第48卷第5期　　中国科学技术大学学报　　Vol.48,No.5
2018年5月　　JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA　　May 2018

文章编号:0253-2778(2018)05-0374-04

用相干态表象论密度矩阵的扩散方程和振幅衰减方程的来源

余之松[1],余子洋[2],范洪义[3]

(1.湖北师范大学物理与电子科学学院,湖北黄石 435002;2.武汉大学物理科学与技术学院,湖北武汉 430072;
3.中国科学技术大学材料科学与工程系,安徽合肥 230026)

摘要:光场的扩散和振幅衰减是光场演化的两个主要机制,在量子调控中有重要的应用,也是产生新光场的途径.从物理要求出发来推导密度算符的扩散方程和振幅衰减方程,即从相干态表象来演示这两个方程的经典对应分别是通常意义下扩散方程和振幅衰减方程,这样就可以令人信服地说明它们的合理性.在此基础上证明光场二项式态的振幅衰减即是体现在二项分布的参数的衰减,$r_0 \rightarrow r_0 e^{-2\chi t}$,$\chi$ 是衰减系数.

关键词:相干态;密度矩阵;扩散方程;衰减方程

中图分类号:O431　　**文献标识码**:A　　doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2018.05.005

引用格式:余之松,余子洋,范洪义,等.用相干态表象论密度矩阵的扩散方程和振幅衰减方程的来源[J].中国科学技术大学学报,2018,48(5):374-377.

YU Zhisong, YU Ziyang, FAN Hongyi. The source of diffusion equation and amplitude attenuation equation of density matrix by using coherent state representation[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018,48(5):374-377.

The source of diffusion equation and amplitude attenuation equation of density matrix by using coherent state representation

YU Zhisong[1], YU Ziyang[2], FAN Hongyi[3]

(1. *College of Physics & Electronical Science, Hubei Normal University, Huangshi* 435002, *China*;
2. *School of Physics and Technology, Wuhan University, Wuhan* 430072, *China*;
3. *Department of Materials Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

Abstract: Diffusion and amplitude dissipation are two major mechanisms of photon field's evolution, which may be used in quantum controlling and in generating new photon fields. Here two time-evolution equations for diffusion and dissipation from the physical point of view were derived, i.e., the coherent state representation was employed to demonstrate that these two equations' classical correspondence makes common sense in general. In this way the two equations are reasonable without any doubt. Consequently, it was shown that the dissipation of a binomial state is embodied in its paramenter $r_0 \rightarrow r_0 e^{-2\chi t}$, χ is the dissipation coefficient.

Key words: coherent state; density matrix; diffusion equation; attenuation equation

---

收稿日期:2017-11-03;**修回日期**:2018-01-03

基金项目:国家自然科学基金(11504103)资助.

作者简介:余之松(通讯作者),男,1967年生,硕士/副教授.研究方向:量子光学. E-mail:yzs1687@163.com

0　引言

量子统计力学不像牛顿力学那样追求每个微观粒子在一定初始条件下任何时刻所处的确切的动力学状态，而是认为粒子集合的动力学状态遵从统计规律.其研究的对象是大量处于相同宏观条件下全同的微观粒子组成的集合，每个微观粒子的动力学遵从量子力学的规律而各处于某一微观运动状态，即是说，某一时刻每个微观粒子以一定几率处于某一量子态；粒子集合的宏观量是相应的可观测量对可能处的各种量子态的统计平均值.这样，在量子统计力学中，人们引进统计系综和系综平均值的概念.

统计系综定义为处于相同宏观条件下性质全同而各处于某一量子态、并各自独立的大量微观系统的集合.在此基础上，应用统计的方法，解释物体在宏观上、整体上表现出来的物理性质.在平衡态的系综理论中，经常用到正则系综.与温度恒定的大热源相接触，具有确定粒子数和体积的系统组成的统计系综称为正则系综.正则系综的宏观状态的特征是系统的体积、粒子数和温度恒定.

