第48卷第8期 中国科学技术大学学报 Vol.48,No.8
2018年8月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Aug. 2018

文章编号:0253-2778(2018)08-0622-09

带一般 Lévy 跳和白噪声干扰的随机三种群食物链模型的生存性分析

曾 婷,滕志东

(新疆大学数学与系统科学学院,新疆乌鲁木齐 830046)

摘要:对一类一般 Lévy 跳和白噪声干扰的随机三种群食物链模型进行生存性分析,得到了全局正解的存在唯一性、最高级种群在均值意义下的持久性以及部分种群灭绝,并且其余种群均值意义下稳定持久性的判别准则.结果显示,Lévy 跳可以明显地改变种群的生存状态,可使得持久的种群灭绝,也可使灭绝的种群持久.

关键词:随机食物链模型;Lévy 跳;白噪声;平均持久性;灭绝性

中图分类号:O175.7 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2018.08.004

2010 Mathematics Subject Classification:92D25

引用格式:曾婷,滕志东.带一般 Lévy 跳和白噪声干扰的随机三种群食物链模型的生存性分析[J].中国科学技术大学学报,2018,48(8):622-630.

ZENG Ting, TENG ZhiDong. Survival analysis of stochastic three-species food chain model with white noises and general Lévy jumps[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018,48(8):622-630.

Survival analysis of stochastic three-species food chain model with white noise and general Lévy jumps

ZENG Ting, TENG Zhidong

(*College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi* 830046, *China*)

Abstract: The survival of a stochastic three species food chain model with white noise and general Lévy jumps was analyzed, which includes existence and uniqueness of global positive solution as well as permanence in the mean of the highest species. Situations where some species are extinct while others are persistent in the mean were also clarified. The results show that Lévy jumps can obviously change the survival of population, which can make the persistent population become extinct, or vice versa.

Key words: stochastic food chain model; Lévy jumps; white noise; permanence in the mean; extinction

0 引言

1927 年英国动物学家 Celton 提出了食物链的概念,即许多物种形成一个由低级到高级的具有捕食低级,而同时又被高级捕食的链条.他认为一个物种的灭绝,可能就会引起这个物种所在的食物链的破坏,进而影响到整个生态系统的动态平衡.因此,食物链模型的研究对自然环境的保护以及生态系统

收稿日期:2017-06-05;**修回日期**:2017-07-18

基金项目:新疆维吾尔自治区重点实验室开放课题(2016D03022)资助.

作者简介:曾婷,女,1992 年生,硕士生.研究方向:常微分方程及其应用.E-mail:misunderzeng@163.com

通讯作者:滕志东,博士/教授.E-mail:zhidong1960@163.com

的平衡显得尤为重要，而且意义深刻.目前，许多学者在这一方面开展了深入细致的研究工作，参见文献[1-5]及其参考文献.

对于一类具有三个种群的食物链系统，即种群 x_3 捕食种群 x_2，而种群 x_2 又捕食种群 x_1，用图形可表示为 $x_1 \to x_2 \to x_3$.Goh 等[4]提出了如下描述三种群食物链系统的动力学模型：

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{d}x_1 = x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)\mathrm{d}t,\\
&\mathrm{d}x_2 = x_2(-r_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3)\mathrm{d}t,\\
&\mathrm{d}x_3 = x_3(-r_3 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3)\mathrm{d}t
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中，$x_1(t)$，$x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 分别表示 t 时刻的三个种群的密度；r_1，r_2 和 r_3 分别表示三个种群的内禀增长率或者死亡率；$a_{ii}(i=1,2,3)$ 分别为三个种群的内部竞争系数；a_{12} 和 a_{23} 分别表示种群 x_1 和 x_2 被种群 x_2 和 x_3 所捕食的损失率；a_{21} 和 a_{32} 分别表示种群 x_2 和 x_3 捕食种群 x_1 和 x_2 所获得的自身增长率.出于其生物背景考虑，该模型假定所有这些系数是正的.作者得到了：当 $r_1 - \dfrac{a_{11}}{a_{21}}r_2 - \dfrac{a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}}{a_{21}a_{32}}r_3 > 0$，模型(1)存在唯一的正平衡点，且是全局渐近稳定的.

由于在自然界中随机现象无处不在.文献[2]提出了一类种群的内禀增长率或死亡率受白噪声干扰的随机三种群食物链动力学模型(即模型(2)中 $c_i(u)=0, i=1,2,3$ 的情形)，并对模型的随机动力学性质进行了研究.进一步地，文献[5]则同时考虑引入捕获因素，并研究了这类随机食物链模型的最优捕获问题.

如果考虑一些突然的剧烈的环境冲击对模型的影响，目前公认的解决办法就是在原模型的基础上引入 Lévy 跳[6].近年来，带有 Lévy 跳的种群动力学模型由于其广泛的应用背景被众多的学者所研究，参见文献[6-10]及其参考文献.此外，也有不少学者将这种噪声引入到传染病模型中[11-13].本文我们考虑如下同时具有白噪声和 Lévy 跳干扰的随机三种群食物链动力学模型：

