

基于 PS 排队模型的单台流媒体服务器性能分析

谢 鹏,殷保群

(中国科学技术大学自动化系,安徽合肥 230027)

摘要:在有限容量的 M/M/1/N 处理机共享 (processor-sharing, PS) 模型基础上,引入等待队列,建立了单台服务器的性能评价模型.首先,通过求解系统微分方程,推导出稳态下用户平均服务响应时间和平均排队等待时间的表达式;然后,通过引入稳态时平均等待时间阈值和平均服务时间阈值,并按照服务质量好坏由用户评价的原则,提出了一种服务器性能评价方案,为服务器的设计提供了定量参考依据;最后,在并发用户数 $N=1$ 和 $N \rightarrow \infty$ 这两种情况下,计算出性能评价模型中用户平均服务响应时间和平均排队等待时间的值,并与典型的 M/M/1 排队模型以及无限容量的 M/M/1-PS 模型中的相应结果进行了比较.

关键词:处理机共享;排队模型;性能分析;最大并发用户数

中图分类号:TP37 **文献标识码:**A **doi:**10.3969/j.issn.0253-2778.2015.01.011

引用格式: Xie Peng, Yin Baoqun. Performance analysis of single streaming media server based on processor-sharing queue[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015, 45(1): 69-74, 86.

谢鹏,殷保群. 基于 PS 排队模型的单台流媒体服务器性能分析[J]. 中国科学技术大学学报, 2015, 45(1): 69-74, 86.

Performance analysis of single streaming media server based on processor-sharing queue

XIE Peng, YIN Baoqun

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: By introducing a waiting queue, an original performance evaluation model for a single server based on the finite capacity M/M/1/N-PS model was constructed. For this model, two exact expressions were derived for both user's average service response time and average waiting time through solving the differential equation of system. Then the steady-state mean waiting time threshold and mean service time threshold were presented. Also, to provide a scientific quantitative reference for the design of the server, an evaluation method relative to users was proposed to estimate the performance of a server. This evaluation method is based on the principle that server service quality should be evaluated by the users. At last, user's average waiting time and mean response time were calculated in this evaluation model with the number of concurrent users $N=1$ and $N \rightarrow \infty$, respectively. These results were then compared with those of the typical M/M/1 queuing model and the infinite capacity M/M/1-PS model, respectively.

收稿日期:2014-03-25; **修回日期:**2014-05-17

基金项目:国家自然科学基金(61174124, 61233003), 高等学校博士学科点专项科研基金(20123402110029), 安徽省高等学校自然科学基金重点项目(KJ2012A286)资助.

作者简介:谢鹏,男,1986年生,硕士生.研究方向:网络服务性能分析. E-mail: ahxp8607@mail.ustc.edu.cn

通讯作者:殷保群,博士/教授. E-mail: bqyin@ustc.edu.cn

Key words: processor sharing; queuing model; performance analysis; maximum number of concurrent users

0 引言

随着因特网和流媒体技术的飞速发展,流媒体服务器的性能日益成为影响流媒体应用的重要因素.对流媒体服务器性能的分析研究,不仅有利于用户选择合适的服务器,而且有助于搭建测试其性能的平台.

目前,流媒体的评价体系中,流输出能力是评价其服务能力的一个重要指标,流输出能力一般是指服务器支持某一标准码率媒体流的并发服务用户数量.工程中获取这一指标的方案主要有以下几种^[1]:①根据服务器配置及媒体流码率,直接采用除法的方法估计其并发服务数;②从客户端设备中检测和分析服务器的网络流量等信息,并推算出服务器性能;③在服务器上搭建实际的流媒体系统,实际测量其服务能力,从而给出其可支持的并发服务用户数.

除了采用以上工程技术手段评测流媒体服务器性能外,也有一些理论研究方法.其中最典型的是将排队论用于媒体服务系统的建模,这为定量地分析和研究其性能提供了理论依据^[2].

