

具有饱和接触率与混合控制策略的 SIQR 模型的动力学分析

马艳丽, 褚正清, 李红菊

(安徽新华学院通识教育部, 安徽合肥 230088)

摘要: 考虑接种、隔离和剔除混合控制策略, 建立了一个具有饱和接触率的 SIQR 传染病模型, 从理论分析和数值模拟方面研究了该模型的全局稳定性. 首先, 通过计算得到了疾病灭绝与否的阈值—基本再生数 R_0 和平衡点存在的条件; 其次, 当 $R_0 < 1$ 时, 利用 Liapunov 函数证明了无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的; 然后, 当 $R_0 > 1$ 时, 运用 Dulac 函数证明了地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的; 最后, 利用计算机仿真, 进一步证实理论分析的正确性.

关键词: 基本再生数; 平衡点; 全局渐近稳定性; Liapunov 函数; Dulac 函数

中图分类号: O175 **文献标识码:** A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2020.05.016

2010 Mathematics Subject Classification: 92D25

引用格式: 马艳丽, 褚正清, 李红菊. 具有饱和接触率与混合控制策略的 SIQR 模型的动力学分析[J]. 中国科学技术大学学报, 2020, 50(5): 682-687.

MA Yanli, CHU Zhengqing, LI Hongju. Dynamic analysis of an SIQR model with saturation contact rate and hybrid strategies[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020, 50(5): 682-687.

Dynamic analysis of an SIQR model with saturation contact rate and hybrid strategies

MA Yanli, CHU Zhengqing, LI Hongju

(Department of Common Course, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China)

Abstract: Considering vaccination, quarantine and elimination hybrid strategies, an SIQR epidemic model with saturation contact rate was established. And the global stability of the model was studied by means of both theoretical and numerical ways. Firstly, the threshold-basic reproductive number R_0 which determines whether the disease is extinct or not and the conditions for the existence of equilibriums were obtained by the calculation. Secondly, by Liapunov function, it was proved that the disease-free equilibrium P_0 is globally asymptotically stable when $R_0 < 1$. Thirdly, by constructing a suitable Dulac function, it was obtained that the unique endemic equilibrium P^* is globally asymptotically stable when $R_0 > 1$. Finally, some numerical simulations were presented to illustrate the analysis results.

Key words: basic reproductive number; equilibrium; global stability; Liapunov function; Dulac function

收稿日期: 2019-06-26; 修回日期: 2019-08-02

基金项目: 安徽省高校自然科学重点研究项目(KJ2018A0598, KJ2019A0597, KJ2019A0875, KJ2019A0876), 中国博士后科学基金(2017M621579), 安徽新华学院自然科学重点研究项目(2019ZR005)资助.

作者简介: 马艳丽(通讯作者), 女, 1983年生, 硕士/副教授. 研究方向: 传染病动力学. E-mail: linda-mayanli@163.com

0 引言

现实生活中,传染病广泛存在和流行,利用动力学方法来研究传染病是非常重要的方法之一.在描述传染病传播过程和行为的传染病模型中,最重要的是对疾病发生率的刻画,它的一般表达式为 $\beta SI C(N)/N$, 疾病发生率可能直接或间接受到如种群密度和生活习惯这些因素的影响,其决定了传染病的传播和发生情况^[1].人们在分析、研究和构造传染病模型时,通常假设传染率与种群总数成正比,即传染率设为双线性发生率 βSI .文献[2-4]研究了具有双线性发生率的 SIQR 传染病模型的全局稳定性,当种群数量很大时,这种发生率就不符合实际情况.当种群数量较大时,通常假设接触率为一常数,即传染率取为标准发生率 $\beta \frac{S}{N} I$, 文献[5-7]中传染病模型的疾病发生率考虑的是标准发生率,但当种群数量较小时,考虑该发生率显然不太合适.文献[8-10]将一般形式的接触率 $\beta(N)SI$ 引入到染病模型中,但这种发生率的表达式较为抽象,不够具体.介于双线性发生率和标准发生率之间且具有具体发生率函数的还有一种可能更符合实际情况的饱和接触率,即发生率的表达式为 $\frac{\beta SI}{1 + \alpha I}$, 本文将饱和接触率引入模型,更加的具有现实意义.

