何对宽角度激励下各类目标尤其是电大目标的电磁散射特性进行快速分析是计算电磁学一直以来的难点课题之一. 为此提出一种自适应交叉近似结合压缩感知的新方案, 利用压缩感知理论构建一种含多角度信息的新型电磁场激励, 降低矩量法运算次数, 以自适应交叉近似对阻抗矩阵进行低秩分解, 进一步提高单次矩量法的计算效率, 从而最终实现了对电大目标宽角度散射问题的快速求解. 数值实验结果表明, 该方案能在有效缩短运算时间的同时, 依然确保计算结果的准确性.

关键词: 压缩感知; 自适应交叉近似; 电大目标; 宽角度; 矩量法

中图分类号: TN953 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.04.007

引用格式: CAO Xinyuan, CHEN Mingsheng, KONG Meng, et al. Application of adaptive cross approximation combined with compressed sensing to fast solution of electromagnetic scattering problems of electrically large objects over wide angles[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015, 45(4):302-307.

曹欣远, 陈明生, 孔 勳, 等. 自适应交叉近似结合压缩感知快速求解电大目标宽角度电磁散射问题[J]. 中国科学技术大学学报, 2015, 45(4):302-307.

Application of adaptive cross approximation combined with compressed sensing to fast solution of electromagnetic scattering problems of electrically large objects over wide angles

CAO Xinyuan, CHEN Mingsheng, KONG Meng, ZHANG Liang,
CHENG Liangliang, CHEN Bingbing, QI Qi

(School of Electronics and Information Engineering, Hefei Normal University, Hefei 230601, China)

Abstract: Fast analysis of electromagnetic scattering properties of various objects, especially electrically large objects over a wide angle, is always a difficult problem in computational electromagnetics. A new solution using compressed sensing in conjunction with adaptive cross approximation was proposed, and a new incident source including different angle information was constructed based on compressed sensing theory, which could reduce the number of computation times for method of moments. Meanwhile, adaptive cross approximation technique was also introduced to method of moments to form a low rank

收稿日期: 2014-12-10; **修回日期:** 2015-03-06

基金项目: 国家自然科学基金(51477039、51207041), 安徽省自然科学基金(1408085QF104)、安徽省高校自然科学研究重点项目(KJ2014A206), 安徽省学术与技术带头人科研活动经费资助.

作者简介: 曹欣远, 男, 1983年生, 博士/讲师. 研究方向: 电磁散射、信号处理等. E-mail: xycaoBL@163.com

通讯作者: 陈明生, 博士/教授. E-mail: chenms@ustc.edu.cn

decomposition of the impedance matrix. Thus a new scheme was finally formed to rapidly analyze electromagnetic scattering problems for electrically large objects over a wide angle. Numerical results show that this solution can reduce operation time effectively while retaining the accuracy of calculation results.

Key words: compressed sensing; adaptive cross approximation; electrically large object; wide angle; method of moments

0 引言

对宽角度激励下各类目标特别是电大目标的电磁散射特性的快速分析是计算电磁学一直以来的难点课题之一,而随着各国科技和军事化的推进,对于该问题的深入研究已显得越来越迫切和重要。

目前求解电大问题较为常用的方法(如快速多极子(fast multiple method, FMM)^[1]、自适应积分(adaptive integral method, AIM)^[2]以及各类时频域高频近似方法^[3-4]等)尽管已能较为有效地实现对电大目标散射问题的计算,但对于宽角度入射的情况,由于通常只能逐个人射角度分别依次求解,故效率始终偏低。自适应交叉近似(adaptive cross approximation, ACA)^[5]作为一种高效的低秩矩阵分解^[6]方法,凭借着其纯代数操作以及可移植性强等特点,亦可通过与传统矩量法(method of moments, MoM)^[7]相结合来实现对电大目标电磁散射问题的快速求解,然而,在宽角度激励下,该方法由于也需要针对各离散入射角度进行反复迭代运算,故计算效率同样显得相对较低。

对于宽角度电磁散射问题,目前除个别插值逼近方法外,也鲜有特别有效的快速求解方法,若再加之针对电大尺寸目标,则完成高效计算的难度就更大。本项目组在前期研究中曾提出一种将压缩感知(compressed sensing, CS)引入矩量法的宽角度散射问题快速算法^[8],但也尚未能将其推广至电大问题。