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}x_1(t) =&\ x_1(t^-)(r_1 - a_{11}x_1(t^-) - a_{12}x_2(t^-))\mathrm{d}t + \sigma_1 x_1(t^-)\mathrm{d}B_1(t) + \int_{\mathbb{Y}} c_1(u)x_1(t^-)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\\
\mathrm{d}x_2(t) =&\ x_2(t^-)(-r_2 + a_{21}x_1(t^-) - a_{22}x_2(t^-) - a_{23}x_3(t^-))\mathrm{d}t - \sigma_2 x_2(t^-)\mathrm{d}B_2(t) + \int_{\mathbb{Y}} c_2(u)x_2(t^-)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\\
\mathrm{d}x_3(t) =&\ x_3(t^-)(-r_3 + a_{32}x_2(t^-) - a_{33}x_3(t^-))\mathrm{d}t - \sigma_3 x_3(t^-)\mathrm{d}B_3(t) + \int_{\mathbb{Y}} c_3(u)x_3(t^-)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中，$x_i(t^-)$ $(i=1,2,3)$ 表示 $x_i(t)$ 在时刻 t 的左极限；$B_i(t)$ $(i=1,2,3)$ 是定义在一个完备概率空间上的标准 Brownian 运动，σ_i^2 表示白噪声干扰的强度；函数 $c_i(u)$ 表示 Lévy 跳对物种 $x_i(t)$ 的影响程度，通常要求 $c_i(u) > -1$ 且有界；$N(\cdot,\cdot)$ 是强度为 λ 的 Poisson 随机过程，且定义为 $N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u) = \lambda(\mathrm{d}u)\mathrm{d}t + \widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)$[14]，其中 $\widetilde{N}$ 是 N 的补偿随机测度；$\mathbb{Y}$ 是 $(0,\infty)$ 中的一个可测子集，满足 $\lambda(\mathbb{Y}) < \infty$.本文始终假定 $B(\cdot)$ 与 $N(\cdot,\cdot)$ 是相互独立的.同样地，出于其生物背景考虑，在这里我们假定所有系数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是正的.

绝大多数的学者都是将补偿型的 Lévy 跳引入到模型中[6-10].一般跳 $N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)$ 是相对于补偿跳 $\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)$ 更复杂的跳过程[14-15]，目前只有少数学者将其引入到模型中进行讨论[16-17].本文研究的是带一般 Lévy 跳的随机食物链模型(2).对于确定性模型(1)，易知当其处于低等的物种灭绝时，必然会导致其食物链上的高等的物种也灭绝.同样的，如果食物链模型(2)中 $c_i(u)=0$，即只受白噪声影响时，根据文献[5，引理 5]，这种性质依然存在.然而，当食物链系统受到一般 Lévy 跳影响时，当低等的物种灭绝时，其食物链上的高等的物种却依旧可以有生存甚至均值持久的可能性.本文将对模型(2)的全局正解的存在唯一性、平均持久性和灭绝性开展研究，并建立相应的判别准则.

1　预备知识

记 $R_+ = [0,\infty)$ 和 $R_+^n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i \geq 0, i=1,2,\cdots,n\}$.为研究方便，对模型(2)我们

引入如下记号：

$$\theta_1 = r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} + \int_{\mathbb{Y}} \ln(1 + c_1(u))\lambda(\mathrm{d}u),$$

$$\theta_i = -r_i - \frac{\sigma_i^2}{2} + \int_{\mathbb{Y}} \ln(1 + c_i(u))\lambda(\mathrm{d}u), i = 2,3,$$

和如下假设：

(H_1) 存在正常数 k_i 使得对任意的 $u \in \mathbb{Y}$，$c_i(u) > -1$，$(i=1,2,3)$ 和

$$\int_{\mathbb{Y}} (|\ln(1 + c_i(u))| \vee |\ln(1 + c_i(u))|^2)\lambda(\mathrm{d}u) < k_i,$$
$$i = 1,2,3.$$

假设(H_1)说明在模型(2)中 Lévy 跳不是非常大，并且 $-1 < c_i(u) < 0$ 表示该突发噪音迫使第 i 个物种减少，而当 $c_i(u) > 0$ 则意味着第 i 个物种的增加.

考虑如下一般形式的随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t) = f(t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}B(t) + \int_{\mathbb{Y}} c(t,u)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\ x(0) = x_0 \tag{3}$$

式中，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 则对任给的 Lyapunov 函数 $V \in C^{2,1}(R^n \times R_+; R_+)$，方程(3)有如下推广的伊藤公式[14]：

$$\mathrm{d}V(x(t),t) = LV(x(t),t)\mathrm{d}t + V_x(x(t),t)g(t)\mathrm{d}B(t) + \int_{\mathbb{Y}} (V(x(t) + c(t,u),t) - V(x(t),t))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u).$$

这里算子 LV 定义如下：

$$LV(x,t) = V_t(x,t) + V_x(x,t)f(t) + \frac{1}{2}\mathrm{trac}(g^{\mathrm{T}}(t)V_{xx}(x,t)g(t)) + \int_{\mathbb{Y}} (V(x + c(t,u),t) - V(x,t))\lambda(\mathrm{d}u) \tag{4}$$

式中，$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$，$V_x = (\frac{\partial V}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n})$，$V_{xx} = (\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j})_{n\times n}$.

关于模型(2)的正解的依概率 1 平均持久性、稳定性和灭绝性，有如下定义：

定义 1.1[18] 对于系统(2)的任何正解 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$，有

①如果对某个 $i = 1,2,3$，

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i(s)\mathrm{d}s > 0 \text{ a.s.},$$

则称 $x_i(t)$ 是依概率 1 平均持久的.

②如果对某个 $i = 1,2,3$，$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i(s)\mathrm{d}s = k > 0$ a.s.，则称 $x_i(t)$ 是依概率 1 在平均值意义下稳定的，其中 k 为正常数.

③如果存在正常数 $b_i (i=1,2,3)$ 使得

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{3} x_i^{b_i}(t) = 0 \text{ a.s.},$$

则称模型(2)是依概率 1 非持久的.

