

一种改进的图像盒子维计算方法

薛松, 蒋新生, 段纪森, 张培理

(中国人民解放军陆军勤务学院油料系, 重庆 401311)

摘要: 分形维是图像的一种有用的特征, 在许多领域中用于图像纹理分析、分割以及分类。盒子维方法由于其实现简单, 成为估计图像分形维最常用的一种方法, 但是该方法存在计数精度不高、稳定性较差等问题, 为此提出了一种新的盒子维估计算法。首先对数字图像的离散灰度曲面进行适当插点补充, 使插点后的曲面相对更接近连续的情况, 使得在最小尺度下也能实现对不同图像的区分。然后直接采用最小尺度下的盒子数估计分形维, 不进行拟合。该算法简单、直观、易于实现。实验结果表明, 该方法具有更好的估计精度和稳定性。对于一些特殊测试图像, 如尖峰脉冲图像, 仍能得到合理的估计值。另外, 由于本方法不需要计算多个尺度下的盒子数, 因此计算量也相对较小。

关键词: 分形维; 盒子维; 灰度图像

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2018.06.009

引用格式: 薛松, 蒋新生, 段纪森, 等. 一种改进的图像盒子维计算方法[J]. 中国科学技术大学学报, 2018, 48(6): 504-511.

XUE Song, JIANG Xinsheng, DUAN Jimiao, et al. An improved box-counting method for calculating image fractal dimension[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018, 48(6): 504-511.

An improved box-counting method for calculating image fractal dimension

XUE Song, JIANG Xinsheng, DUAN Jimiao, ZHANG Peili

(Department of Fuel, Army Logistics University, Chongqing 401311, China)

Abstract: A fractal dimension is a useful feature parameter for texture analysis, segmentation and classification in many fields. The differential box-counting method is frequently used to estimate image fractal dimension because of its simplicity. However this method is flawed with lack of accuracy and stability. A new box-counting method is presented. First, more nodes are into the discrete intensity surface of a digital image to make it relatively more approximate to a continuous surface. This step makes it possible to distinguish different images at the smallest scale. Then, the fractal dimension of the digital image is estimated directly according to the box number at the smallest scale without the fitting step. Experimental results show that this method is more accurate and stable compared with some typical methods. For some special test images, such as pulse images, the proposed method outperformed unreasonable estimates. In addition, because there is no need to calculate the box numbers at other scales, the computational complexity of our method is lower.

Key words: fractal dimension; box-counting dimension; gray-level image

收稿日期: 2017-11-01; 修回日期: 2018-04-10

基金项目: 国家自然科学基金(51574254, 51704301), 国防科技项目基金(3604031)资助.

作者简介: 薛松, 男, 1983 年出生, 博士. 研究方向: 信号处理技术. E-mail: songself@126.com

通讯作者: 蒋新生, 博士/教授. E-mail: jxs_dy@163.com

0 引言

纹理是图像重要的视觉特征,对图像的分析、识别和理解有着重要的意义.自然物体的轮廓和纹理往往过于复杂,用传统的欧氏几何难以描述,如地形、血管分布以及天空中星体的分布特征等.分形理论为描述这些自然形态提供了有效的途径.分形的概念最初由 Mandelbrot^[1]提出,它的一个基本特性是具有自相似性,即在某分形集中取任意大小的一个局部,该局部的形状或者统计特性与原分形集的整体是相似的.比如从不同高度拍摄了一条海岸线的一系列照片,这些照片上的海岸线轮廓的形状特征都是相似的.Pentland^[2]指出,大多数自然物体表面在一定尺度范围内是分形的,相应地,这些表面的灰度图像也具有分形的性质.不同物体表面的分形维数往往不同,因此可以根据图像不同区域的分形维数对图像进行分割.分形维算法大致可以分为3类^[3]:盒子维方法,方差法以及频域法.其中最常用的是盒子维方法,这主要是由于其简单、直观、易于理解,便于计算机编程实现,但是该方法的估计误差较大,稳定性较差,可能得到无意义的估计值.目前针对盒子维的研究主要集中在两个方面:

(I)盒子维方法的应用.如用于材料表面及微观结构分析^[4-5]、医学图像分析^[6-8]、交通目标识别^[9-10]、遥感图像分析等^[11-12];

(II)盒子维算法的改进^[11, 13-17].对盒子维算法的改进主要集中在优化盒子计数精度方面.盒子计数精度越高,得到的分形维数越接近其理论值.目前已有多种盒子维算法,这些算法都是在既有算法的基础上进行改良,估计的精度、稳定性以及拟合误差得到逐步改善.