本文即在前期工作的基础上,针对快速求解电大目标宽角度散射问题这一课题,提出一种在自适应交叉近似中引入压缩感知的快速解决方案。数值验证实验结果表明,该方案能在不影响最终计算结果准确性的同时,有效减少由于反复求解 ACA 矩阵方程而导致的巨大运算量,从而最终实现对电大目标宽角度电磁散射特性的快速分析计算。

1 ACA 及 CS 基本理论简介

1.1 自适应交叉近似

自适应交叉近似是一种低秩矩阵分解方法,其

基本思想为:将低秩矩阵 $Z_{m \times n}$ 以一对向量组 $U_{m \times r}$ 、 $V_{r \times n}$ 的乘积的形式来近似逼近表示,数学表达式为:

$$Z_{m \times n} \approx U_{m \times r} \cdot V_{r \times n} \quad (r \ll \min(m, n)) \quad (1)$$

ACA 作为一种纯代数方法,可针对任一低秩矩阵进行运算操作,因而具有较强的通用性。

矩量法作为应用最为广泛的电磁场积分方程方法,因其阻抗矩阵的远场组(主要为非对角块)具备低秩特性^[9],故可运用 ACA 以减少计算及存储量。研究^[5,10-11]表明,引入 ACA 后,MoM 的运算复杂度可由 $O(N^2)$ 降为 $O(N)$,甚至更低,因此该方法也成为求解电大问题的有效途径之一,且与 FMM 等方法相比,由于 ACA 并不涉及对核函数的操作处理,因而具备更好的可移植性。

ACA 算法的基本实现过程为:

①初始化:随机抽取低秩矩阵 Z 的一行并搜索该行的最大值及其所在列,由此确定 V 的第一行及 U 的第一列;

②循环体:在 U 的第一列中搜索最大值及其所在位置,依此确定将从 Z 中所抽取的第 2 行,进入循环,持续搜索行或列中最大值及其所在列或行,并由此确定 V 的下一行及 U 的下一列;

③阈值判断:当逼近值 $(U \cdot V)$ 与 Z 的误差(一般利用对 Frobenius 范数的计算得到^[5])小于设定阈值时,算法结束。

由此可见,ACA 仅使用了原低秩矩阵中的少量行、列元素,即可实现对整个矩阵的近似逼近,因而能有效降低计算机对矩阵的存储量以及矩阵与向量间的计算量,故可有效完成对电大问题的求解。尽管如此,在面对电大目标宽角度电磁散射问题时,ACA 由于需针对每个离散入射角度分别进行反复迭代运算,因而整体效率依然较低,在计算时间上亦并无优势可言。

1.2 压缩感知

压缩感知源于对信号的稀疏表示理论^[12],其通过对原始信号进行数次非相干线性观测获得低维投影值,并借助稀疏变换技术建立具有稀疏解的欠定

方程组,最终由求解最优化问题完成对原始信号的精确重构.观测矩阵^[13]、稀疏变换^[14]和恢复算法^[15]是 CS 的三项核心要素.

CS 算法的一般运算过程为:

①利用观测矩阵(Φ)对原始信号(\mathbf{X})进行全局观测,获得数个观测值(s_1, s_2, \dots);

②利用稀疏变换(Ψ)对 \mathbf{X} 进行稀疏表示(\mathbf{A}),建立欠定线性方程组($\Phi\Psi\mathbf{A}=[s_1, s_2, \dots]^T$);

③通过恢复算法求解出 \mathbf{A} 的稀疏近似解 $\hat{\mathbf{A}}$,再利用关系式

$$\hat{\mathbf{X}} = \Psi\hat{\mathbf{A}} \quad (2)$$

最终完成对 \mathbf{X} 的精确重构

由此可见,CS 仅通过对数个信号观测值进行采样即可完成对完整信号的有效恢复,因而能从本质上打破奈奎斯特采样定理对采样率的限制,故被称为信号处理领域的“a big idea”.

2 ACA 结合 CS 方案理论框架

针对快速分析电大目标宽角度电磁散射特性这一课题,提出一种 ACA 结合 CS 的方案,可有效加速对该类问题的求解,以下具体介绍并分析该方案的理论框架以及计算流程.