引理 1.1[19] 设 $M(t)$ 为初值 $M(0)=0$ 的局部鞅，若 $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\langle M,M\rangle(t) < \infty$ a.s.，其中 $\langle M,M\rangle(t)$ 为 $M(t)$ 的二次变分，则有 $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}M(t) = 0$ a.s..

引理 1.2[8] 设 $z(t)$ 和 $h(t)$ 是定义在 $t \geqslant 0$ 上的局部可积随机过程，且 $\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t} = 0$ a.s..

①若存在正常数 T, δ 和 δ_0 使得对任意的 $t > T$ 有

$$\ln z(t) \geqslant \delta t - \delta_0 \int_0^t z(s)\mathrm{d}s + h(t) \text{ a.s.},$$

则有 $\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t z(s)\mathrm{d}s \geqslant \frac{\delta}{\delta_0}$ a.s. .

②若存在正常数 T 和 δ_0 使得对任意的 $t > T$ 有

$$\ln z(t) \leqslant \delta t - \delta_0 \int_0^t z(s)\mathrm{d}s + h(t) \text{ a.s.},$$

则当 $\delta > 0$ 时，有 $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t z(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{\delta}{\delta_0}$ a.s.；当 $\delta \leqslant 0$ 时，有 $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ a.s. .

③若存在正常数 T, δ 和 δ_0 使得对任意的 $t > T$ 有

$$\ln z(t) = \delta t - \delta_0 \int_0^t z(s)\mathrm{d}s + h(t) \text{ a.s.},$$

则有 $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t z(s)\mathrm{d}s = \frac{\delta}{\delta_0}$ 和 $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln z(t)}{t} = 0$ a.s..

2 全局正解的存在唯一性

根据实际生物背景，研究模型(2)的动力学性质，首先要保证模型的具有正初始值的解整体存在，且非负. 为此我们首先给出模型(2)存在唯一全局正解的判别准则.

定理 2.1 假设(H_1)成立，则对任何初始值 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) \in R_+^3$，模型(2)几乎确定地存在唯一全局正解 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in R_+^n$.

证明 我们采用文献[20]中利用 Lyapunov 函数证明全局正解存在唯一性的方法，证明模型(2)的解在有限时间内不会爆破，从而保证全局正解的存

在性.

由于模型(2)的系数满足局部 Lipschitz 条件，故对于任意的初始值$(x_1(0),x_2(0),x_3(0))\in R_+^3$，模型(2)在$[0,\tau_e)$上存在唯一的局部正解$(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$，其中$\tau_e$是爆破时刻.只需证明$\tau_e=\infty$ a.s.，则解就是全局存在的.取整数m_0足够大使得$(x_1(0),x_2(0),x_3(0))$的每一个分量都落于区间$[\frac{1}{m_0},m_0]$，对于任何整数$m\geqslant m_0$，定义停时：$\tau_m=\inf\{t\in[0,\tau_e):x_1(t)\notin(\frac{1}{m},m)$ or $x_2(t)\notin(\frac{1}{m},m)$ or $x_3(t)\notin(\frac{1}{m},m)\}$.其中约定$\inf\varnothing=\infty$.显然$\tau_m$关于$m$是递增的.设$\tau_\infty=\lim\limits_{m\to\infty}\tau_m$.则有$\tau_\infty\leqslant\tau_e$ a.s..若能证明$\tau_\infty=\infty$ a.s.，则必然有$\tau_e=\infty$.因此我们只需要去证明$\tau_\infty=\infty$ a.s..采用反证法，若不然，则存在常数$T>0$和$0<\epsilon<1$使得有$P\{\tau_\infty\leqslant T\}>\epsilon$成立.因此存在整数$m_1\geqslant m_0$，当$m\geqslant m_1$时，有$P\{\tau_m\leqslant T\}>\epsilon$.

定义一个C^2 Lyapunov 函数V如下：

$$V(x)=a_{32}[a_{21}(x_1-1-\ln x_1)+a_{12}(x_2-1-\ln x_2)]+a_{23}a_{12}(x_3-1-\ln x_3),$$

这里$x=(x_1,x_2,x_3)$.由于$u-1-\ln u\geqslant 0$对任何$u>0$，可保证函数V的非负性.由推广的伊藤公式(4)可得

$$\begin{aligned}dV(x)=&LV\mathrm{d}t+a_{32}a_{21}\sigma_1(x_1-1)\mathrm{d}B_1(t)+\\&\int_Y a_{32}a_{21}(c_1(u)x_1-\ln(1+c_1(u)))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)+\\&a_{32}a_{12}\sigma_2(x_2-1)\mathrm{d}B_2(t)+\\&\int_Y a_{32}a_{12}(c_2(u)x_2-\ln(1+c_2(u)))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)+\\&a_{23}a_{12}\sigma_3(x_3-1)\mathrm{d}B_3(t)+\\&\int_Y a_{23}a_{12}(c_3(u)x_3-\ln(1+c_3(u)))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}LV=&a_{32}a_{21}(x_1-1)(r_1-a_{11}x_1-a_{12}x_2)+\\&a_{32}a_{12}(x_2-1)(-r_2+a_{21}x_1-a_{22}x_2-a_{23}x_3)+\\&a_{23}a_{12}(x_3-1)(-r_3+a_{32}x_2-a_{33}x_3)+\\&0.5a_{32}a_{21}\sigma_1^2+0.5a_{32}a_{12}\sigma_2^2+0.5a_{23}a_{12}\sigma_3^2+\\&\int_Y a_{32}a_{21}(c_1(u)x_1-\ln(1+c_1(u)))\lambda(\mathrm{d}u)+\\&\int_Y a_{32}a_{12}(c_2(u)x_2-\ln(1+c_2(u)))\lambda(\mathrm{d}u)+\\&\int_Y a_{23}a_{12}(c_3(u)x_3-\ln(1+c_3(u)))\lambda(\mathrm{d}u).\end{aligned}$$