上述改良算法仍然都采用了直线拟合的步骤,即在不同尺度下计算出覆盖图像灰度曲面所需的盒子数,得到一系列盒子数与尺度值的数据对,对这些数据对进行直线拟合,得到直线的斜率即为图像的分形维的估计值.一些文献还把直线拟合误差作为衡量算法性能的一个指标,拟合误差越小说明算法性能越优良^[11, 14, 16-17].实际上,绝大多数数字图像本身都不具有理想的分形特性,即这些图像可能只在某些尺度下体现出一定的分形性,在某些尺度下并不具有分形性.对于这些图像即使用最理想的计盒方法也会产生明显的拟合误差,甚至得到不合理的估计值.

本文提出了一种新的盒子维估计算法,该算法采用数字图像最小尺度下的盒子数直接估计盒子维,不进行拟合,这样更接近盒子维的理论定义.数字图像的最小尺度相应于1个像素的尺寸,对于现有各种算法,在该尺度下,覆盖一幅图像的灰度曲面所需的盒子数就等于图像像素的个数,因此任何图像在最小尺度下的盒子数是相同的,无法进行区分,所以现有各种方法采用的盒子边长都不能小于2个像素的尺寸^[18].本文对数字图像的离散灰度曲面进行适当插点补充,使插点后的曲面相对更接近连续的情况.这样使得在最小尺度下也能实现对不同图像的区分,从而能够在最小尺度下进行分形维估计.仿真结果表明,本文提出的方法具有更好的估计精度和稳定性,对于一些特殊图像,如尖峰脉冲图像,现有方法都会得到不合理的估计值,而本文的方法仍能得到合理的估计值.

1 盒子维的基本原理及现有算法分析

记 $z = A(x, y)$ 为一幅数字灰度图像,分辨率为 $M \times M$.其中 x 和 y 为像素的行号和列号, z 为灰度值,那么该灰度图像可以看作3维空间中的一个曲面,称为灰度曲面.取盒子大小为 $L \times L \times L'$,其中 L 为盒子在 x 和 y 方向上的边长, L' 为盒子在 z 方向上的边长,满足 $L' = GL/M$,其中 G 为数字图像的灰度级总数,即满足 $L'/G = L/M$ ^[18-19].记 $r = L/M$ 称为盒子的尺度.用一系列尺度为 r 的盒子互不重叠地去包含曲面 A ,设 N_r 表示包含 A 所需的最少的盒子数.那么,如果 A 是一个理想的分形曲面,其盒子维 D 定义为

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N_r)}{\log(1/r)} \quad (1)$$

对于数字图像的离散灰度曲面,通常的做法是取不同的 r 值(满足 $1 < L \leq M/2$)^[18],计算出相应的 N_r ,从而得到一系列数据对 $(\log(N_r), \log(1/r))$.对这些数据对采用最小二乘法拟合出一条直线,该直线的斜率即图像的盒子维.最常用的计算 N_r 的方法主要有差分计盒法(differential box-counting, DBC)^[19]以及各种改进版本.

1.1 DBC 方法

曲面 $A(x, y)$ 所在的空间是一个尺寸为 $M \times M \times G$ 的正六面体.将该空间划分为大小为 $L \times L \times L'$ 的网格,如图1(a)所示.每个网格就是一个盒子,共有 n^3 个盒子,其中 $n = M/L = G/L' = 1/r$.这些

盒子中与曲面 $A(x, y)$ 相交的盒子的数量即为 N_r . 这相当于把大小为 $M \times M$ 的图像划分为 n^2 个 $L \times L$ 的子块, 每个子块上方有一列 n 个盒子. 设某个子块上灰度最小的点落在第 k 个盒子中, 最亮的点落在第 l 个盒子中, 如图 1(b) 所示 (设 $L=4$, 且 $G=M$). 那么在该子块上方, 与 $A(x, y)$ 相交的盒子的数量为记为 $n_r(i, j)$, 有