在量子统计力学和量子光学中系统的动力学演化常以密度矩阵的主方程的面目出现，这是对系统-环境有相互作用的总密度矩阵的时间演化式部分求迹的结果.系统的动力学演化中有两种宏观机制最为常见：一是扩散，扩散原指通过分子热运动从物质浓度的高处向低处的输运过程，其微观机理与热传导相似，扩散的快慢与粒子的浓度梯度成比例；另一种是耗散，系统的能量或粒子损失，是不可逆过程的必然表现.在经典力学框架中，扩散和耗散各自有相应的数学物理方程描述.在量子光学框架里，扩散与耗散都有可能伴随着退相干和非经典效应产生.常见的系统密度矩阵的扩散方程和振幅衰减方程分别是[1-3]

$$\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t}=\kappa(a^{\dagger}a\rho-a^{\dagger}\rho a-a\rho a^{\dagger}+\rho a a^{\dagger})\tag{1}$$

式中，κ 是扩散系数；

$$\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t}=\chi(2a\rho a^{\dagger}-\kappa a^{\dagger}a\rho-\kappa\rho a^{\dagger}a)\tag{2}$$

式中，χ 是衰减系数.因为传统文献中介绍的系统-环境有相互作用的总密度矩阵的时间演化式比较复杂，对其部分求迹也做了一定的近似，所以不少初学者对这两个方程的来源不了解.鉴于光场的扩散方程和振幅衰减是光场演化的两个主要机制，在量子调控中有重要的应用，也是产生新光场的途径，本文将从物理要求出发来推导这两个方程，即从经典扩散方程和纯相干态密度算符的振幅衰减方程来推导式(1)和式(2)，纯相干态是最接近于经典情形的量子态，我们将用相干态表象[4-5]和有序算符内的积分理论[6-10]来达到这一目的，这样就可以令人信服地说明式(1)和(2)的合理性.在此基础上我们证明光场二项式态的振幅衰减即是体现在二项分布的参数的衰减，$r_0\rightarrow r_0\mathrm{e}^{-2\chi t}$.

1　从经典扩散方程推导量子光场扩散方程

从经典分布函数 $P(z,t)$ 的扩散方程

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}=-\kappa\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial z\partial z^{*}}\tag{3}$$

出发，我们来导出光场密度矩阵扩散方程.将 $P(z,t)$ 看作是一个密度算符在相干态表象中的 P 表示，即

$$\rho(t)=\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}P(z,t)\mid z\rangle\langle z\mid\tag{4}$$

式中，$\mid z\rangle$ 是相干态，

$$\mid z\rangle=\mathrm{e}^{-|z|^2/2+za^{\dagger}}\mid 0\rangle\tag{5}$$

满足本征方程

$$a\mid z\rangle=z\mid z\rangle\tag{6}$$

和有完备性

$$\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\mid z\rangle\langle z\mid=1\tag{7}$$

用有序算符内的积分技术和 $\mid 0\rangle\langle 0\mid=:\mathrm{e}^{-a^{\dagger}a}:$ 可将式(7)表达为正规乘积形式：

$$\mid z\rangle\langle z\mid=:\mathrm{e}^{-|z|^2+za^{\dagger}+z^{*}a-a^{\dagger}a}:\tag{8}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\mid z\rangle\langle z\mid=\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}:\mathrm{e}^{-|z|^2+za^{\dagger}+z^{*}a-a^{\dagger}a}:=1\tag{9}$$

任意算符 ρ 可以用它展开，其展开函数就称为 ρ 的 P 表示.求展开函数 $P(z)$ 的方法是根据相干态的内积

$$\langle z'\mid z\rangle=\mathrm{e}^{-|z|^2/2-|z'|^2/2+z'^{*}z}\tag{10}$$

对式(4)两边求矩阵元：

$$\langle -z'\mid\rho\mid z'\rangle=\mathrm{e}^{-|z'|^2}\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}P(z)\mathrm{e}^{-|z|^2-z'^{*}z+z^{*}z'}\tag{11}$$

由于 $(z^{*}z'-z'^{*}z)$ 是纯虚数，可把式(11)右边看作是 $P(z)\mathrm{e}^{-|z|^2}$ 的 Fourier 变换，那么其反变换是

$$P(z)\mathrm{e}^{-|z|^2}=\int\frac{\mathrm{d}^2z'}{\pi}<-z'\mid\rho\mid z'>\mathrm{e}^{|z'|^2+z'^*z-z^*z'} \tag{12}$$

将式(4)两边对时间求导，有

$$\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}\mid z><z\mid \tag{13}$$

将经典方程式(3)代入(12)可见

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\kappa\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\frac{\partial^2P(z,t)}{\partial z\partial z^*}\mid z><z\mid \tag{14}$$