为了有效地控制和减少传染病的发生和传播,通常需要采取相应的控制策略,对染病者进行隔离是最直接的措施,对于一些由动物引发或者在动物中蔓延的疾病,剔除是消灭传染源的重要措施,对易感者进行预防接种也是防止易感种群受染的有效措施.目前已有大量的文献^[11-15]研究了预防和控制策略对传染病动力学性态的影响,但该类传染病模型中同时考虑接种、剔除和隔离策略的研究理论仍很不完善,值得进一步研究.因此,本文将接种、剔除和隔离策略的混合情况引入到传染病模型中,丰富该类传染病模型动力学的研究工作.

针对上述情况,本文构建了一类具有饱和接触率的 SIQR 传染病模型,并考虑接种、隔离和剔除策略的混合情况,通过计算得到了控制疾病灭绝与否的阈值—基本再生数 R_0 . 和平衡点存在的条件,利用 Liapunov 函数和 Daluc 判定定理分析了无病平衡点 P_0 . 和地方病平衡点 P^* 的动力学性态,并借助计算机软件进行仿真,进一步证实理论分析的正

确性.

1 模型的建立

为了研究某种疾病,根据流行病学动力学(epidemiological dynamics)仓室建模思想,我们将某地区的种群分为四类:易感者类(Susceptible),染病者类(Infected),隔离者类(Quarantined)和移出者类(Recovered),可以得到如下 SIQR 传染病模型框图,如图 1 所示.

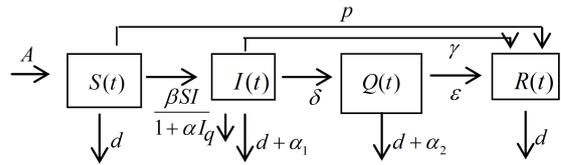


图 1 SIQR 传染病模型框图

Fig. 1 Compartment structure of SIQR epidemic model

相应的 SIQR 微分方程模型为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - dS - pS \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)I \\ \frac{dQ}{dt} &= \delta I - (\epsilon + d + \alpha_2)Q \\ \frac{dR}{dt} &= pS + \gamma I + \epsilon Q - dR \end{aligned} \right\} (1)$$

式中, $S(t)$ 表示 t 时刻易感者的数量; $I(t)$ 表示 t 时刻染病者的数量; $Q(t)$ 表示 t 时刻隔离者的数量; $R(t)$ 表示 t 时刻移出者的数量. A 表示种群的输入常数, $\frac{\beta SI}{1 + \alpha I}$ 表示疾病的饱和接触率, d 表示种群的自然死亡率, p 表示接种率, γ 表示从染病者到移出者的恢复系数, α_1 表示染病者的因病死亡率, δ 表示从染病者到隔离者的隔离系数, ϵ 表示从隔离者到移出者的恢复系数, q 表示染病者的剔除率, α_2 表示隔离者的因病死亡率. 假设 $A, d, \alpha_1, \alpha_2, \gamma, p, \delta, \epsilon, q, \beta$ 和 α 均为正数.

2 平衡点和基本再生数

令总人口为 $N(t)$,

$$N(t) = S(t) + I(t) + Q(t) + R(t).$$

将系统(1)中的四个方程相加,得到如下总人口方程:

$$N'(t) = A - dN - (\alpha_1 + q)I - \alpha_2 Q \leq A - dN,$$

由此可以得到

$$N(t) \leq N(0)e^{-dt} + \frac{A}{d}(1 - e^{-dt}),$$

从而得到: $\limsup_{t \rightarrow +\infty} (N(t)) = \frac{A}{d}$, 则系统(1)有最大正向不变集, 即 $D = \{(S, I, Q, R) \in R_+^4 \mid S \geq 0, I \geq 0, Q \geq 0, R \geq 0, S + I + Q + R \leq A/d\}$.