$$n_r(i, j) = l - k + 1 \quad (2)$$

式中, i, j 分别表示该子块的行号和列号, 故

$$N_r = \sum_{i,j} n_r(i, j) \quad (3)$$

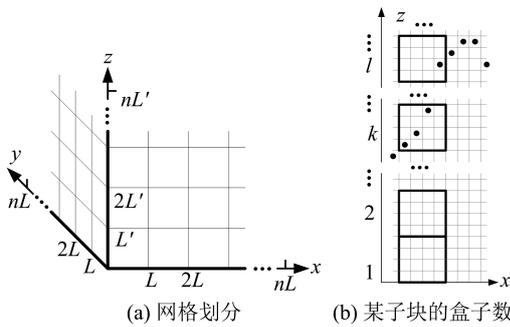


图 1 DBC 法示意图

Fig.1 Sketch of the DBC method

DBC 方法虽然简单易于实现, 但是由于网格固定, 且盒子数只能取整数, 因此计算误差较大. 图 2 给出了某个子块上的几种灰度分布的例子. 根据 DBC 法, 对于图 2(a) 有 $n_r(i, j) = 1$, 对于图 2(b) 有 $n_r(i, j) = 2$, 但是这两种分布的粗糙度是相同的, 理论上应该有相同的 $n_r(i, j)$. 相反, 图 2(a)、(c)、(d) 的粗糙度各不相同, 但却有相同的 $n_r(i, j) = 1$, 即 DBC 方法无法区分这 3 种情况. 一些文献将这类情况称为“数多”或“数少”^[14-16], 实际上其本质是网格化带来的误差.

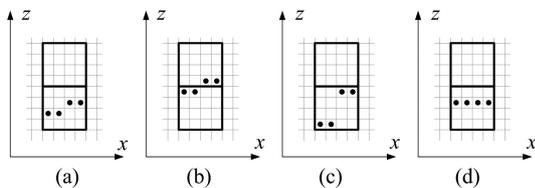


图 2 竖直方向的网格化误差示意图

Fig.2 Vertical gridding error

图 2 所示为竖直方向的网格化误差. 同样, 水平方向也存在类似的问题. 以 x 方向为例, 图 3(a)、(b) 具有相同的分布特征, 但所需盒子数不同, 图 (c)、(d) 反映了类似的情况.

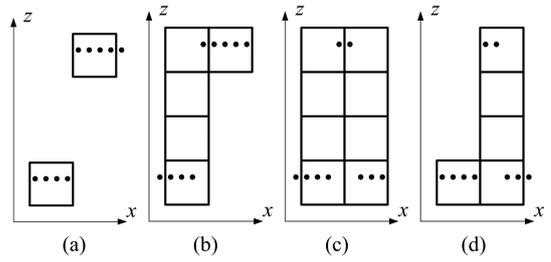


图 3 水平方向的网格化误差示意图

Fig.3 Horizontal gridding error

1.2 DBC 方法的各种改进版本

Li 等^[11]为解决网格固定带来的误差, 将式(2) 改为

$$n_r(i, j) = \text{int} \left[\frac{z_{\max}(i, j) - z_{\min}(i, j)}{L'} \right] + 1 \quad (4)$$

式中, $z_{\max}(i, j)$ 和 $z_{\min}(i, j)$ 分别为某子块上的最大灰度值和最小灰度值. 式(4)解决了图 2(a)与(b) 格子数不同的问题, 但是(a)、(c)、(d)的格子数仍然相同, 无法进行区分. 为此 Long 等^[14]进一步将式(4)改为

$$n_r(i, j) = \frac{z_{\max}(i, j) - z_{\min}(i, j)}{L'} + 1 \quad (5)$$

去掉了取整数的限制. 这样既满足图 3(a)、(b) 相同, 同时满足(a)、(c)、(d)各不相同.

为减小图 3 所示水平方向的网格化误差, 直接套用对竖直方向的改进办法, 处理起来相对困难, 并且成效不太明显. Chen 等^[15]对离散曲面 $A(x, y)$ 上的每个点进行不同顺序、不同方向的多次扫描判断, 以适当安排每个盒子的位置, 算法较为复杂. Liu 等^[17]提出了一种更简单的方法, 但是性能更好(文献^[17]中图 6、图 9). 该方法按式(2)计算某个子块的盒子数, 记为 $n_{r1}(i, j)$. 然后将该子块沿某条对角线移动 1 个像素的距离, 如图 4 中虚线所示. 计算移动后该子块的盒子数, 记为 $n_{r2}(i, j)$. 则原子块的盒子数确定为

$$n_r(i, j) = \max(n_{r1}(i, j), n_{r2}(i, j)) \quad (6)$$

该方法对解决图 3(a)、(b)所示的情况有一定效果. 对于图 3(c)、(d)所示的情况, 采用 $n_r(i, j) = \min(n_{r1}(i, j), n_{r2}(i, j))$ 可能更接近理想值. 由于该算法采用了式(2), 因此得到的盒子数为整数. 该方法的性能相对于基本 DBC 法有一定提升, 但是提升的程度没有采用式(5)明显.