首先建立宽角度激励下 ACA 的基本矩阵方程:

$$(\mathbf{Z}_N + \mathbf{Z}_F)[\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 \cdots \mathbf{I}_n] = [\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \cdots \mathbf{V}_n] \quad (3)$$

式中, \mathbf{Z}_N 代表近场作用矩阵块(主要为矩阵的对角块),该部分应用传统 MoM 进行精确求解; \mathbf{Z}_F 代表远场作用矩阵块,该部分应用 ACA 进行近似逼近存储; $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_n$ 和 $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ 分别表示第 1~n 个人射角度下的待求电流和激励向量.

再对各入射角度下的激励进行 $m(m \ll n)$ 次线性观测并记观测值为 $V_1^{\text{CS}}, \dots, V_m^{\text{CS}}$, 即,

$$a_{i1} V_1 + a_{i2} V_2 + \dots + a_{in} V_n = V_i^{\text{CS}} (i = 1, \dots, m) \quad (4)$$

若记系数矩阵 $[a_{ij}] (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$ 为 Φ , 观测值矩阵 $[V_1^{\text{CS}} \cdots V_m^{\text{CS}}]^T$ 为 \mathbf{V}^{CS} , 则式(4)可表示为矩阵形式:

$$\Phi \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{\text{CS}} \\ \vdots \\ V_m^{\text{CS}} \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{\text{CS}} \quad (5)$$

引入 ACA 至此观测过程:

$$\Phi \xi_{n \times r} \zeta_{r \times N} = \mathbf{V}^{\text{CS}} \quad (6)$$

式中, $\xi_{n \times r} \zeta_{r \times N} = [\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \cdots \mathbf{V}_n]^T$ 且 $r \ll \min(m, n)$.

将 $\mathbf{V}_1^{\text{CS}}, \dots, \mathbf{V}_m^{\text{CS}}$ 代入式(3),迭代求解出激励观测值 \mathbf{V}^{CS} 所对应的 m 个电流向量(记作 $\mathbf{I}_1^{\text{CS}}, \dots, \mathbf{I}_m^{\text{CS}}$),根据阻抗矩阵不随入射角度变化这一性质,则可得

$$\mathbf{I}_i^{\text{CS}} = a_{i1} \mathbf{I}_1 + a_{i2} \mathbf{I}_2 + \dots + a_{in} \mathbf{I}_n (i = 1, \dots, m) \quad (7)$$

对应的矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^{\text{CS}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m^{\text{CS}} \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

由此便获得了待求宽角度电流向量的 m 个观测值.

接下来便可利用稀疏变换 Ψ 将式(8)转化为欠定线性方程组:

$$(\Phi\Psi) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^{\text{CS}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m^{\text{CS}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中, $[\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n]^T$ 为 $[\mathbf{I}_1 \cdots \mathbf{I}_n]^T$ 在 Ψ 下的稀疏投影.

最后,利用恢复算法高精度还原 $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_n$.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}_n \end{bmatrix} = \min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \right\|_L \quad \text{s. t.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^{\text{CS}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m^{\text{CS}} \end{bmatrix} = \Phi\Psi \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{I}}_n \end{bmatrix} = \Psi \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

综上所述,该 ACA 结合 CS 的宽角度电磁散射问题解决方案在具体计算过程中具备以下两个显著特点:①在 ACA 中通过新型激励($\mathbf{V}_1^{\text{CS}}, \dots, \mathbf{V}_m^{\text{CS}}$)的建立引入 CS(式(4)),使得仅通过 $m(m \ll n)$ 次迭代求解即可精确恢复出 n 个人射角度下的电流,与仅运用 ACA 相比,总运算量显著减少;②在对各激励进行 CS 观测时再次引入 ACA(式(6)),使得在仅获取宽角度激励矩阵的若干行列元素后即可完成观测,而无需计算并存储所有激励元素值,从而进一步减小运算规模.

3 数值算例

考察宽角度范围为 xoy 平面内 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的 TM

入射波(假设沿 αx^+ 方向为 0°), 设置相关电磁参数为: 入射波频率 $f=3 \times 10^9$ Hz, 电磁波传播介质的磁导率 $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, 介电常数 $\epsilon = \epsilon_0 = 1/(36\pi \times 10^9)$ F/m. ACA 逼近误差阈值设为 10^{-3} , 求解迭代方法采用广义最小残量法 (generalized minimum residual method, GMRES)^[16] 并设相应迭代误差上限为 10^{-4} . CS 中的观测矩阵选择高斯随机矩阵^[15], 稀疏变换选择傅里叶基^[17] 和勒让德基^[18], 恢复算法选择正交匹配追踪算法 (orthogonal matching pursuit, OMP)^[19] 程序皆运行在 Pentium(R) Dual-Core CPU 2.10GHz、2GB 内存环境下的 Matlab7.0 平台.