令系统(1)中各个方程的右端项等于零, 有

$$\begin{cases} A - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - dS - pS = 0, \\ \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)I = 0, \\ \delta I - (\epsilon + d + \alpha_2)Q = 0, \\ pS + \gamma I + \epsilon Q - dR = 0 \end{cases} \quad (2)$$

解方程组(2), 得到系统(1)的无病平衡点 $P_0(\frac{A}{d+p}, 0, 0, \frac{Ap}{d(d+p)})$. 定义疾病流行与否的阈值—基本再生数

$$R_0 = \frac{\beta A}{(d+p)(d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)}.$$

则在区域 D 内系统(1)还存在唯一的地方病平衡点 $P^*(S^*, I^*, Q^*, R^*)$, 其中,

$$S^* = \frac{\alpha_1 + \gamma + q + \delta + d + \alpha A}{\beta + \alpha(d+p)} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{(d + \alpha_1 + \gamma + q + \delta)(1 + \alpha I^*)}{\beta}, \\ I^* &= \frac{\beta A - (d+p)(d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)}{(\beta + \alpha(d+p))(d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)} = \\ & \frac{d+p}{\beta + \alpha(d+p)}(R_0 - 1), \\ Q^* &= \frac{\delta}{d + \alpha_2 + \epsilon} \frac{d+p}{\beta + \alpha(d+p)}(R_0 - 1) = \\ & \frac{\delta}{d + \alpha_2 + \epsilon} I^*, \\ R^* &= \frac{\gamma I^* + pS^* + \epsilon Q^*}{d}. \end{aligned}$$

由上述的讨论能够得到如下结果:

定理 2.1 系统(1)总存在无病平衡点 P_0 , 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)还存在唯一的地方病平衡点 P^* .

3 无病平衡点的稳定性分析

定理 3.1 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(1)的无病平衡点 P_0 局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 P_0 不稳定.

证明 当 $R_0 < 1$ 时, 在无病平衡点 $P_0(\frac{A}{d+p}, 0, 0, \frac{Ap}{d(d+p)})$ 处, 系统(1)的 Jacobian 矩阵为

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -d-p & -\frac{\beta A}{d+p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta A}{d+p} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -d - \alpha_2 - \epsilon & 0 \\ p & \gamma & \epsilon & -d \end{pmatrix}.$$

矩阵 $J(P_0)$ 的四个特征根分别为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(d+p) < 0, \\ \lambda_3 &= -(d + \alpha_2 + \epsilon) < 0, \lambda_4 = -d < 0, \\ \lambda_2 &= \frac{\beta A}{d+p} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q) = \\ & (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)(R_0 - 1). \end{aligned}$$

当 $R_0 < 1$ 时, 特征值 $\lambda_2 < 0$, 即矩阵 $J(P_0)$ 的所有特征根都具有负实部; 当 $R_0 > 1$ 时, 特征值 $\lambda_2 > 0$, 矩阵 $J(P_0)$ 至少存在一个正实部的特征根. 因此, 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P_0 局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 P_0 不稳定.

定理 3.2 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(1)的无病平衡

点 P_0 全局渐近稳定.

证明 定义 Liapunov 函数

$$V(t) = I(t),$$

则 $V(t)$ 沿着系统(1)的导数有

$$\begin{aligned} V'(t)|_{(1)} &= \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)I \leq \\ & [\beta \frac{A}{d+p} - (d + \alpha_1 + \gamma + q + \delta)]I = \\ & (d + \alpha_1 + \gamma + q + \delta)(R_0 - 1)I. \end{aligned}$$

显然, 当 $R_0 < 1$ 时, $V'(t) \leq 0$. 令 $\Gamma = \{(S, I, Q, R) \mid V'(t) = 0\} = \{(S, I, Q, R) \mid I(t) = 0\}$, 所以在 Γ 中系统(1)的正向最大不变子集是 $\{P_0\}$. 根据

LaSalle 不变集原理^[16,17], 在区域 D 内的任何轨线都趋于平衡点 P_0 , 即当 $R_0 < 1$ 时, 系统(1)的无病平衡点 P_0 全局渐近稳定.

4 地方病平衡点的稳定性分析

定理 4.1 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)的地方病平

衡点 P^* 是局部渐近稳定的.