出于简单起见，我们在$x(t^-)$中省去了t^-.有

$$\int_Y[c_i(u)x_i-\ln(1+c_i(u))]\lambda(\mathrm{d}u)\leqslant x_i\int_Y|c_i(u)|\lambda(\mathrm{d}u)+\int_Y|\ln(1+c_i(u))|\lambda(\mathrm{d}u).$$

由此整理可得

$$\begin{aligned}LV\leqslant&a_{32}a_{21}(-r_1+0.5\sigma_1^2+\int_Y|\ln(1+c_1(u))|\lambda(\mathrm{d}u))+\\&a_{32}a_{12}(r_2+0.5\sigma_2^2+\int_Y|\ln(1+c_2(u))|\lambda(\mathrm{d}u))+\\&a_{23}a_{12}(r_3+0.5\sigma_3^2+\int_Y|\ln(1+c_3(u))|\lambda(\mathrm{d}u))+\\&x_1(a_{32}a_{21}r_1+a_{32}a_{21}a_{11}-a_{32}a_{12}a_{21}+a_{32}a_{21}\int_Y|c_1(u)|\lambda(\mathrm{d}u))+\\&x_2(-a_{32}a_{12}r_2+a_{32}a_{21}a_{12}+a_{32}a_{12}a_{22}-a_{23}a_{12}a_{32}+a_{32}a_{12}\int_Y|c_2(u)|\lambda(\mathrm{d}u))+\\&x_3(-a_{23}a_{12}r_3+a_{32}a_{12}a_{23}+a_{23}a_{12}a_{33}+a_{23}a_{12}\int_Y|c_3(u)|\lambda(\mathrm{d}u))-\\&a_{32}a_{21}a_{11}x_1^2-a_{32}a_{12}a_{22}x_2^2-a_{23}a_{12}a_{33}x_3^2,\end{aligned}$$

根据假设(H_1)，我们能得到，存在一正常数M，使得对任何$x_i\geqslant 0\ (i=1,2,3)$，$LV\leqslant M$.

从 0 到$\tau_m\wedge T$积分得

$$\begin{aligned}V(x(\tau_m\wedge T))-V(x(0))\leqslant&\int_0^{\tau_m\wedge T}M\mathrm{d}t+\int_0^{\tau_m\wedge T}a_{32}a_{21}\sigma_1(x_1-1)\mathrm{d}B_1(t)+\\&\int_0^{\tau_m\wedge T}a_{32}a_{12}\sigma_2(x_2-1)\mathrm{d}B_2(t)+\int_0^{\tau_m\wedge T}a_{23}a_{12}\sigma_3(x_3-1)\mathrm{d}B_3(t)+\\&\int_0^{\tau_m\wedge T}\int_Y a_{32}a_{21}(c_1(u)x_1-\ln(1+c_1(u)))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)+\\&\int_0^{\tau_m\wedge T}\int_Y a_{32}a_{12}(c_2(u)x_2-\ln(1+c_2(u)))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)+\\&\int_0^{\tau_m\wedge T}\int_Y a_{23}a_{12}(c_3(u)x_3-\ln(1+c_3(u)))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\end{aligned}$$

对上式两端取期望，可得

$$EV(x(\tau_m\wedge T))\leqslant V(x(0))+ME(\tau_m\wedge T)\leqslant V(x(0))+MT\tag{5}$$

对于$m\geqslant m_1$，设$\Omega_m=\{\tau_m\leqslant T\}$，则有$P(\Omega_m)\geqslant\epsilon$.又由于对每个$\omega\in\Omega_m$，必存在某个$i\in\{1,2,3\}$使得$x_i(\tau_m,\omega)=m$或者$x_i(\tau_m,\omega)=\frac{1}{m}$，从而有

$$V(x(\tau_m,\omega))\geqslant \min\{m-1-\ln m,\frac{1}{m}-1-\ln\frac{1}{m}\}.$$

结合式(5)可得

$$EV(x(\tau_m\wedge T))\geqslant E(1_{\Omega_m}V(x(\tau_m)))\geqslant \epsilon(m-1-\ln m)\wedge(\frac{1}{m}-1-\ln\frac{1}{m}),$$

这里 1_{Ω_m} 为 Ω_m 的示性函数.当 $m\to\infty$ 时,由上式可得 $EV(x(\tau_m\wedge T))\to\infty$,这就与式(5)相矛盾.因此,必有 $\tau_\infty=\infty$ a.s.,即正解是全局存在唯一的.证毕.

3 持久性与灭绝性

这里依照定义 1.1 给出的均值持久性和灭绝性的定义来得到模型解的持久性和灭绝性.首先有

引理 3.1 假设 $\theta_1>0$,$\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2>0$ 和 $\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2+\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}a_{32}}\theta_3>0$.则对任意初始值 $(x_1(0),x_2(0),x_3(0))\in R_+^3$,模型(2)的解 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ 满足 $\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{\ln x_i(t)}{t}\leqslant 0$ a.s., $i=1,2,3$.