用式(8)得到

$$\begin{aligned}a^\dagger\mid z><z\mid&=:a^\dagger\mathrm{e}^{-|z|^2+za^\dagger+z^*a-a^\dagger a}:=\\(z^*+\frac{\partial}{\partial z}):&\mathrm{e}^{-|z|^2+za^\dagger+z^*a-a^\dagger a}:=\\&(z^*+\frac{\partial}{\partial z})\mid z><z\mid\end{aligned} \tag{15}$$

$$\mid z><z\mid a=\left(z+\frac{\partial}{\partial z^*}\right)\mid z><z\mid.$$

于是

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}\mid z><z\mid&=z(z^*+\frac{\partial}{\partial z})\mid z><z\mid-\\&(z^*+\frac{\partial}{\partial z})(z+\frac{\partial}{\partial z^*})\mid z><z\mid-\\\mid z\mid^2\mid z><z\mid&+(z+\frac{\partial}{\partial z^*})(z^*\mid z><z\mid)=\\za^\dagger\mid z><z\mid&-(z^*+\frac{\partial}{\partial z})\mid z><z\mid a-\\\mid z\mid^2\mid z><z\mid&+(z+\frac{\partial}{\partial z^*})\mid z><z\mid a^\dagger=\\a^\dagger a\mid z><z\mid&-a^\dagger\mid z><z\mid a-\\a\mid z><z\mid a^\dagger&+\mid z><z\mid aa^\dagger\end{aligned} \tag{16}$$

将式(15)代入式(13)得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\kappa\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}P(z,t)(a^\dagger a\mid z><z\mid-\\a^\dagger\mid z><z\mid a-a\mid z><z\mid a^\dagger+\\\mid z><z\mid aa^\dagger)\end{aligned} \tag{17}$$

即得到量子扩散方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\kappa(a^\dagger a\rho-a^\dagger\rho a-a\rho a^\dagger+\rho aa^\dagger) \tag{18}$$

2 量子振幅耗散方程的导出

由于自然界中任何系统都不可能是完全孤立于其环境，系统与环境的耦合总有噪声产生，那么描述系统的振幅衰减的动力学演化方程是什么呢？光场在振幅衰减通道中的演化的一个典型例子是纯相干态密度算符 $\mid\alpha><\alpha\mid$ 的振幅衰减，纯相干态是最接近于经典情形的量子态，故我们从一个相干态 $\mid\alpha><\alpha\mid$ 的振幅衰减(χ 是衰减率)

$$\mid\alpha><\alpha\mid\to\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid \tag{19}$$

着手讨论这个演化受什么方程支配.

用正规乘积性质及

$$\begin{aligned}\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid=:\exp(-\mid\alpha\mid^2\mathrm{e}^{-2\chi t}+\\\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}a^\dagger+\alpha^*\mathrm{e}^{-\chi t}a-a^\dagger a):\end{aligned} \tag{20}$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}:\exp(-\mid\alpha\mid^2\mathrm{e}^{-2\chi t}+\\&\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}a^\dagger+\alpha^*\mathrm{e}^{-\chi t}a-a^\dagger a):=\\&2\chi\mid\alpha\mid^2\mathrm{e}^{-2\chi t}\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid-\\&\chi a^\dagger\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid-\\&\chi\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid\alpha^*\mathrm{e}^{-\chi t}a=\\2\chi a\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid a^\dagger&-\chi a^\dagger a\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid-\\&\chi\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid a^\dagger a.\end{aligned}$$

令 $\mid\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}><\alpha\mathrm{e}^{-\chi t}\mid=\rho(t)$，式(21)就等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(t)=\chi[2a\rho a^\dagger-\chi a^\dagger a\rho-\chi\rho a^\dagger a] \tag{22}$$

这就给出了量子振幅耗散方程.

3 光场二项式态的振幅衰减

再看光场二项式态的振幅衰减，二项式分布是 m 个相互独立且以 r 为参数的(0-1)分布随机变量之和，光场二项式态的密度算符是[11]

$$\rho_b=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}r^l(1-r)^{m-l}\mid l><l\mid \tag{23}$$

式中，$\mid l>$ 是光子数态，

$$\mid l>=\frac{a^{\dagger l}}{\sqrt{l!}}\mid 0>,a^\dagger a\mid l>=l\mid l> \tag{24}$$

定理 3.1 ρ_b 的振幅衰减相当于参数的衰减，$r_0\to r_0\mathrm{e}^{-2\chi t}$.