无论是采用工程技术手段,还是采用理论研究方法,均存在诸多不足.工程技术方面,不同的测试软件获得的测试结果可能不同;当服务器的服务能力很强时,实际搭建这样的测试环境会浪费大量的测试资源,测试成本很高^[3].理论研究方面,由于媒体服务系统的工作场景和业务特性等具体真实环境各不相同以及系统排队模型需要对实际环境描述的更精确更接近实际系统,它依然有进一步完善、深入和拓展的必要.

针对以上不足,本文结合媒体服务系统运行的真实环境,建立与之相适应的处理机共享排队模型来刻画系统的运行情况,并通过它来研究系统的性能.由于媒体服务系统设计的最终目标通常是尽可能多的并发用户提供服务,但并发用户数增多势必会影响服务质量,而当服务质量下降时,用户就可能取消服务请求而离开,所以本文通过引入用户评价标准,对系统的服务质量进行评估,在保证一定的服务质量情况下,对系统进行研究,分析获得并发用户数的最大值.

1 PS 排队模型

1.1 M/M/1-PS 模型

处理机共享模型已广泛应用于计算机和通信系统的建模中.模型中同时被服务的每个用户均获得相同的服务器处理能力,但所获处理能力随着服务器服务用户数的变化而变化.

由于物理上很难直接实现 PS 模型,为了便于理解,我们先介绍循环(round-robin, RR)模型.如图 1 所示,用户到达 RR 系统后就按序在队列中等待服务,服务器为用户服务的最大时间为 Q (固定时间片),若 Q 时间内服务完成则用户顺利离开;如未完成,则此用户转至队列尾部等待下一次服务.当 Q 趋于 0 时,RR 模型就变成了如图 2 所示的 PS 模型^[4].

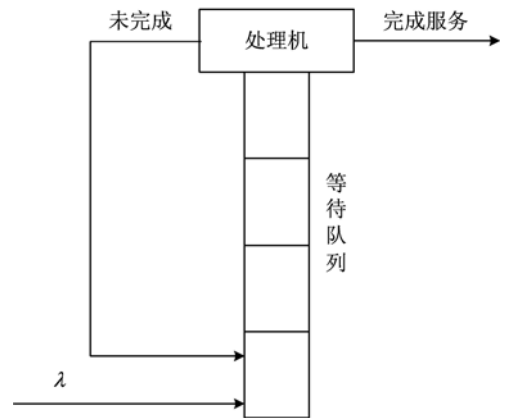


图 1 RR 模型

Fig. 1 The round-robin model

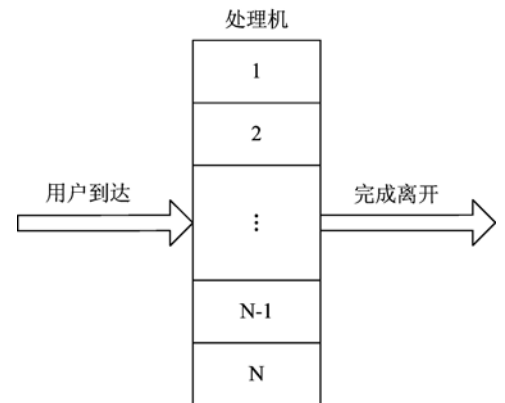


图 2 PS 模型

Fig. 2 The processor-sharing model

假设用户到达为 Poisson 过程, 服务时间服从指数分布, 采用处理机共享机制, 这一模型即为 M/M/1-PS 模型^[4]. Leodard Kleinrock 首先对 M/M/1-PS 模型进行了研究并给出 PS 模型严格的数学定义^[5], 随后 Coffman 等运用 Laplace-Stieltjes 变换方法推导出稳态下用户等待时间 (waiting time) 的期望和方差^[4]. 在文献[4]研究的基础上, Morrison 等使用 Laplace-Stieltjes 反变换方法, 进一步研究并得出响应时间 (response time) 分布的积分表达式^[6]. Guillemin 等则采用一种更新颖的谱理论方法, 导出逗留时间 (sojourn time) 分布的积分表达式^[7]. Akar 对有限容量的 M/M/1-PS 模型中逗留时间的各阶原点矩进行了大量研究^[8]. 同时文献[9]也使用纯代数计算方法得到了逗留时间的各阶原点矩的迭代公式. 其中, 响应时间即为逗留时间, 等于服务时间与等待时间之和.