首先考察一半径为 10λ 的无限长二维电大导体圆柱(对其表面按约 $\lambda/10$ 步长剖分), 将宽角度按 0.1° 间隔离散(即离散化为 $0.1^\circ, 0.2^\circ, 0.3^\circ, \dots, 360^\circ$ 等 3 600 个人射角度), 分别应用本文所述算法(以傅里叶基、勒让德基作为稀疏变换时观测次数分别设为 700 次和 500 次为例)以及仅针对每个人射角度反复利用 ACA 计算的方法进行求解, 并对二者的计算结果进行比较, 图 1 为以任一随机入射角度(以 148.6° 为例)下的电流向量为例的计算结果对比图.

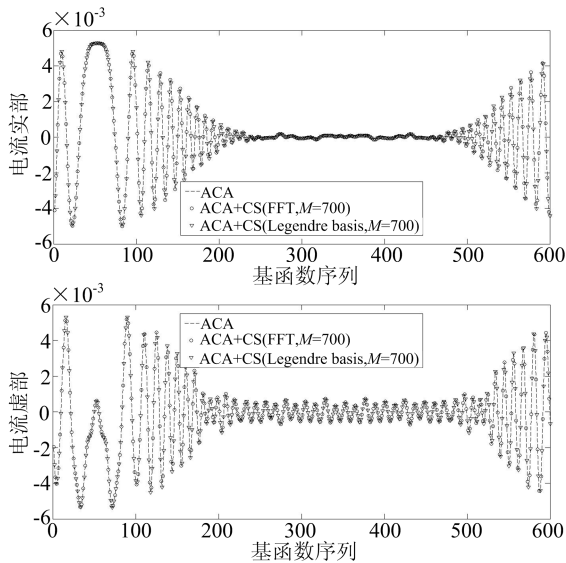


图 1 任一入射角度(以 148.6° 为例)下圆柱表面电流向量计算结果对比图

Fig. 1 Comparison between the recovery results of currents on the surface of the cylinder over a random incident angle take 148.6° for example) with the values calculated by ACA

由图 1 可见, 本文所述方案的计算结果能与 ACA 解完美重合; 再比较勒让德基与傅里叶基恢复误差随观测次数的变化情况, 结果如图 2 所示. 由图

2 可见, 以傅里叶基作为稀疏变换时, 算法在达到 666 次观测后可进入稳定精确重构, 而使用勒让德基时, 稳定精确重构所需最小观测次数还可进一步下降至 475 次. 接下来对 ACA 结合 CS 的方法和仅使用 ACA 求解的运算效率进行比较, 统计各程序的运行时间, 并对使用傅里叶基和勒让德基时算法相对于 ACA 计算结果的误差进行统计, 数据如表 1 所示. 由表 1 可见, ACA 结合 CS 的方案能在不影响最终计算结果精度的同时, 有效缩短实际求解的时间.

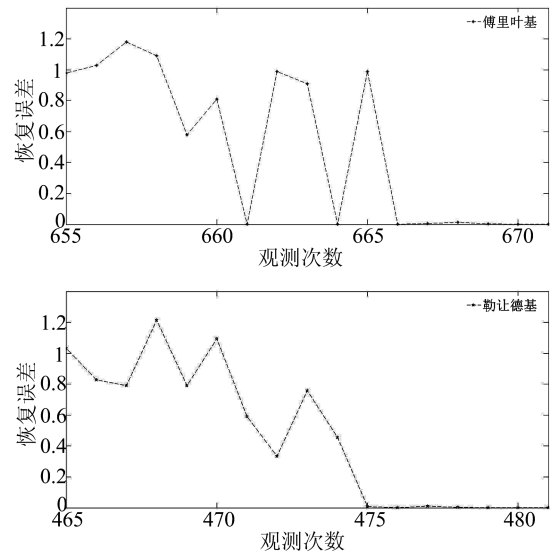


图 2 分别以傅里叶基和勒让德基作为稀疏变换时算法恢复误差随观测次数变化比较图

Fig. 2 Comparison of recovery errors changed with times of measurement while using FFT and Legendre basis as the sparse transform respectively

