

基于 E-GAS-AST 模型对金融市场的风险度量与回测

夏艺萌, 陈 昱

(中国科学技术大学管理学院, 安徽合肥 230026)

摘要: 针对金融数据的重尾、波动聚集、非对称性等特征, 提出了基数据驱动的 GAS 模型的两种新模型: E-GAS-AST 模型和 E-GAS-AST-GPD 模型, 并利用新模型对实际数据进行了风险度量和回测. 基于 GAS 模型, 结合具有重尾特征的非对称学生 t -分布 (AST), 参照 EGARCH 模型提出了 E-GAS-AST 模型, 并使用 GPD 分布对尾部极值特征进行进一步的描述, 重新得到 E-GAS-AST-GPD 模型. 通过研究两个模型各自的残差分布计算出 VaR 值和 ES 值, 并分别进行回测检验. 引入参数驱动模型比如半参数 GARCH 模型、EGARCH- t 模型和 GJR-GARCH- t 模型进行风险度量的估计, 并与本文提出的两个模型进行比较. 对道琼斯指数和上证指数在考虑收益率序列可能存在变点的情况下进行的实证研究表明, 该数据驱动的 E-GAS-AST 模型是一个较好可行的模型, 可用于对金融市场进行风险度量的模型.

关键词: 风险度量; VaR 值; ES 值; GAS 模型; AST 分布; 回测检验

中图分类号: O643.36 **文献标识码:** A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2020.05.013

引用格式: 夏艺萌, 陈昱. 基于 E-GAS-AST 模型对金融市场的风险度量与回测[J]. 中国科学技术大学学报, 2020, 50(5): 654-668.

XIA Yimeng, CHEN Yu. Risk measurement and backtesting of financial market based on E-GAS-AST model[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020, 50(5): 654-668.

Risk measurement and backtesting of financial market based on E-GAS-AST model

XIA Yimeng, CHEN Yu

(School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: Concerning financial data's fat-tail, volatility clustering and asymmetry, we raise two data-driven models: E-GAS-AST model and E-GAS-AST-GPD model, and proceed risk measuring and backtesting with real data. Based on generalized autoregressive score (GAS) model, combining asymmetric student- t (AST) distribution with heavy tail, we propose a new model denoted by E-GAS-AST referring to EGARCH model. Considering describing more of tail features, we propose another E-GAS-AST-GPD model with generalized pareto distribution (GPD). Afterwards, the paper computes VaR and ES by studying distributions of residuals, and backtests them separately. Introducing parameter-driven models, such as semi-parameter generalized autoregressive conditional heteroskedasticity (GARCH) model, EGARCH- t model and GJR-GARCH- t model to produce risk measurement we compare them with two

收稿日期: 2019-05-01; **修回日期:** 2019-06-03

基金项目: 国家重点研发计划项目(2016YFC0800104), 国家自然科学基金(11671374, 71771203, 71631006)资助.

作者简介: 夏艺萌, 女, 1995年生, 硕士. 研究方向: 金融风险预测. E-mail: xxx0502@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 陈昱, 博士/副教授. E-mail: cyu@ustc.edu.cn

above models proposed. Empirical analysis using Dow Jones Index and Shanghai Stock Exchange Composite Index concerning change point reveals E-GAS-AST model is proper to model financial market and measure risk.

Key words: risk measure; VaR; ES; GAS model; AST distribution; backtest

0 引言

在计算风险测度时,为选取模型进行风险度量,将考虑金融收益率序列的若干特征.首先是 Brook^[1]提出的波动聚集,合理的风险度量会将偶然出现的突变作为接下来的波动率估计的因素之一.其次是重尾性,简单地使用正态分布来分析,会低估大损失、大收益的发生频率,因此为了不低估风险,我们需要用一些其他的分布或模拟技术来分析以更贴近现实.最后是杠杆影响^[2],描述过去的突发事件对现在的波动率影响的非对称性,即过去的大损失会比相同程度的大收益带来更大的波动率.

由于金融时间序列存在波动聚集,用时变的条件方差建立模型比固定条件方差更合理,比如 Engle^[3]引入的自回归条件异方差(ARCH)模型,它的条件方差是基于过去的残差动态变化的,其非条件方差是固定的. Bollerslev^[4]将这个模型进行了推广,将历史条件方差作为影响当前条件方差的因素之一,本文将此模型与我们的模型对比.本文考虑的观察值驱动模型:广义自回归(GAS)模型^[5]也可以基于时变的条件方差进行讨论.在观察值驱动模型中,参数是同期和时滞的外生变量与时滞的因变量的函数,即使参数是变化的,参数完全由已知的信息决定,可以直接用极大似然估计(MLE)来估计参数,这是观察值驱动模型在应用统计学和经济学领域广受欢迎的原因.特别地,选取特定的得分函数,广义自回归模型可以退化为一些标准的观察值驱动模型,如 Engle^[3]和 Bollerslev^[4]的广义自回归条件异方差(GARCH)模型,Engle & Russell^[6]的自回归条件久期(ACD)和自回归条件强度(ACI)模型,Patton^[7]的动态 Copula 模型.