上述学者对 M/M/1-PS 模型逗留时间的理论研究做出了巨大贡献, 但研究结果对评价实际媒体系统的服务性能意义不大. 本文在上述研究成果的基础上, 通过引入等待队列, 建立单台服务器的性能评价模型. 基于此模型, 求解系统在稳态下用户平均服务响应时间和平均排队等待时间这两个重要参数, 为系统最大并发用户数的研究提供理论依据.

1.2 系统模型描述

服务器性能评价模型假设如下: 系统是基于单播的; 采用处理机共享机制; 一个服务器; 服务器可以同时服务的用户数限制为 N , 即服务区容量为 N ; 每一条流一次只能服务一个用户; 用户到达过程是一个到达率为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程; 用户服务时间服从指数分布. 系统排队模型如图 3 所示, 控制器的作用是根据服务区中已接受服务的用户数目, 控

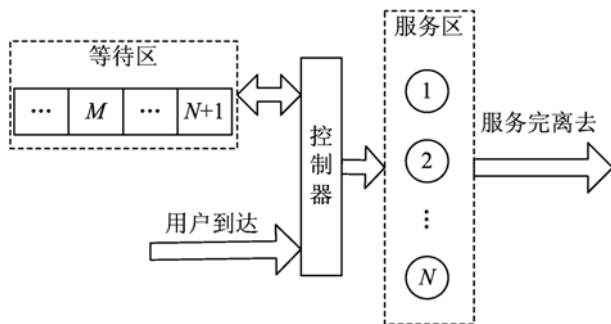


图 3 系统排队模型

Fig. 3 System queuing model

制新到达用户是立即接受服务, 还是在等待区等待. 若已接受服务的用户数目小于 N , 则新到达用户可以立即被服务, 这个用户就变成服务用户; 如果已接受服务的用户数目等于 N , 则新到达用户就必须排队等待, 称这一用户为等待用户. 等待用户进入服务器接受服务的规则为先到先服务 (FCFS), 同时假设等待区的容量无限制. 这个模型即为 M/M/1/N-PS 排队模型.

2 服务器性能分析

用户在系统中逗留的时间由队列等待时间和服务响应时间两部分组成. 其中, 队列等待时间指从用户到达系统时起一直到接受服务时止的这段时间; 服务响应时间指从用户接受服务时起到服务完离开系统时止的这段时间. 显然, 用户的逗留时间等于其队列等待时间与服务响应时间之和.

系统模型中, 控制器执行动作消耗的时间忽略不计.

为研究方便, 选定一新到达用户为目标用户, 并定义五个随机变量 J, K, X, W, S . 其中, J 表示目标用户所需的服务时间; K 表示处于稳态后系统中的用户数目; X, W, S 分别表示稳态下, 目标用户的系统逗留时间, 队列等待时间和服务响应时间. 显然有

$$X = W + S \tag{1}$$

2.1 系统用户数分布

假设用户到达率为 λ , 服务时间服从参数为 $\mu > 0$ 的指数分布, 则服务强度 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. 我们假设 $\rho < 1$, 以使得系统可以达到稳态. 依据处理机共享机制可知, 服务器的服务能力实际上由参数 μ 决定^[4]. 由于 M/M/1/N-PS 排队模型的用户离开过程与典型的 M/M/1 排队模型相同, 所以系统中用户数的稳态分布为^[4]:

$$P\{K = n\} = (1 - \rho) \rho^n, n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