Kaewaramsri 等^[16]将某个子块先按其中一条对角线分成两个三角型块, 对每个三角型块按照式

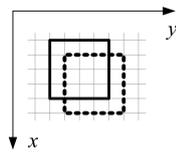


图 4 子块沿某条对角线移动一个像素示意图

Fig.4 Moving a block along one of its diagonals

(2) 计算盒子数, 得到 $n_{r11}(i, j)$ 、 $n_{r12}(i, j)$ 。记

$$n_{r1}(i, j) = (n_{r11}(i, j) + n_{r12}(i, j)) / 2 \quad (7)$$

再将该子块按另一条对角线分成两个三角形, 以同样的方法得到 $n_{r2}(i, j)$ 。则该子块的盒子数最终取为 $n_r(i, j) = \max(n_{r1}(i, j), n_{r2}(i, j))$ 。该算法对提高计数精度的贡献也没有采用式(5)明显。

还有一些其他的改进算法, 由于它们对性能提升的效果更加有限, 在此不再一一列出。

2 一种新的盒子维估计算法

设图 5(a)中的黑点为某分辨率为 $M \times M$ 的数字灰度图像所对应的离散灰度曲面 $A(x, y)$ 上的一列点。某黑点的 x 坐标为相应像素的行号, $x = 1, 2, \dots, M$ 。纵坐标 $z' = \text{int}[zM/G]$, 其中 z 为某黑点对应的灰度值, $z = 1, 2, \dots, G$, 因此有 $z' = 1, 2, \dots, M$ 。图 5 中每一个网格边长为 $L = 1$, 即尺度最小的盒子。

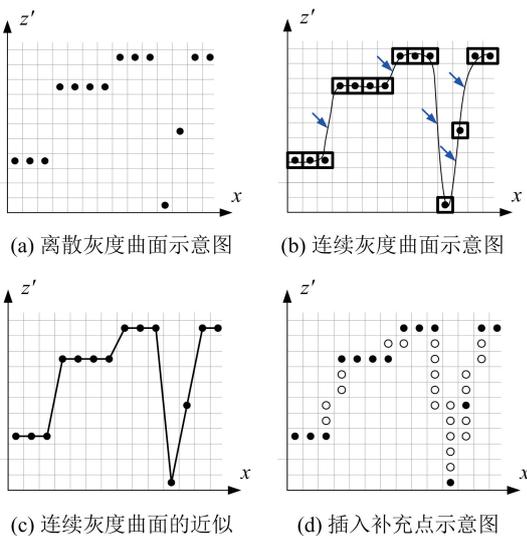


图 5 图像灰度曲面插入补充点示意图

Fig.5 Insert nodes into an image intensity surface

由上述分析知, 在现有的盒子维算法中, 盒子尺寸的取值范围应满足 $1 < L \leq M/2$ 。如果取 $L = 1$, 每个盒子最多包含一个黑点, 那么无论图像中各像素的灰度如何取值, 为了把离散曲面上的所有点包含在内, 所需的盒子数均为 $N_{1/M} = M \times M$ 。这样就

无法把不同图像区别开来, 导致该问题的原因在于图像被离散化了, 如图 5(b)所示, 图中曲线为相应的未经离散化的灰度曲面的示意图。离散化后, 相邻像素之间的空间没有灰度数据, 如果相邻像素之间的灰度差别较大, 那么其中的一部分灰度曲面就没有被覆盖到, 如图中箭头所示, 从而导致计盒误差, 降低分形维的估计精度。

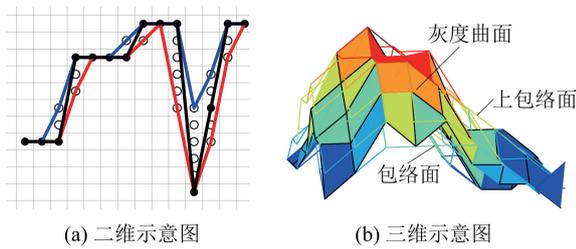
若采用盒子的尺寸为 $L > 1$ 仍然会存在类似情况, 如图 3(a)所示。只不过 L 取值越大, 离散化带来的影响相对更小, 然而 L 取值越大又会引入新的计数误差。这是由于盒子尺寸越大, 再加上盒子的形状限制, 对曲面的覆盖就会更加粗糙、不均匀。这种情况下如果将灰度曲面水平平移或者竖直平移就可能会导致所需的盒子数发生变化, 从而得到不同的分形维估计值, 使得估计值不稳定, 理论上灰度曲面发生平移不应导致其分形维发生变化。

鉴于上述分析, 为解决由图像离散化导致的估计精度降低, 对离散灰度曲面进行适当补点, 使其更接近连续的情况。为解决由盒子的尺寸增大和形状限制带来的估计值不稳定问题, 仅采用最小尺度的盒子进行分形维估计。