证明 在地方病平衡点 P^* 处, 利用线性近似系统的特征值方法来分析其局部渐近稳定性. 系统(1)的 Jacobian 矩阵为

$$J(P^*) = \begin{pmatrix} -d - p - \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} & -\frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} & 0 & 0 \\ \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} & \frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -d - \alpha_2 - \epsilon & 0 \\ p & \gamma & \epsilon & -d \end{pmatrix}.$$

则矩阵 $J(P^*)$ 的四个特征根分别为: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = -(d + \alpha_2 + \epsilon) < 0, \lambda_4 = -d < 0$, 其中特征根 λ_1 和 λ_2 也是二阶矩阵

$$J^*(P^*) = \begin{pmatrix} -d - p - \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} & -\frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} \\ \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} & \frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q) \end{pmatrix}$$

的特征根, 即是方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根, 其中,

$$p = -\left[-d - p - \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} + \frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)\right] = \frac{(d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)\alpha I^* + \beta I^*}{1 + \alpha I^*} + d + p > 0,$$

$$q = \begin{vmatrix} -d - p - \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} & -\frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} \\ \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} & \frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q) \end{vmatrix} = \frac{(\alpha(d + p) + \beta)(d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)I^*}{1 + \alpha I^*} = \frac{\beta(\alpha(d + p) + \beta)S^* I^*}{(1 + \alpha I^*)^2} > 0.$$

从而得到 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. 又因为

$$\lambda_3 = -(d + \alpha_2 + \epsilon) < 0, \lambda_4 = -d < 0,$$

所以矩阵 $J(P^*)$ 的所有特征根都具有负实部, 根据 Hurwitz 判定定理^[16,17], 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)的地方病平衡点 P^* 局部渐近稳定.

定理 4.2 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)的地方病平衡点 P^* 全局渐近稳定.

证明 由于系统(1)的第一个和第二个方程与 Q 和 R 无关, 所以我们首先讨论系统(1)的前两个方程所组成的子系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - dS - pS, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)I \end{cases} \quad (3)$$

对于系统(3)构造 Dulac 函数:

$$B(S, I) = \frac{1}{SI},$$

令 $P = A - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - dS - pS, Q = \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (d + \alpha_1 + \gamma + \delta + q)I$, 则得到

$$\frac{\partial(BP)}{\partial S} + \frac{\partial(BQ)}{\partial I} = -\frac{A}{S^2 I} - \frac{\alpha\beta}{(1 + \alpha I)^2} < 0.$$

由 Dulac 判定定理^[18]可知系统(3)在第一象限

内无闭轨线,结合定理 4.1,因此系统(3)的解 (S^*, I^*) 全局渐近稳定. 从而得到:当 $R_0 > 1$ 时,系统(3)的任意一解都趋于 (S^*, I^*) , 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S^*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = I^*$.

下面证明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = Q^*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = R^*$.

考虑系统(1)的第三个方程,可以得到其极限方程为

$$Q(t) = [Q_0 + \int_{t_0}^t \delta I(\tau) \exp((\epsilon + d + \alpha_2)(\tau - t_0)) d\tau] \cdot \exp[-(\epsilon + d + \alpha_2)(t - t_0)],$$

利用 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\delta I(t)}{(\epsilon + d + \alpha_2)} = \frac{\delta}{(\epsilon + d + \alpha_2)} I^* = Q^*.$$

类似地,可以得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = R^*$.

综上所述可知,系统(1)的地方病平衡点 P^* 在区域 D 上是全局吸引的,从而得到,当 $R_0 > 1$ 时,系统(1)的地方病平衡点 P^* 全局渐近稳定.

5 数值模拟

下面利用计算机软件将系统(1)离散化,做数值模拟分析疾病的流行趋势,验证理论分析的正确性.