2.2 平均服务响应时间

假设目标用户所需的服务时间为 x , 到达前系统中用户数为 n . 记稳态时用户服务响应时间 S 在 $K = n, J = x$ 条件下的条件分布函数为 $F_n(x, t)$, 即

$$F_n(x, t) = P\{S \leq t \mid K = n, J = x\}, n = 0, 1, 2, \dots, x > 0 \tag{3}$$

条件概率密度为 $f_n(x, t)$, 即

$$f_n(x, t) dt = F_n(x, t + dt) - F_n(x, t),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, x > 0 \quad (4)$$

下面,我们首先根据新用户到达系统,是否能立即接受服务,分两种情况来讨论服务响应时间的分布.

(I) $n=0, 1, \dots, N-1$. 由 1.2 节可知,在 $K=n, J=x$ 条件下, S 的分布与有限容量的 $M/M/1/N$ -PS 模型中的逗留时间分布完全相同. 故由文献[10]可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_n(x, t) = & -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} f_n(x, t) + \lambda [f_{n+1}(x, t) - f_n(x, t)] + \\ & -\frac{\mu n}{n+1} [f_{n-1}(x, t) - f_n(x, t)], \\ & n = 0, 1, \dots, N-2, x > 0 \quad (5) \end{aligned}$$

边界条件为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_{N-1}(x, t) = & -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x} f_{N-1}(x, t) + \\ & \frac{\mu(N-1)}{N} [f_{N-2}(x, t) - f_{N-1}(x, t)] \quad (6) \end{aligned}$$

随机变量 S 在 $K=n, J=x$ 下的条件数学期望为:

$$\begin{aligned} E(S | K = n, J = x) = & \int_0^{+\infty} t f_n(x, t) dt, \\ & n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7) \end{aligned}$$

为方便,简记 $e_n(x) = E(S | K = n, J = x)$.

由式(5), (6)与(7)可得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n+1} \frac{d}{dx} e_n(x) + \lambda [e_{n+1}(x) - e_n(x)] + \\ -\frac{\mu n}{n+1} [e_{n-1}(x) - e_n(x)] = -1, \\ n = 0, 1, \dots, N-2 \quad (8) \end{aligned}$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{N} \frac{d}{dx} e_{N-1}(x) + \\ \frac{\mu(N-1)}{N} [e_{N-2}(x) - e_{N-1}(x)] = -1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$e_n(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(II) $n=N, N+1, \dots$. 由上述可知:

$$F_n(x, t) = F_{N-1}(x, t), \quad n = N, N+1, \dots \quad (10)$$

所以,随机变量 S 在 $K=n, J=x$ 下的条件数学期望 $E(S | K = n, J = x)$ 满足:

$$\begin{aligned} E(S | K = n, J = x) = E(S | K = N-1, J = x), \\ n = N, N+1, \dots \quad (11) \end{aligned}$$

综合两种情况的分析,构造生成函数 $T(x, z)$ 如下:

$$\begin{aligned} T(x, z) = & \sum_{n=0}^{N-1} e_n(x) z^n + \\ & \sum_{n=N}^{+\infty} E(S | K = N-1, J = x) z^n \quad (12) \end{aligned}$$

由式(2)和(12)可得, S 在 $J=x$ 下的条件数学期望为^[10]:

$$E(S | J = x) = (1 - \rho) T(x, \rho) \quad (13)$$

采用文献[11]中的 Laplace 变换方法,由式(5)~(11)可解得

$$\begin{aligned} E(S | J = x) = & \frac{x}{1 - \rho} [1 - \rho^N + N\rho^N(\rho - 1)] + N\rho^N x = \\ & \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho} x \quad (14) \end{aligned}$$