证明 对式(22)两边做 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 运算，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_b=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}[lr^{l-1}(1-r)^{m-l}-\\r^l(1-r)^{m-l-1}(m-l)]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mid l><l\mid\end{aligned} \tag{25}$$

另一方面，用 $a\mid l>=\sqrt{l}\mid l-1>$，得到

$$\begin{aligned}a\rho_ba^\dagger=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}r^l(1-r)^{m-l}l\mid l-1><l-1\mid=\\\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(m-l)r^{l+1}(1-r)^{m-l-1}\mid l><l\mid\end{aligned} \tag{26}$$

于是

$$\chi(2a\rho_b a^\dagger - a^\dagger a\rho_b - \rho_b a^\dagger a) =$$

$$2\chi\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\{(m-l)r^{l+1}(1-r)^{m-l-1} -$$

$$l r^l (1-r)^{m-l}\} \mid l >< l \mid \tag{27}$$

若让式(26)与式(24)相等,比较 $\mid l >< l \mid$ 的系数可见需要

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -2\chi r \tag{28}$$

其解是

$$r = r_0 \mathrm{e}^{-2\chi t} \tag{29}$$

式中,r_0 是初始值.所以初始二项式态的振幅衰减就是

$$\rho_b(t) =$$

$$\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(r_0 \mathrm{e}^{-2\chi t})^l (1 - r_0 \mathrm{e}^{-2\chi t})^{m-l} \mid l >< l \mid \tag{30}$$

处于 $\rho_b(t)$ 混态的平均光子数为

$$\mathrm{tr}(\rho_b(t) a^\dagger a) = m r_0 \mathrm{e}^{-2\chi t} \tag{31}$$

式(31)物理意义在于,在自然界中,系统皆受热库包围而耗散,量子光场的退相干不可避免,我们可以从比较光场演化后的终态与初态的光子数的差别来判断退相干的情形.

4 结论

我们采用相干态表象和有序算符内的积分理论,从经典扩散方程和纯相干态密度算符的振幅衰减方程推导了量子光场密度矩阵扩散方程和振幅衰减方程,此推导简捷明了,避免了以往复杂的思路,这也便于人们理解量子统计力学和量子光学中系统的动力学主方程的来源及其演化规律.在此基础上我们证明了光场二项式态的振幅衰减,即体现在二项分布的参数的衰减 $r_0 \to r_0 \mathrm{e}^{-2\chi t}$,并给出了处于 $\rho_b(t)$ 混态的平均光子数,由此可判断量子光场的退相干情况.今后我们将用此方法讨论其他量子通道的时间演化.

参考文献(References)

[1] LOUISELL W H, LOUISELL W H. Quantum Statistical Properties of Radiation[M]. New York: Wiley,1973, 538(2): 263-274.

[2] FOX A M, FOX M. Quantum Optics: An Introduction [M]. Oxford: OUP, 2006: 35.

[3] PURI R R. Mathematical Methods of Quantum Optics [M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2001: 195.

[4] KLAUDER J, SKAGERSTAM B. Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics[M]. Singapore: World Scientific, 1985: 219-219.

[5] GLAUBER R J. The quantum theory of optical coherence[J]. Physical Review, 1963, 130(6): 2529-2532.

[6] FAN H Y. From Quantum Mechanics to Quantum Optics: Development of the Mathematical Physics[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2005: 111-114.

[7] FAN H Y, LU H L, FAN Y. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators in quantum mechanics and derivation of entangled state representations[J]. Annals of Physics, 2006, 321(2): 480-494.

[8] FAN H Y. Operator ordering in quantum optics theory and the development of Dirac's symbolic method[J]. J Opt B: Quant Semiclass Opt, 2003, 5(4): 147-163.

[9] HU L Y, FAN H Y. Generalized positive-definite operator in quantum phase space obtained by virtue of the Weyl quantization rule[J]. Chin Phys Lett, 2009, 26(6): 060307.

[10] HU L Y, FAN H Y. New approach for solving master equations in quantum optics and quantum statistics by virtue of thermo-entangled state representation[J]. Commun Theor Phys, 2009, 51(4): 729-742.

[11] BERRY M V. Comment on "new representation of quantum chaos" [J]. Phys Lett A, 1984, 104: 306-308.