简明起见, 仍采用二维示意图进行说明。对图 5(a)中离散点的一个连续近似就是用直线段将相邻点连接起来, 得到一条折线, 如图 5(c)所示。与该折线相交的网格的数量即为所需的盒子数。具体做法如下: 比较相邻黑点 $z'(x, y)$ 与 $z'(x+1, y)$ 的高度。如果 $z'(x, y) \neq z'(x+1, y)$, 不妨设 $z'(x, y) < z'(x+1, y)$, 那么在黑点 $z'(x, y)$ 的上方以及 $z'(x+1, y)$ 的下方各插入 $\text{int}[(z'(x+1, y) - z'(x, y))/2]$ 个点, 如图 5(d)中白点所示。考虑到实际的灰度曲面是 3 维的, 需对 $z'(x, y)$ 8 个方向上的相邻点都进行同样的操作。这样处理之后, 所得离散点的分布更接近连续的情况。此时所有黑点与白点的总数即为所需的最小尺度盒子的数量, 记为 $N_{r_{\min}}$, 其中 $r_{\min} = 1/M$ 。根据式(1), 图像的盒子维可近似计算为

$$D = \frac{\log(N_{r_{\min}})}{\log(M)} \quad (8)$$

图 6 所示为插入补充点后, 原灰度曲面及其上下包络面示意图。图 6(a)中灰色曲线所示为上包络面, 浅灰色曲线所示为下包络面, 黑色曲线所示为原灰度曲面。图 6(b)所示为三维的情况, 其中实心网格面为原灰度曲面, 空心网格面为其上下包络面。



(a) 二维示意图 (b) 三维示意图
 图 6 插入补充点后灰度曲面的包络面
 Fig.6 Envelopes of the intensity surface

3 实验结果分析

3.1 分形布朗运动表面测试

分形布朗运动(fractal brown motion,FBM)表面具有统计自相似性,适合作为盒子维算法的测试对象.设 $A(x,y)$ 为二维随机过程,具有如下性质:

- (I)任意随机增量 $\Delta A = A(x_1,y_1) - A(x_2,y_2)$ 都是均值为 0 的高斯随机变量;
- (II) $\text{var}(\Delta A) \propto (\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2})^{2H}$ (9)

满足上述条件的随机曲面 $A(x,y)$ 可认为是一个 FBM 表面,其分形维数为: $D = 3 - H$ [11, 20]. FBM 表面可采用随机中点偏移法近似生成[20].以生成 129×129 的 FBM 图像为例,图像的边长记为 M ,如图 7 所示.

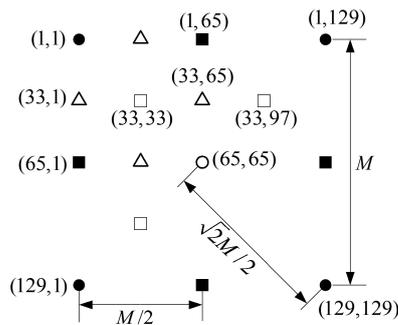


图 7 随机中点偏移法示意图
 Fig.7 Illustration of the generation of a FBM image

首先确定图像 4 个顶点的值,如图 7 中的黑色圆点所示.不妨取 $A(1,1) = 0$, $A(1,129)$ 、 $A(129,1)$ 为均值为 0,方差为 $\sigma_0^2 = 1$ 的随机数; $A(129,129) = \frac{A(1,129) + A(129,1)}{2} + R_0$, R_0 同样取均值为 0,方差为 $\sigma_0^2 = 1$ 的随机数.随机数可以通过 Matlab 相应函数生成.

第 1 次迭代
 生成点 $A(65,65)$

$$A(65,65) = \frac{A(1,1) + A(1,129) + A(129,1) + A(129,129)}{4} + R_1 \quad (10)$$

由于 $A(65,65)$ 到 4 个顶点的距离均为 $\sqrt{2}M/2$,由(9)以及 $\sigma_0^2 = 1$,有 R_1 为均值为 0,方差为 $\sigma_1^2 = \sigma_0^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2H} = \left(\frac{1}{2}\right)^H$ 的随机数.