首先验证定理 3 的正确性. 选取参数 $A = 0.26$, $\alpha = 0.1, \beta = 0.09, d = 0.02, q = 0.12, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.01, \gamma = 0.1, p = 0.05, \delta = 0.12, \epsilon = 0.3$. 取 12 组初值 $(1.5, 2.5, 1, 4.6), (4, 0.4, 6, 2.5), (5.5, 3.8, 0.5, 2), (0.8, 1.6, 2.1, 8.9), (3, 5.1, 1.8, 2), (4.2, 1.5, 2, 3.2), (6.5, 2.5, 1, 1.5), (1.3, 0.4, 2, 9.5), (8.5, 0.8, 0.5, 0.5), (4.8, 1.6, 2.1, 4.3), (3.6, 3.1, 4.8, 0.9), (0.5, 0.1, 1.4, 10.1)$. 通过计算可得 $R_0 = 0.7267 < 1$, 无病平衡点 $P_0 = (3.694, 0, 0, 9.281)$, 其图像如图 2 所示.

由图 2 可知,当 $R_0 < 1$ 时,系统(1)的解趋向于无病平衡点 P_0 , 从而验证定理 3.2 的正确性.

其次,在初值不变的情况下选取参数 $A = 0.26$, $\alpha = 0.02, \beta = 0.8, d = 0.02, q = 0.12, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.01, \gamma = 0.1, p = 0.05, \delta = 0.12, \epsilon = 0.3$. 通过计算可得 $R_0 = 6.4596 > 1$, 地方病平衡点 $P^* = (3.696, 0.478, 0.173, 6.451)$, 其图像如图 3 所示.

根据图 3 得到,当 $R_0 > 1$ 时,系统(1)的解稳定

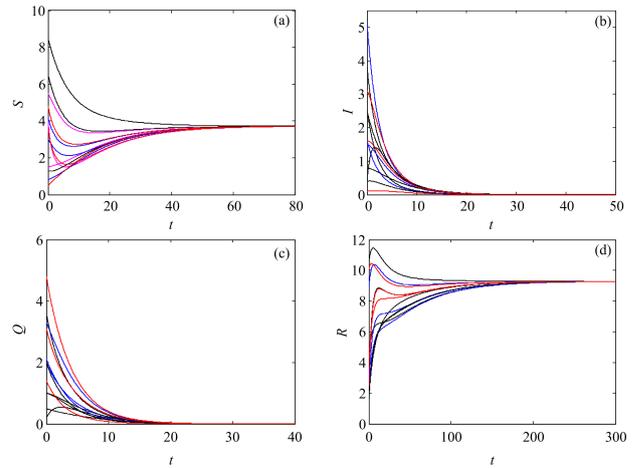


图 2 $R_0 = 0.7267$ 时,无病平衡点全局稳定示性图

Fig. 2 Global stability map of the disease-free equilibrium when $R_0 = 0.7267$

于地方病平衡点 P^* , 从而验证定理 4.2 的正确性.

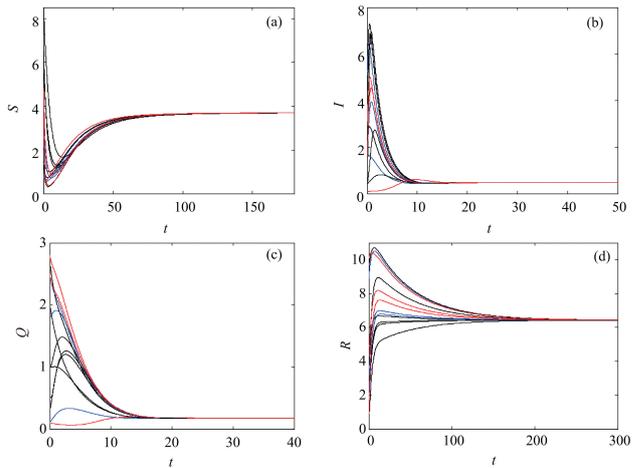


图 3 $R_0 = 6.4596$ 时,地方病平衡点全局稳定示性图

Fig. 3 Global stability map of the unique endemic equilibrium when $R_0 = 6.4596$

6 结论

本文建立了一个具有饱和接触率和混合控制策略的 SIQR 传染病模型,通过对模型的动力学状态分析可知,一般传染病的流行与消亡完全取决于基本再生数 R_0 , R_0 越小对传染病的控制与消除越有利. 当 $R_0 < 1$ 时,利用 Hurwitz 判据和 Liapunov 函数证明了无病平衡点 P_0 的局部稳定性和全局稳定性,疾病将自然消亡. 当 $R_0 > 1$ 时,利用 Bendixson-Dulac 判别法得到了地方病平衡点 P^* 的全局渐近稳定性,疾病将成为地方病并且始终存