由于用户所需的服务时间服从参数为 μ 的指数分布,即

$$P\{J \leq x\} = 1 - e^{-\mu x}, \quad x > 0 \quad (15)$$

所以

$$\begin{aligned} E(S) = E[E(S | J)] = & \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho} E(J) = \frac{1 - \rho^N}{\mu(1 - \rho)} \quad (16) \end{aligned}$$

2.3 平均排队等待时间

与平均服务响应时间的分析类似,分两种情况讨论. 当 $n=0, 1, \dots, N-1$ 时,由系统模型可知:

$$\begin{aligned} P\{W = 0 | K = n, J = x\} = 1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ (17) \end{aligned}$$

即当目标用户到达系统时,若已接受服务的用户数目小于 N ,目标用户一到达就可以立即被服务,变成服务用户而无需等待.

当 $n=N, N+1, \dots$ 时,随机变量 W 在 $K=n, J=x$ 下的条件数学期望为:

$$\begin{aligned} E(W | K = n, J = x) = (n - N + 1) E(S | J = x) \\ (18) \end{aligned}$$

同理,由式(2), (17)和(18)可得, W 在 $J=x$ 下的条件数学期望为:

$$\begin{aligned} E(W | J = x) = & \sum_{n=N}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n (n - N + 1) E(S | J = x) = \\ & \frac{\rho^N}{1 - \rho} E(S | J = x) \quad (19) \end{aligned}$$

进而可得

$$\begin{aligned} E(W) = E[E(W | J)] = & \frac{\rho^N}{1 - \rho} E(S) = \frac{\rho^N(1 - \rho^N)}{\mu(1 - \rho)^2} \quad (20) \end{aligned}$$

2.4 最大并发用户数

媒体服务系统中,并发用户数与服务质量成反比关系,并发用户数增多会导致服务质量下降,而提高服务质量则需尽量减少并发用户数.同时,在硬件资源及媒体质量一定的前提下,服务质量应该由用户评价.为了使媒体服务系统在保证一定服务质量的前提下,能服务尽可能多的并发用户,应在系统最大并发用户数和服务质量之间寻找一个均衡点.为了评价服务器服务质量好坏,我们引入稳态时平均等待时间阈值和平均服务时间阈值,并通过设定的阈值条件来求解最大并发用户数.

当稳态时顾客平均服务响应时间或顾客平均排队等待时间大于给定的阈值时,均认为服务器服务质量较差,所以在服务质量较好时,服务器能提供的最大并发用户数 N_{max} 应该满足:

$$N_{max} = \max\{N \mid E(S) \leq C_s, E(W) \leq C_w\} \quad (21)$$

式中, C_s 表示设定的平均服务时间阈值, C_w 表示设定的平均等待时间阈值.

3 模型参数对比

下面,在系统参数 $N=1$ 和 $N \rightarrow +\infty$ 条件下,对系统排队模型进行进一步的分析研究,并将分析结果与典型的 M/M/1 排队模型和无容量限制的 M/M/1-PS 模型作比较.

由式(16),(20)有

$$\lim_{N \rightarrow 1} E(S) = \lim_{N \rightarrow 1} \frac{1 - \rho^N}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu} \quad (22)$$

$$\lim_{N \rightarrow 1} E(W) = \lim_{N \rightarrow 1} \frac{\rho^N(1 - \rho^N)}{\mu(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} \quad (23)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho^N}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} \quad (24)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(W) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho^N(1 - \rho^N)}{\mu(1 - \rho)^2} = 0 \quad (25)$$

由此容易看出,当 $N=1$ 时,系统排队模型就是典型的 M/M/1 排队模型.式(22)和(23)中计算的系统平均服务响应时间和排队等待时间与典型的 M/M/1 排队模型中的值完全相同;同时当 $N \rightarrow +\infty$ 时,系统排队模型就是无容量限制的 M/M/1-PS 模型,由于系统无容量限制,所以顾客一到达即接受服务而无需等待,式(25)也验证了这一点.式(24)中计算的系统平均服务响应时间值与文献[4]中计算的完全相同.