第 2 次迭代

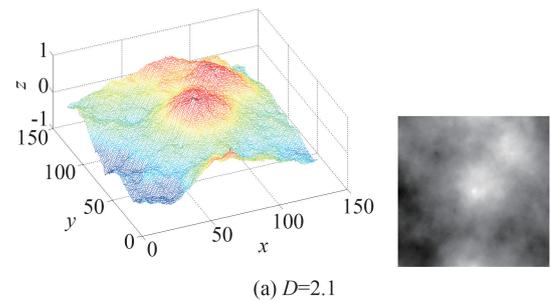
生成图 7 中 4 个黑色方块点,以 $A(1,65)$ 为例.

$$A(1,65) = \frac{A(1,1) + A(1,129) + A(65,65)}{3} + R_2 \quad (11)$$

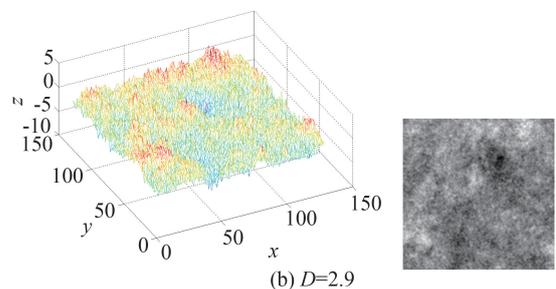
由于 $A(1,65)$ 与它最邻近的 3 个已知点的距离为 $M/2$,由式(9)以及 $\sigma_0^2 = 1$,得 R_2 为均值为 0,方差为 $\sigma_2^2 = \sigma_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2H} = \left(\frac{1}{4}\right)^H$ 的随机数.

依此类推,直到所有点都被赋值.

图 7 中,白色方块为第 3 次迭代生成点,三角形为第 4 次迭代生成点.需要注意的是 $A(33,1)$ 需要由邻近的 3 个点 $A(1,1)$ 、 $A(33,33)$ 、 $A(65,1)$ 生成,而 $A(33,65)$ 需要由邻近的 4 个点生成 $A(1,65)$ 、 $A(33,33)$ 、 $A(65,65)$ 、 $A(33,97)$.图 8 所示为采用该方法生成的 FBM 表面.



(a) $D=2.1$



(b) $D=2.9$

图 8 采用随机中点偏移法生成的 FBM 表面

Fig.8 FBM surfaces generated by stochastic mid-point displacement method

取 $D = (2, 2.1, 2.2, \dots, 3)$ 共 11 个值.采用

Matlab 按照上述算法对 D 的每个值生成 20 幅随机 FBM 图像,可以得到 20 个 D 的估计值.图 9 给出了采用不同方法得到的估计值的最大值、平均值和最小值.其中方法 1 为本文提出的方法;方法 2 为采用式(5)^[14]的方法;方法 3 为式(5)结合三角形法^[16];方法 4 为“对角线移动法”^[17];方法 5 为对角线移动法结合式(5).

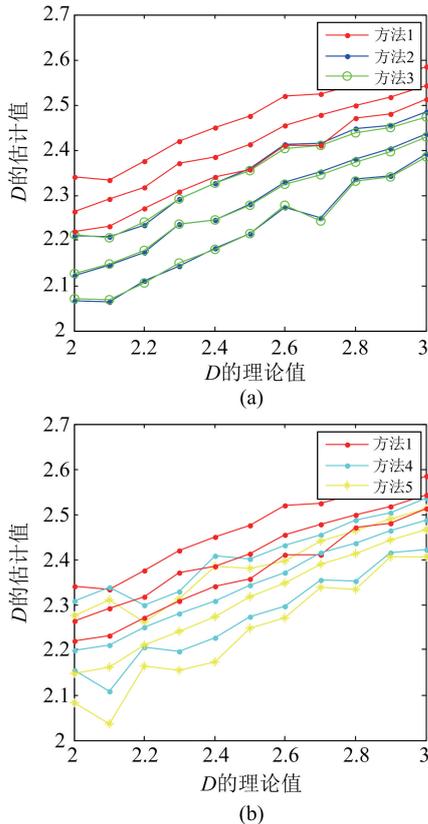


图 9 由不同方法得到的 FBM 图像分形维估计值对比
Fig.9 Fractal dimension estimation results of the generated FBM images

由图 9 可知,各种方法得到的估计值与理想值之间都有一定差距,这一方面是由于各种方法的计盒误差造成,另一方面是由于生成的图形不是严格的 FBM 表面,并且存在显著的离散化误差.在各种方法中,由本文方法得到的估计值的分布中心更靠近理论值 2.5,体现出相对更好的估计准确性.

图 10 所示为 D 的每个值的 20 次估计的方差.从图 10 可以看到,由本文方法得到的估计值的方差最小,体现出较好的稳定性.方法 3 比方法 2 的方差略小,体现出三角形算法对于提高估计性能有一定效果.