证明 设

$$\left.\begin{aligned}&M_{1i}(t)=\sigma_i\int_0^t \mathrm{d}B_i(s),\\&M_{2i}(t)=\int_0^t\int_{\mathbf{Y}}\ln(1+c_i(u))\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),\ i=1,2,3\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

则 $M_{1i}(t)$ 和 $M_{2i}(t)$ 是实值局部平方可积鞅,其二次变分为

$$\langle M_{1i},M_{1i}\rangle(t)=\int_0^t\sigma_i^2\mathrm{d}s=\sigma_i^2 t,$$

$$\langle M_{2i},M_{2i}\rangle(t)=\int_0^t\int_{\mathbf{Y}}[\ln(1+c_i(u))]^2\lambda(\mathrm{d}u)\leqslant k_i t\ \text{a.s.}.$$

根据引理 1.1,有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_{1i}(t)}{t}=0,\ \lim_{t\to\infty}\frac{M_{2i}(t)}{t}=0\ \text{a.s.}\ i=1,2,3\tag{7}$$

对于 $x_1(t)$,由随机微分方程的比较原理,得

$$x_1(t)\leqslant\Phi_1(t)\tag{8}$$

对一切 $t\geqslant 0$,其中 $\Phi_1(t)$ 满足:

$$\mathrm{d}\Phi_1(t)=\Phi_1(t)(r_1-a_{11}\Phi_1(t))\mathrm{d}t+\sigma_1\Phi_1(t)\mathrm{d}B_1(t)+\int_{\mathbf{Y}}c_1(u)\Phi_1(t)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),$$

$$\Phi_1(0)=x_1(0).$$

对 $\ln\Phi_1(t)$ 应用伊藤公式可得

$$\ln\Phi_1(t)=\ln\Phi_1(0)+\theta_1 t-a_{11}\int_0^t\Phi_1(s)\mathrm{d}s+M_{11}(t)+M_{21}(t)\tag{9}$$

由引理 1.2 可知,若 $\theta_1>0$, 则有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\Phi_1(t)}{t}=0,\ \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Phi_1(s)\mathrm{d}s=\frac{\theta_1}{a_{11}}\ \text{a.s.}\tag{10}$$

因此,有

$$\left.\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x_1(t)}{t}\leqslant 0,\\&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\theta_1}{a_{11}}\ \text{a.s.}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

对于 $x_2(t)$,由随机微分方程的比较原理,易知

$$x_2(t)\leqslant\Phi_2(t)\tag{12}$$

对一切 $t\geqslant 0$,其中 $\Phi_2(t)$ 满足:

$$\mathrm{d}\Phi_2(t)=\Phi_2(t)(-r_2+a_{21}\Phi_1(t)-a_{22}\Phi_2(t))\mathrm{d}t-\sigma_2\Phi_2(t)\mathrm{d}B_2(t)+\int_{\mathbf{Y}}c_2(u)\Phi_2(t)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),$$

$$\Phi_2(0)=x_2(0).$$

对 $\ln\Phi_2(t)$ 应用伊藤公式可得

$$\ln\Phi_2(t)=\ln\Phi_2(0)+\theta_2 t+a_{21}\int_0^t\Phi_1(s)\mathrm{d}s-a_{22}\int_0^t\Phi_2(s)\mathrm{d}s-M_{12}(t)+M_{22}(t)\tag{13}$$

从式(10)得知:

$$\frac{1}{t}\int_0^t\Phi_1(s)\mathrm{d}s=\frac{\theta_1}{a_{11}}+\varphi_1(t)\ \text{a.s.},$$

其中 $\varphi_1(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_1(t)=0$.于是 $\int_0^t\Phi_1(s)\mathrm{d}s=\frac{\theta_1}{a_{11}}t+\varphi_1(t)t$.于是由式(13)我们进一步得到

$$\ln\Phi_2(t)=(\theta_2+a_{21}\frac{\theta_1}{a_{11}})t-a_{22}\int_0^t\Phi_2(s)\mathrm{d}s+h(t),$$

其中

$$h(t)=\ln\Phi_2(0)+a_{21}\varphi_1(t)t-M_{12}(t)+M_{22}(t).$$

由式(11)得知: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t}=0$.由于 $\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2>0$,故由引理 1.2 得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Phi_2(s)\mathrm{d}s=\frac{a_{21}\theta_1+a_{11}\theta_2}{a_{11}a_{22}}>0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\Phi_2(t)}{t}=0\ \text{a.s.}.$$

因此,有

$$\left.\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x_2(t)}{t}\leqslant 0,\\&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\theta_1 a_{21}+\theta_2 a_{11}}{a_{11}a_{22}}\ \text{a.s.}\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

对于 $x_3(t)$，由随机微分方程的比较原理，得知

$$x_3(t)\leqslant\Phi_3(t)\tag{15}$$

对一切 $t\geqslant 0$，其中 $\Phi_3(t)$ 满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi_3(t)=&\Phi_3(t)(-r_3+a_{32}\Phi_2(t)-\\&a_{33}\Phi_3(t))\mathrm{d}t-\sigma_3\Phi_3(t)\mathrm{d}B_3(t)+\\&\int_Y c_3(u)\Phi_3(t)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\\\Phi_3(0)=&x_3(0).\end{aligned}$$

对 $\ln\Phi_3(t)$ 应用伊藤公式可得

$$\begin{aligned}\ln\Phi_3(t)=&\ln\Phi_3(0)+\theta_3 t+a_{32}\int_0^t\Phi_2(s)\mathrm{d}s-\\&a_{33}\int_0^t\Phi_3(s)\mathrm{d}s-M_{13}(t)+M_{23}(t)\end{aligned}\tag{16}$$

同理可证，当 $\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2+\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}a_{32}}\theta_3>0$ 时可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Phi_3(s)\mathrm{d}s=\frac{\theta_1 a_{21}a_{32}+\theta_2 a_{11}a_{32}+\theta_3 a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}}>0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\Phi_3(t)}{t}=0\ \text{a.s.}.$$

因此，有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x_3(t)}{t}\leqslant 0,$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\theta_1 a_{21}a_{32}+\theta_2 a_{11}a_{32}+\theta_3 a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}}\ \text{a.s.}\tag{17}$$

从式(11)，(14)和(17)，我们最终得到

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x_i(t)}{t}\leqslant 0\ \text{a.s.},\ i=1,2,3,$$

并且所有正解在均值意义下是依概率 1 最终有界的.证毕.