4 数值实例

下面,举一个数值实例来说明本文所提方法可以用来分析系统并发用户数的最大值.我们假设

$$\lambda = 4.0/s, \mu = 5.0/s,$$

$$C_s = 0.8 s, C_w = 1.0 s,$$

则 $\rho=0.8$.由式(21)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 - \rho^N}{\mu(1 - \rho)} &\leq C_s \\ \frac{\rho^N(1 - \rho^N)}{\mu(1 - \rho)^2} &\leq C_w \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

进一步解得

$$\log_{\rho} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu(1 - \rho)^2 C_w}}{2} \leq N \leq \log_{\rho} [1 - \mu(1 - \rho) C_s] \quad (27)$$

或

$$\left. \begin{aligned} N &\leq \log_{\rho} [1 - \mu(1 - \rho) C_s] \\ N &\leq \log_{\rho} \frac{1 + \sqrt{1 - 4\mu(1 - \rho)^2 C_w}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

带入各值,由式(27)解得

$$5.76 \leq N \leq 7.21 \quad (29)$$

由式(28)解得

$$\left. \begin{aligned} N &\leq 7.21 \\ N &\leq 1.45 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

综上所述,N的可能取值为 1,6,7,故

$$N_{max} = 7.$$

当 $\lambda=4.0/s, \mu=5.0/s$ 时,用户平均服务响应时间 $E(S)$ 与平均排队等待时间 $E(W)$ 关于并发用户数 N 的理论曲线如图 4 所示,由此对比曲线可以看出,当并发用户数增大时,用户的平均服务响应时

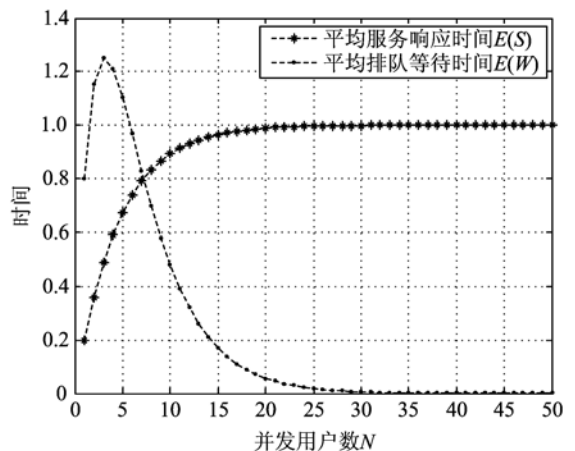


图 4 系统参数理论值

Fig. 4 Theoretical values of $E(S)$ and $E(W)$

间也相应增大,这与 PS 机制相吻合,因为服务器的服务能力被同时服务的各用户平分,同时接受服务的用户数增多,每个用户的服务时间就会增加;相反,当并发用户数增大时,用户的平均排队等待时间则相应减小,因为服务器能同时服务的用户较多,所以用户到达基本不用等待就能接受服务.如图 4 所示,当服务器并发用户数 $N \geq 25$ 时,用户基本不用排队等待,但其平均服务响应时间也接近理论最大值;当我们给定用户的平均等待时间阈值和平均服务时间阈值时,就可在保证一定服务质量的前提下求得服务器的最大并发用户数.

5 仿真实验

仿真步骤如下:首先建立用户到达时刻、请求服务时间和总仿真时间等系统信息,然后对用户进出队列进行仿真,并统计用户进入服务器的时刻和在服务器中逗留的时间,最后计算总仿真时间内完成服务的各用户的等待时间和服务响应时间并求解它们的均值.