3.2 亮度剧烈变化图像测试

图 11 所示为一组具有亮度剧烈变化特征的图

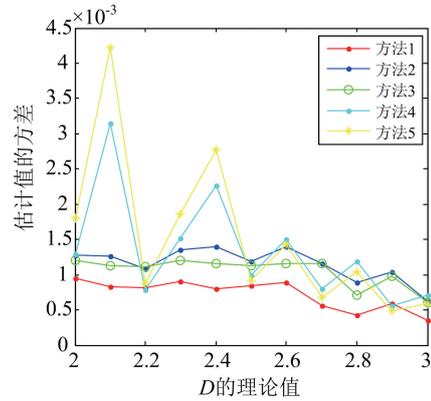


图 10 不同方法的估计值方差

Fig.10 Variances of the estimated fractal dimension

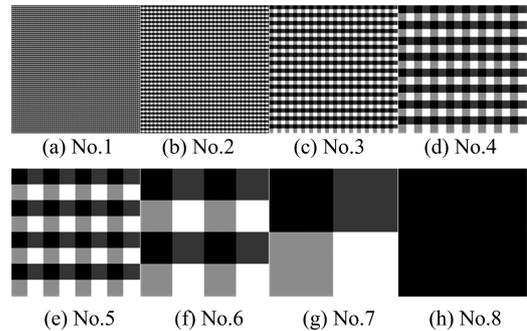


图 11 一组具有亮度剧烈变化特征的图像

Fig.11 Images with sharply intensity change

像.图像由 Matlab 生成,分辨率为 128×128 .每幅图中有 4 种灰度值,由暗到亮分别为 0、85、170、255.可以推断图像序号越大,图像相对更光滑,其分形维应越接近 2;图像序号越小,图像越粗糙,其分形维应接近于 3.图 12 所示为不同方法对这组图像盒子维的估计值.显然,这类图像存在图 3(a)、(b)所示的问题.正如第 2 节的分析中指出,方法 4(子块沿对角线平移)对于处理这类图像比较有效,仿真结果也证明

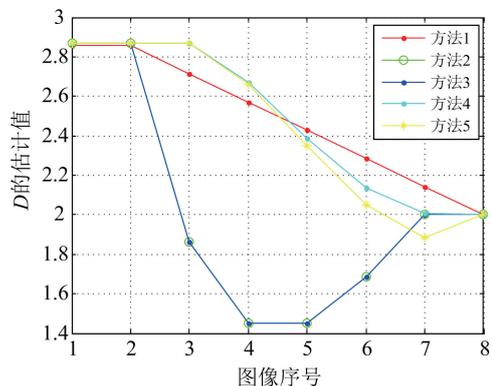


图 12 对图 11 所示图像的盒子维估计值
Fig.12 Fractal dimension estimation of the images shown in Fig.11

了这一点:方法 4 的曲线没有出现不合理的估计值 (<2),但该方法结合式(5)后出现了不合理的估计值.方法 2、3 的曲线上有更多的小于 2 的不合理估计值,因此不适合处理此类图像.

虽然方法 4 没有出现不合理的估计值,但是该方法难以区分第 1、2、3 号图像以及第 7、8 号图像.相比之下由本文方法得到的数据线性度更好,区分能力也较好.

3.3 尖峰脉冲图像测试

图 13 所示为一组由 Matlab 生成的具有不同密度尖峰脉冲的图像.图像的分辨率为 128×128 ,图中的亮点均为 1 个像素大小,灰度值为 255,其余点的灰度值均为 0.其中第 7 号图像右下角有 1 个亮点,第 8 号图中无亮点.

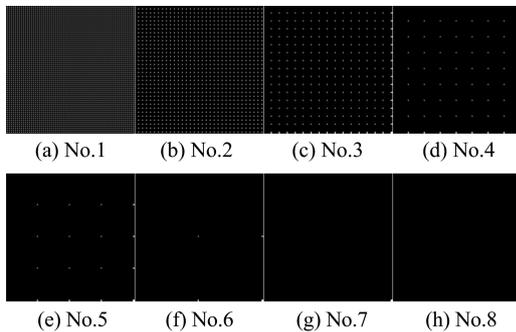


图 13 脉冲尖峰图像

Fig.13 Pulse images

这组图像反映了图 3(c)、(d) 所示的问题.如第 2 节中的分析推断,方法 4 也不适合处理这种情况.图 14 所示为采用不同方法对这组图像盒子维的估计值.可以看到除了本文的方法,其他方法都会得到不合理的估计值.