在. 从

$$R_0 = \frac{\beta A}{(d+p)(d+\alpha_1+\gamma+\delta+q)}$$

可知, R_0 随着参数 p, δ 和 q 的增加而减小, 即基本再生数 R_0 是接种、隔离和剔除策略参数的递减函数, 从而说明了这些预防和控制策略有利于阻止传染病的传播和发展, 并且这些策略的混合使 R_0 减少的速度大于单一的策略. 本文主要考虑了接种、剔除和隔离三种预防和控制策略的混合情况, 这些策略参数在本文的模型中取的是常量, 但如果将其看成是时间 t 的变量, 这将更符合实际情况, 此时的模型为非自治传染病模型, 对于该模型是我们今后主要研究的方向.

参考文献(References)

- [1] XU R, MA Z E. Global stability of a delayed SEIRS epidemic model with saturation incidence rate [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 61: 229-239.
- [2] MA Yanli, LIU Jiabao, LI Haixia. Global dynamics of an SIQR model with vaccination and elimination hybrid strategies [J]. *Mathematics*, 2018, 6 (12): 328-339.
- [3] 马艳丽, 张仲华, 刘家保, 等. 一类具有脉冲接种与脉冲剔除的 SIQR 模型[J]. *中国科学技术大学学报*, 2018, 48(2): 111-117.
- [4] LI Guihua, WANG Wendi, JIN Zhen. Global stability of an SEIR model with constant immigration [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 30 (4): 1012-1019.
- [5] ECKALBAR J C, ECKALBAR W L. Dynamics of an SIR model with vaccination dependent on past prevalence with high-order distributed delay [J]. *Biosystems*, 2015, 129(1): 50-65.
- [6] 徐金瑞, 王美娟, 张拥军. 一类具有标准发生率的 SIS 型传染病模型的全局稳定性[J]. *生物数学学报*, 2010, 25(2): 249-256.
- [7] 马艳丽, 张仲华. 潜伏类和移出类具有传染性的 SEIR 模型的渐近分析[J]. *中国科学技术大学学报*, 2016, 46 (2): 95-103.
- [8] LI Jianquan, ZHANG Juan, MA Zhi'en. Global analysis of some epidemic models with general contact rate and constant immigration [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25(4): 396-404.
- [9] LI Guihua, JIN Zhen. Global stability of an SEI epidemic model with general contact rate [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(3): 997-1004.
- [10] 马艳丽, 徐文雄, 张仲华. 具有一般形式接触率的 SEIR 模型的稳定性分析[J]. *中国科学技术大学学报*, 2015, 45(9): 737-744.
- [11] TAN X X, LI S J, DAI Q W, et al. An epidemic model with isolated intervention based on cellular automata [J]. *Advanced Materials Research*, 2014, 926(1): 1065-1068.
- [12] ECKALBAR J C, ECKALBAR W L. Dynamics of an SIR model with vaccination dependent on past prevalence with high-order distributed delay [J]. *Biosystems*, 2015, 129(1): 50-65.
- [13] SHI PEILIN, DONG LINGZHEN. Dynamical models for infectious diseases with varying population size and vaccination [J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, 12(1), 253-273.
- [14] 叶志勇, 刘原, 吴用. 具有非单调传染率的 SIQR 传染病模型的稳定性分析[J]. *生物数学学报*, 2014, 29(1): 105-112.
- [15] 张珍, 靳祯. 一类带脉冲接种和脉冲剔除的 SIR 传染病模型的稳定性态[J]. *太原师范学院学报(自然科学版)*, 2006, 5(4): 8-10.
- [16] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 3-8.
- [17] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 41-50.
- [18] 徐文雄, 张仲华, 成芳. 一类 SIS 流行病传播数学模型全局渐近稳定性[J]. *四川师范大学学报(自然科学版)*, 2004, 27(6): 585-588.