定理 3.1　设 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ 是模型(2)满足初始值 $(x_1(0),x_2(0),x_3(0))\in R_+^3$ 的解，则有

① 如果 $\theta_1>0,\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2>0,\theta_3>0$ 和 $\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2+\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}a_{32}}\theta_3>0$，则 $x_3(t)$ 是依概率 1 在均值意义下持久的，即：存在常数 $\bar{x}_3>0$ 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s\geqslant\bar{x}_3\ \text{a.s.}.$$

②如果 $\theta_i<0(i=1,2,3)$，则 $x_i(t)\ (i=1,2,3)$ 依概率 1 都灭绝，即：$\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=0$ a.s. $(i=1,2,3)$.

③如果 $\theta_1>0,\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2<0$ 和 $\theta_3<0$，则 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 依概率 1 灭绝，而 $x_1(t)$ 依概率 1 在均值意义下稳定，即 $\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=0$ a.s. $(i=2,3)$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s=\frac{\theta_1}{a_{11}}$ a.s. .

④如果 $\theta_1<0,\theta_2>0$ 和 $\theta_2+\frac{a_{22}}{a_{32}}\theta_3<0$，则 $x_1(t)$ 和 $x_3(t)$ 依概率 1 灭绝，而 $x_2(t)$ 依概率 1 在均值意义下稳定.

⑤如果 $\theta_1<0,\theta_2<0$ 和 $\theta_3>0$，则 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 依概率 1 灭绝，而 $x_3(t)$ 依概率 1 在均值意义下稳定.

⑥如果 $\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2+\frac{a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}}{a_{21}a_{32}}\theta_3<0$，则模型(2)的解是依概率 1 非持续的，即 $\lim\limits_{t\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{3}x_i^{b_i}(t)=0$ a.s.，其中 $b_1=a_{21},b_2=a_{11}$ 和 $b_3=\frac{a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}}{a_{32}}$.

证明　对于结论①.选取 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}V(x_1,x_2,x_3)=&\ln(\prod_{i=1}^{3}x_i^{b_i}(t))=\\&b_1\ln x_1(t)+b_2\ln x_2(t)+b_3\ln x_3(t),\end{aligned}$$

式中，$b_i(i=1,2,3)$ 为待定常数.使用伊藤公式，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V=&[(b_1\theta_1+b_2\theta_2+b_3\theta_3)-(a_{11}b_1-a_{21}b_2)x_1+\\&(-a_{12}b_1-a_{22}b_2+a_{32}b_3)x_2-\\&(a_{23}b_2+a_{33}b_3)x_3]\mathrm{d}t+\sigma_1 b_1\mathrm{d}B_1(t)-\\&\sigma_2 b_2\mathrm{d}B_2(t)-\sigma_3 b_3\mathrm{d}B_3(t)+\\&\int_Y b_1\ln(1+c_1(u))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)+\\&\int_Y b_2\ln(1+c_2(u))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)+\\&\int_Y b_3\ln(1+c_3(u))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u).\end{aligned}$$

选取 $b_1=a_{21},b_2=a_{11}$ 和 $b_3=\frac{a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}}{a_{32}}$.

则由定理假设条件，有

$$\begin{aligned}&b_1\theta_1+b_2\theta_2+b_3\theta_3=\\&a_{21}(\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2+\frac{a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}}{a_{21}a_{32}}\theta_3)>0\end{aligned}$$

和

$$\frac{1}{t}(V(x_1(t),x_2(t),x_3(t))-V(x_1(0),x_2(0),x_3(0)))=(b_1\theta_1+b_2\theta_2+b_3\theta_3)-(a_{23}b_2+a_{33}b_3)\frac{1}{t}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s+b_1\frac{1}{t}M_{11}(t)-b_2\frac{1}{t}M_{12}(t)-b_3\frac{1}{t}M_{13}(t)+b_1\frac{1}{t}M_{21}(t)+b_2\frac{1}{t}M_{22}(t)+b_3\frac{1}{t}M_{23}(t)\tag{18}$$

式中，$M_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,3)$已经在式(6)中给出.由定理条件我们有：$b_1\theta_1+b_2\theta_2+b_3\theta_3>0$.由引理 3.1 可得$\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}V(x_1(t),x_2(t),x_3(t))\leqslant 0$.因此根据式(7)，直接由式(18)能得到 $\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{b_1\theta_1+b_2\theta_2+b_3\theta_3}{a_{23}b_2+a_{33}b_3}=\bar{x}_3$ a.s.. 因此 $x_3(t)$ 是在均值意义下依概率 1 持久的.结论① 得证.

考虑结论②.若 $\theta_1<0$，由引理 3.1 中式(8)和(10)，结合引理 1.2 ② 易得知：$\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t)=0$ a.s..

进一步，若 $\theta_2<0$，我们有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x_2(t)}{t}\leqslant\theta_2+a_{21}\limsup_{t\to\infty}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s=\theta_2<0\ \text{a.s.},$$

即$\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=0$ a.s..

同样的，若 $\theta_3<0$，有 $\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{\ln x_3(t)}{t}\leqslant\theta_3+a_{32}\limsup\limits_{t\to\infty}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s=\theta_3<0$ a.s. ，即$\lim\limits_{t\to\infty}x_3(t)=0$ a.s..由此，结论② 得证.