表 1 计算圆柱导体的程序运行时间及误差统计 (%)
Tab. 1 Statistics of execution time and errors (%) for calculating the case of the cylinder conductor

ACA 算法 用时/s	ACA+CS (傅里叶基)算法		ACA+CS (勒让德基)算法	
	用时/s	相对误差	用时/s	相对误差
3 025.2	1 023.3	2.530×10^{-4}	691.8	5.041×10^{-4}

其次, 考察一电尺寸为 $20\lambda \times 20\lambda$ 的无限长二维电大导体方柱(亦按 $\lambda/10$ 步长进行剖分), 宽角度亦按 0.1° 间隔离散, 同样比较仅应用 ACA 进行计算与 ACA 结合 CS 求解的运算时间和相对误差, 并统计算法在使用傅里叶基和勒让德基时所需的最小观测次数, 结果如表 2 所示. 由表 2 可见, 本文所述方案在计算方柱时也依然能在保证计算结果精度的同

时使运算时间显著减少.再以方柱表面任一点(随机选择的坐标为(3.12,12)的点)上的宽角度电流值为例,绘制二者的计算结果比较图,如图 3 所示(以勒让德基作为稀疏变换为例).由图 3 可见,ACA 结合 CS 方案的计算结果确与 ACA 解精确吻合.

表 2 计算方柱导体的程序运行时间、相对误差及 ACA+CS 算法所需最小观测次数统计
Tab. 2 Statistics of execution time, relative errors and the minimum of times of measurements of ACA+CS for calculating the case of the square cylinder

ACA 算法	ACA+CS (傅里叶基)算法		ACA+CS (勒让德基)算法	
	用时/s	相对误差	用时/s	相对误差
703		492		
4 271.1	1 512.4	8.619×10^{-5}	885.4	1.132×10^{-4}

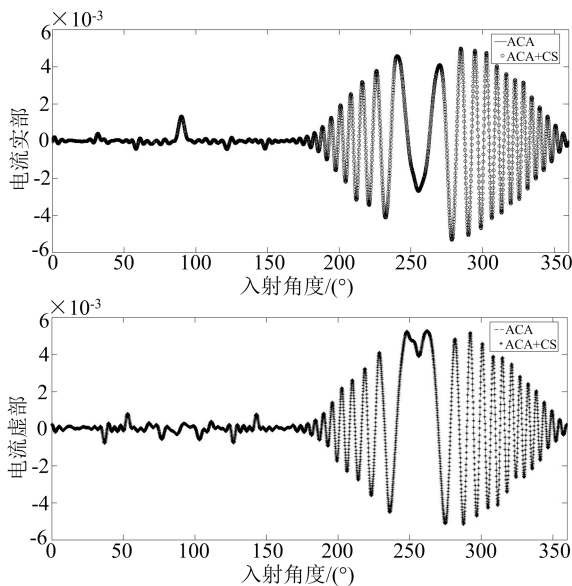


图 3 方柱表面任一点(以点(3.12,12)为例)上的宽角度电流计算结果对比图(勒让德基)

Fig. 3 Comparison of the calculation results of currents over the wide angle on a random point (take (3.12,12) for example) of the square cylinder (Legendre basis)

最后,考察一底边长为 30λ 的无限长二维正三棱柱导体,同样比较 ACA 结合 CS 计算与仅用 ACA 进行求解的程序运行时间和相对误差,并统计傅里叶基和勒让德基对应算法所需最小观测次数,统计结果如表 3 所示;图 4 则以傅里叶基为例.针对不同离散入射角度下的计算结果所绘制的算法相对恢复误差随入射角度变化的曲线图.由表 3 和图

4 可见,对于电大棱柱体,本文所述方案实现了在确保计算结果达到 ACA 解精度的同时大幅缩短了运算时间.

表 3 计算三棱柱导体的程序运行时间、误差及 ACA+CS 算法所需最小观测次数统计
Tab. 3 Statistics of execution time, errors and the minimum of times of measurements of ACA+CS for calculating the case of the triangular prism conductor

ACA 算法	ACA+CS (傅里叶基)算法		ACA+CS (勒让德基)算法	
	用时/s	相对误差	用时/s	相对误差
703		492		
8 781.3	2 976.9	2.379×10^{-5}	1 983.2	3.701×10^{-5}