假设 $\lambda = 4.0/s$, $\mu = 5.0/s$,采用 Matlab 对并发用户数从 1 到 50 分别进行仿真,各次仿真的总仿真时间均为 10 000 s. $E(S)$ 和 $E(W)$ 的仿真值与理论值对比曲线如图 5 和图 6 所示.由图可以看出,随着并发用户数的增大, $E(S)$ 和 $E(W)$ 仿真值的变化趋势与理论变化趋势完全相同,即随着并发用户数的增大,用户平均服务响应时间将逐渐增大,平均排队等待时间将逐渐变小.同时,针对每个固定的 N , $E(S)$ 和 $E(W)$ 仿真值也与理论值基本相同.此仿真

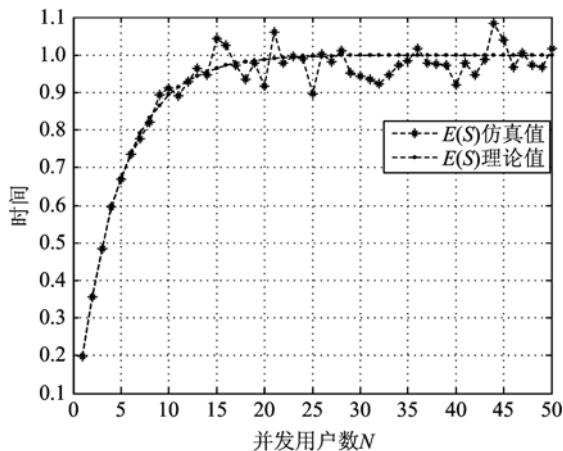


图 5 平均服务响应时间对比图

Fig. 5 Comparison of simulation and theoretical values of $E(S)$

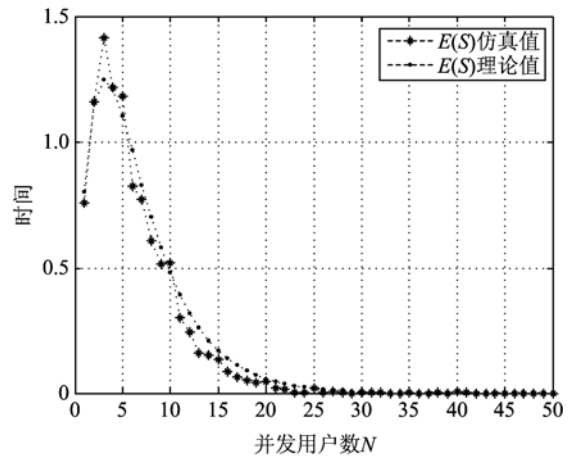


图 6 平均排队等待时间对比图

Fig. 6 Comparison of simulation and theoretical values of $E(W)$

实验也进一步验证了本文所推导的用户平均服务响应时间 $E(S)$ 和平均排队等待时间 $E(W)$ 的正确性.因此,通过设定的阈值条件,即保证一定服务质量前提下,我们能获得并发用户数的最大值.

6 结论

本文基于典型的 M/M/1 排队模型和有容量限制的 M/M/1/N-PS 模型,为单台流媒体服务器构建了一种新颖的性能评价模型.此模型对实际环境的描述更加精确,更加接近实际系统.本文对系统用户数的分布、用户平均服务响应时间和平均排队等待时间,也做了深入研究,并最终给出服务响应时间和排队等待时间期望值的精确表达式,为最大并发用户数的求解提供理论支持.按服务质量好坏由用户评价的原则,本文提出了一种性能评价方案,同时引入两个服务质量指标(稳态时平均等待时间阈值和平均服务时间阈值),并通过这两个阈值条件求解出服务器能同时服务的最大并发用户数;然后研究了系统参数 $N=1$ 和 $N \rightarrow +\infty$ 条件下,用户平均服务响应时间和平均排队等待时间的值,并将分析结果与典型的 M/M/1 排队模型和无限容量的 M/M/1-PS 模型中相应值分别进行了比较;最后,通过仿真实验验证了本文推导过程的正确性并能最大并发用户数的确定提供理论依据,并通过数值实例说明了本文所提方法可以用来分析系统并发用户数的最大值.

(下转第 86 页)