考虑结论③.由于 $\theta_1>0$，由引理 3.1 易得知 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\theta_1}{a_{11}}$ a.s. .

进一步，若 $\theta_1+\frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2<0$，有 $\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{\ln x_2(t)}{t}\leqslant\theta_2+a_{21}\limsup\limits_{t\to\infty}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s=\theta_2+a_{21}\frac{\theta_1}{a_{11}}<0$ a.s. ，即 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=0$ a.s..

再由 $\theta_3<0$，由结论② 中证明可得

$$\lim_{t\to\infty}x_3(t)=0.$$

对充分小的 $0<\epsilon<\frac{\theta_1}{a_{12}}$，存在 $T_0>0$，对任意的 $t\geqslant T_0$ 有 $x_2(t)<\epsilon$ a.s..不失一般性，可设对任意的 $t\geqslant 0$ 有 $x_2(t)<\epsilon$ a.s..于是我们有

$$\ln x_1(t)\leqslant\ln x_1(0)+\theta_1 t-a_{11}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s+M_{11}(t)+M_{12}(t)$$

和

$$\ln x_1(t)\geqslant\ln x_1(0)+\theta_1 t-a_{12}\epsilon t-a_{11}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s+M_{11}(t)+M_{12}(t).$$

根据引理 1.2 得

$$\frac{\theta_1-a_{12}\epsilon}{a_{11}}<\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s\leqslant\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\theta_1}{a_{11}},$$

由于 ϵ 的任意性，我们进一步得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s=\frac{\theta_1}{a_{11}}\ \text{a.s.}.$$

因此，结论③得证.

考虑结论④.由②的证明，当 $\theta_1<0$ 时，有

$$\lim_{t\to\infty}x_1(t)=0\ \text{a.s.}.$$

由式(13)有

$$\ln\Phi_2(t)=\theta_2 t-a_{22}\int_0^t\Phi_2(s)\mathrm{d}s+h_2(t),$$

这里 $h_2(t)=\ln\Phi_2(0)+a_{21}\int_0^t\Phi_1(s)\mathrm{d}s-M_{12}(t)+M_{22}(t)$. 显然，有$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{h_2(t)}{t}=0$.因此，由引理 1.2 我们进一步有 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Phi_2(s)\mathrm{d}s=\frac{\theta_2}{a_{22}}$ a.s.. 由式(16)，$\theta_2+\frac{a_{22}}{a_{32}}\theta_3<0$，进一步有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x_3(t)}{t}\leqslant\theta_3+a_{32}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Phi_2(s)\mathrm{d}s=\theta_3+\frac{a_{32}\theta_2}{a_{22}}<0.$$

因此，$\lim\limits_{t\to\infty}x_3(t)=0$ a.s..

对任何 $\varepsilon>0$，且 $\theta_2-a_{23}\varepsilon>0$，存在 $T>0$，使得当 $t\geqslant T$ 时 $\frac{1}{t}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s<\varepsilon$ a.s..不失一般性，可设 $\frac{1}{t}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s<\varepsilon$ a.s. 对一切 $t\geqslant 0$.于是当 $t\geqslant 0$ 时有

$$\ln x_2(t)\geqslant\ln x_2(0)+\theta_2 t-a_{22}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s-a_{23}\varepsilon t-M_{12}(t)+M_{22}(t),$$

和

$$\ln x_2(t) \leqslant \ln x_2(0) + \theta_2 t - a_{22}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s - M_{12}(t) + M_{22}(t).$$

由引理 1.2,得到

$$\frac{\theta_2 - a_{23}\varepsilon}{a_{22}} \leqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s \leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{\theta_2}{a_{22}} \text{ a.s..}$$

由 ε 的任意性,我们最终得到 $x_2(t)$ 在均值意义下稳定: $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s = \frac{\theta_2}{a_{22}}$ a.s..因此,结论④得证.

对于结论⑤.直接由②的证明能得到:当 $\theta_i<0$ 时,$\lim_{t\to\infty} x_i(t)=0$ a.s. $(i=1,2)$.

对任何充分小的 $\varepsilon>0$ 存在一个 $T>0$,当 $t\geqslant T$ 时有 $\frac{1}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s < \varepsilon$. 不失一般性, 可设 $\frac{1}{t}\int_0^t x_2(s)\mathrm{d}s < \varepsilon$ 对一切 $t\geqslant 0$.于是有

$$\ln x_3(t) \geqslant \ln x_3(0) + \theta_3 t - a_{33}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s - M_{13}(t) + M_{23}(t),$$

和

$$\ln x_3(t) \leqslant \ln x_3(0) + \theta_3 t + a_{32}\varepsilon\, t - a_{33}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s - M_{13}(t) + M_{23}(t).$$

由引理 1.2,我们得到

$$\frac{\theta_3}{a_{33}} \leqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s \leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{\theta_3 + a_{32}\varepsilon}{a_{33}}.$$

由 ε 的任意性,最终得到 $x_3(t)$ 在均值意义下稳定:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_3(s)\mathrm{d}s = \frac{\theta_3}{a_{33}} \text{ a.s..}$$

因此,结论⑤得证.