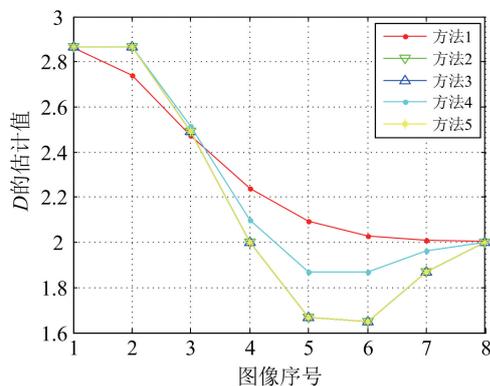


图 14 对图 13 所示图像的盒子维估计值

Fig.14 Fractal dimension estimation of the images shown in Fig.13

4 结论

拟合精度是评价计盒算法性能的一种常用指标,但是该指标更适合用于具有较理想分形特性的图像.数字图像通常不具有理想的分形特性,这些图像本身就会导致较大的拟合误差,因此本文提出了一种不需要进行拟合的盒子维估计算法.首先对灰度数字图像的离散灰度曲面适当插入补充点,使曲面更接近连续的情况.然后在一个像素的尺度下直接估计出图像的盒子维.实验结果表明,该算法与一些有代表性的算法相比具有更好的准确性和稳定性,不会产生不合理的估计值.并且由于不需要在多个尺度下重复对盒子进行计数,因此计算量较小.

参考文献(References)

- [1] MANDELBROT B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. San Francisco: Freeman, 1982.
- [2] PENTLAN A. Fractal-based description of nature scenes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1984, 6(6): 661-647.
- [3] VOSS R. Random Fractals: Characterization and Measurement [M]. New York: Plenum, 1986.
- [4] AI T, ZHANG R, ZHOU H, et al. Box-counting methods to directly estimate the fractal dimension for a rock surface [J]. Applied Surface Science, 2014, 314: 610-621.
- [5] XU J, JIAN Z, LIAN X. An application of box counting method for measuring phase fraction [J]. Measurement, 2017, 100: 297-300.
- [6] KARPERIEN A L, JELINEK H F. Box-counting fractal analysis: A primer for the clinician[M]// The Fractal Geometry of the Brain. New York: Springer, 2016:13-43.
- [7] SAMAJDAR T, PATTNAIK P K. Experimental study of multi-fractal geometry on electronic medical images using differential box counting [M]//Computational Intelligence in Data Mining. Singapore: Springer, 2017: 363-370.
- [8] RISTANOVIC D, STEFANOVIC B, PUSKAS N. Fractal analysis of dendrite morphology using modified box-counting method [J]. Neuroscience Research, 2014, 84: 64-67.
- [9] 慕永云, 王荣本, 赵一兵, 等. 基于多特征融合的前方车辆检测方法研究[J]. 计算机应用研究, 2011, 28(9): 3572-3575.
- [10] MU Yongyun, WANG Rongben, ZHAO Yibing, et al. Study on detecting method of preceding vehicle based

- on multi-feature fusion [J]. *Application Research of Computers*, 2011, 28(9): 3572-3575.
- [11] 张建明, 张玲增, 刘志强. 一种结合多特征的前方车辆检测与跟踪方法 [J]. *计算机工程与应用*, 2011, 47(5): 220-223.
- [12] ZHANG Jianming, ZHANG Lingzeng, LIU Zhiqiang. Approach to front vehicle detection and tracking based on multiple feature [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2011, 47(5): 220-223.
- [13] LI J, DU Q, SUN C. An improved box-counting method for image fractal dimension estimation [J]. *Pattern Recogn*, 2009, 42(11): 2460-2469.
- [14] GE M, LIN Q. Realizing the box-counting method for calculating fractal dimension of urban form based on remote sensing image [J]. *Geo-Spatial Information Science*, 2009, 12(4): 265-270.
- [15] BARNESLEY M, DEVANEY R, MANDELBROT B B. *The Science of Fractal Image* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [16] LONG M, PENG F. A box-counting method with adaptable box height for measuring the fractal feature of images [J]. *Radio Engineering*, 2013, 22(1): 208-213.
- [17] CHEN W, YUAN S, HSIEH C. Two algorithms to estimate fractal dimension of gray-level images [J]. *Optical Engineering*, 2003, 42(8): 2452-2464.
- [18] KAEWARAMSRI Y, WORARATPANYA K. Improved triangle box-counting method for fractal dimension estimation [M]// *Recent Advance in Information and Communication Technology 2015*. Cham: Springer, 2015:53-61.
- [19] LIU Y, CHEN L, JIANG L. An improved differential box-counting method to estimate fractal dimensions of gray-level images [J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2014, 25(5): 1102-1111.
- [20] SARKAR N, CHAUDHURI B B. An efficient differential box-counting approach to computed fractal dimension of image [J]. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, 1994, 24(1): 115-120.