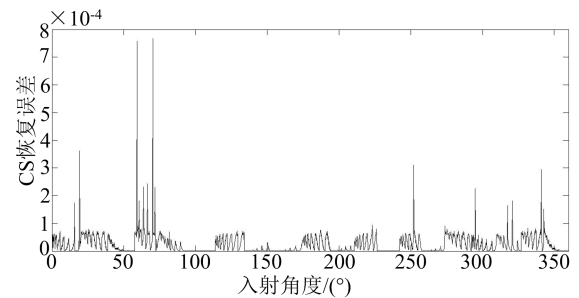


图 4 恢复误差随入射角度变化曲线图

Fig. 4 Relationship between recovery error and incident angle

4 结论

本文针对快速求解电大目标宽角度电磁散射问题,提出了一种 ACA 结合 CS 的解决方案.论文阐述了 CS 和 ACA 的基本理论,推导了二者结合的理论框架.在数值计算部分通过三个典型电大目标电磁散射特性的计算分析,对所提算法进行了验证.结果表明,对于电大目标的宽角度电磁散射特性分析,在 ACA 中引入 CS 技术能够使计算时间得到有效降低,且误差能够满足工程需要.下一步,我们将通过高频方法获取先验知识对相关参数进行测试,并合理选择稀疏变换有效降低观测数目,以促进该方法的进一步推广应用.

参考文献(References)

[1] Yoshida K, Nishimura N, Kobayashi S. Application of new fastmultipole boundary integral equation method to crack problems in 3D[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, 25(4-5): 239-247.

- [2] Ewe W B, Li L W, Chang C S, et al. AIM analysis of scattering and radiation by arbitrary surface-wire configurations [J]. *IEEE Transactions Antennas Propagation*, 2007, 55(1): 162-166.
- [3] Sun E Y, Rusch W V T. Time-domain physical-optics [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1994, 42(1): 9-15.
- [4] Ling H, Chou R, Lee S W. Shooting and bouncing rays: Calculating RCS of an arbitrary cavity[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1989, 37(2): 194-205.
- [5] Frederix K, van Barel M. Solving a large dense linear system by adaptive cross approximation[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, 234(11): 3181-3195.
- [6] Zhang L H, Ma C. Low-rank decomposition and Laplacian group sparse coding for image classification [J]. *Neurocomputing*, 2014, 135(5): 339-347.
- [7] Makarov S. MoM antenna simulations, with Matlab; RWG basis functions [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2001, 43(5): 100-107.
- [8] 杜红梅, 陈明生, 吴先良, 等. 应用压缩传感求解宽角度电磁散射问题 [J]. *计算物理*, 2012, 29(3): 394-398.
Du H M, Chen M S, Wu X L, et al. Compressive sensing for solution of electromagnetic scattering over wide angles [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2012, 29(3): 394-398.
- [9] Markovsky I. Structured low-rank approximation and its applications [J]. *Automatica*, 2008, 44(4): 891-909.
- [10] Bebendorf M. Adaptive cross approximation of multivariate functions [J]. *Constructive Approximation*, 2011, 34(2): 149-179.
- [11] Tamayo J M, Heldring A, Rius J M. Application of multilevel adaptive cross approximation (MLACA) to electromagnetic scattering and radiation problems[C]// *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*. Torino, Italy: INSPEC, 2009:178-181.
- [12] Fang L Y, Li S T. An efficient dictionary learning algorithm for sparse representation [C]// *Chinese Conference on Pattern Recognition*. Chongqing, China: IEEE Press, 2010: 1-5.
- [13] Yu Y, Petropulu A P, Poor H V. Measurement matrix design for compressive sensing-based MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(11): 5338-5352.
- [14] Yan S, Sarin V, Shi W P. Sparse transformations and preconditioners for 3-D capacitance extraction [J]. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2005, 24(9): 1420-1426.
- [15] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles; Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.
- [16] Saad Y, Schultz M H. GMRES; A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. *SIAM Journal of Scientific Statistical Computing*, 1986, 7(3): 856-869.
- [17] Konidaris G, Osentoski S. Value function approximation in reinforcement learning using the Fourier basis [R]. USA: Autonomous Learning Laboratory, Computer Science Department, University of Massachusetts Amherst, 2008.
- [18] Cao X Y, Chen M S, Wu X L. Sparse transform matrices and their application in the calculation of electromagnetic scattering problems [J]. *Chinese Physics Letters*, 2013, 30(2): 028401(1-5).
- [19] Cai T T, Wang L. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2011, 57(7): 4680-4688.