对于结论⑥.从式(18)能进一步得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}(V(x_1(t),x_2(t),x_3(t)) - V(x_1(0),x_2(0),x_3(0))) \leqslant (b_1\theta_1 + b_2\theta_2 + b_3\theta_3) + \\ &b_1\frac{1}{t}M_{11}(t) - b_2\frac{1}{t}M_{12}(t) - b_3\frac{1}{t}M_{13}(t) + b_1\frac{1}{t}M_{21}(t) + b_2\frac{1}{t}M_{22}(t) + b_3\frac{1}{t}M_{23}(t).\end{aligned}$$

若 $\theta_1 + \frac{a_{11}}{a_{21}}\theta_2 + \frac{a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}}{a_{21}a_{32}}\theta_3<0$, 则直接有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}(V(x_1(t),x_2(t),x_3(t))) \leqslant b_1\theta_1 + b_2\theta_2 + b_3\theta_3 < 0,$$

即 $\lim_{t\to\infty}\prod_{i=1}^{3} x_i^{b_i}(t) = 0$ a.s.. 于是,结论⑥得证.定理证毕.

4 结论

本文研究了同时受白噪声和一般 Lévy 跳干扰的随机三种群食物链模型.由 θ_i 的表达式可看出白噪声和 Lévy 跳都是作用在 r_i 上的,然而白噪声总是对物种的生存起抑制作用,而 Lévy 噪声却可以对其生存有利(当跳系数为正时),亦可对其不利(当跳系数为负时).在一些简单的假设下,我们得到了该随机食物链模型的最高级捕食者在均值意义下依概率 1 持久的判别准则,得到了部分种群依概率 1 灭绝,而其余种群依概率 1 渐近稳定持久的判别准则,以及得到了所有种群依概率 1 是非持久的判别准则.

然而,从定理 3.1 不难看出,对于随机食物链模型仍然有许多情况没有很好研究,例如:

①在定理 3.1 的结论①中,我们仅得到了种群 x_3 的平均值意义下依概率 1 持久性,那么能否进一步得到种群 x_1 和 x_2 的平均值意义下依概率 1 持久性呢?

②在定理 3.1 的结论③~⑤中,我们建立了两个种群依概率 1 灭绝,一个种群平均值意义下依概率 1 渐近稳定持久的判别准则.那么能否建立一个种群依概率 1 灭绝,两个种群平均值意义下依概率 1 渐近稳定持久的判别准则呢?

③对于相应的确定性三种群食物链模型,目前已经得到了非常完整的种群持久性、灭绝性以及平衡点全局渐近稳定性的判别准则.那么对于本文考虑的随机食物链模型,能否也能建立对应的比较完整的结论呢?

这些问题我们将在以后的工作中继续开展研究.

参考文献(References)

[1] HSU S B, HWANG T W, KUANG Y. A ratio-dependent food chain model and its applications to biological control[J]. Math Biosci, 2003, 181: 55-83.
[2] 李海红.随机种群模型的渐进行为[D].长春:吉林大学, 2014.

[3] SUN Y, SAKER S H. Positive periodic solutions of discrete three-level food-chain model of Holling type Ⅱ [J]. Appl Math Comput, 2006, 180: 353-365.

[4] GOH B S. Global stability in many-species systems[J] The American Naturalist, 1977, 111(977): 135-143.

[5] LIU M, BAI C. Analysis of a stochastic tri-trophic food-chain model with harvesting[J]. J Math Biol, 2016, 73: 597-625.

[6] BAO J, YUAN C. Stochastic population dynamics driven by Lévy noise[J]. J Math Anal Appl, 2012, 391: 363-375.

[7] LI M, GAO H, WANG B. Analysis of a non-autonomous mutualism model driven by Lévy jumps [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 2016, 21(4): 1189-1202.

[8] LIU M, WANG K. Stochastic Lotka-Volterra systems with Lévy noise[J]. J Math Anal Appl, 2014, 410: 750-763.

[9] LIU M, BAI C. Dynamics of a stochastic one-prey two-predator model with Lévy jumps [J]. Appl Math Comput, 2016, 284: 308-321.

[10] LIU Q, JIANG D, SHI N. Stochastic mutualism model with Lévy jumps[J]. Comm Nonl Sci Num Simul, 2016, 43: 78-90.

[11] ZHOU Y, YUAN S, ZHAO D. Threshold behavior of a stochastic SIS model with Lévy jumps[J]. Appl Math Comput, 2016, 275: 255-267.

[12] GE Q, JI G, XU J, et al. Extinction and persistence of a stochastic nonlinear SIS epidemic model with jumps [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2016, 462: 1120-1127.

[13] CHEN C, KANG Y. Dynamics of a stochastic multi-strain SIS epidemic model driven by Lévy noise[J]. Comm Nonl Sci Num Simul, 2017, 42: 379-395.

[14] MAO W, MAO X. On the asymptotic stability and numerical analysis of solutions to nonlinear stochastic differential equations with jumps[J]. J Comput Appl Math, 2016, 301: 1-15.

[15] ZOU X, WANG K. Numerical simulations and modeling for stochastic biological systems with jumps [J]. Comm Nonl Sci Nume Simul, 2014, 19: 1557-1568.

[16] ZHANG X, WANG K. Stability analysis of a stochastic Gilpin-Ayala model driven by Lévy noise[J]. Comm Nonl Sci Nume Simul, 2014, 19(5): 1391-1399.

[17] WU R, ZOU X, WANG K. Asymptotic properties of stochastic hybrid Gilpin-Ayala system with jumps[J]. Appl Math Comput, 2014, 249: 53-66.

[18] JIANG D, SHI N, LI X. Global stability and stochastic permanence of a non-autonomous logistic equation with random perturbation[J]. J Math Anal Appl, 2008, 340: 588-597.

[19] LIPTSER R S. A strong law of large numbers for local martingales[J]. Stoch Inter J Prob Stoch Proc, 1980, 3: 217-228.

[20] MAO X, MARION G, RENSHAW E. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics[J]. Stoch Proc Appl, 2002, 97: 95-110.