此外,GAS 还能捕捉非对称、有偏、长记忆性等复杂性,由于 GAS 模型的构造基于得分函数,它可以完全地描述密度分布结构而非仅仅描述均值及较高阶矩特征,这是 GAS 模型不同于其他观察值驱动模型的重要特点.

学生 t -分布由于具有重尾性在金融领域广泛应用,如 Bollerslev^[4]用学生 t -分布拟合外汇利率.针对金融收益率序列的有偏性,Hansen^[8]首次使用带

偏的学生 t -分布描述金融收益序列的条件分布的偏度,自此,数种学生 t -分布在偏度上的衍生被提出并应用在金融和其他领域^[9-16]. Zhu^[17]定义了广义非对称学生 t -分布来描述上下尾的极端值出现的不同频率.偏度参数控制了一个分布的主要非对称性,因此带一个偏度参数,两个尾部参数的 AST 分布有能力提高对历史数据尾部的拟合、预测.两个尾部参数能对分布的尾部特征拟合更精确,也更可能准确预测像 ES 这样依赖于尾部形状的值,但在有限的样本量下,单尾部参数分布的估计也不一定会表现得更好.在一些实证分析下,单尾部参数分布与两尾部参数分布表现相差很小,在拟合道琼斯指数时,根据 AIC,带单尾部参数 AST 分布的 GAS 模型表现得比两尾部参数的甚至更好,因此本文模型考虑使用单尾部参数的 AST 分布.

当考虑金融资产的风险时,最重要的就是重大、罕见的损失,如 1987 年的黑色星期一,2010 年的闪崩.损失分布的上尾一直都是人们最感兴趣的部分,由于高分位数和尾部远端的条件期望很难用非参数方法如历史模拟法或者传统的用正态分布或 t 分布的参数方法来估计,所以需要有一个有效的方法从观察到的巨大损失中获取更多信息,以更好地预测大而罕见的损失.极值理论(EVT)作为一种集中考虑资产收益的尾部行为的方法在尾部估计上有两个优点:拥有完善的统计理论和分布尾部的参数表达式.在 EVT 方法的领域有两种主要的方法^[18]:基于 GEV(generalized extreme value)的 BM(block maxima)方法和基于 GPD(generalized pareto distribution)的 POT(peak over threshold)方法.从 Longin^[19]开始,许多研究人员基于真实市场数据对用 EVT 估计极值风险进行了实证研究,Neftci^[20]和 Fromont^[21]证实了基于 POT 方法的非条件 VaR 比基于正态分布的更准确;Da Silva 等^[22]对 10 个亚洲股票市场进行了研究并展示了基于 GEV 的 VaR 值预测的准确性;McNeil 等^[23]首次将 GARCH 模型和 GPD 分布结合估计条件 VaR;Marimoutou 等^[24]将条件 GPD 应用原油领域;Assaf^[25]用条件 GPD 对新兴市场的风险进行了建模.尽管大量的研究展示出了 EVT 在 VaR 和 ES 估计上的实证优越

性,但鲜有工作考虑收益率的非对称性问题,本文将引入非对称性的模型来对金融市场进行风险度量.

近年来,在金融领域中尤其是金融风险管理领域中,分析极端事件引起了研究人员的广泛关注.从实际意义上来说,我们需要可靠的工具来度量极值风险,以保护金融系统和投资者的权益不受像 1987 年股票市场的崩盘、2000 年互联网泡沫破灭或 2007 年的次贷危机那样毁灭性的打击.一般来说,风险管理是一种识别、度量、控制风险的系统性方法.通常风险估计的研究集中于两种试图对损失分布尾部描述的度量方式:在险值 VaR(value at risk)和期望损失 ES(expected shortfall).VaR 能够有效直观地展现资产或组合的严重损失出现可能,也便于通过参数模型进行计算和回溯.而 ES 能满足次可加性和描述发生损失时的大致损失程度.

本文拟通过构建数据驱动的 E-GAS-AST 模型和 E-GAS-AST-GPD 模型来描述金融数据的重尾、波动聚集和非对称性,本文以 GAS 模型为基本框架,结合 AST 分布,参照 EGARCH 模型的思想构建了 E-GAS-AST 模型,并首次将其使用在金融收益率序列上进行模拟估计和风险度量,在 E-GAS-AST 模型估计的基础上,本文首次将该模型与极值分布 GPD 分布相结合,并对其进行估计和对实际数据的风险进行度量.通过与参数驱动模型,如半参数 GARCH 模型、EGARCH- t 模型和 GJR-GARCH- t 模型基于对道琼斯指数和上证指数进行对比,我们验证了构建的 E-GAS-AST 模型对两种数据的 VaR 值预测都有非常好的结果,对相对平稳的道琼斯指数的 ES 值预测也有不逊于 3 种对比模型的效果,而 E-GAS-AST-GPD 模型在对波动剧烈的上证指数的 ES 值预测上远超其他所有模型,是在波动剧烈的数据下对 ES 值进行预测的重要模型.

1 模型构建

1.1 模型 1: E-GAS-AST 模型

1.1.1 GAS 模型的构建

首先介绍 Creal 等^[5]提出的广义自回归得分(GAS)模型,这是一种数据驱动模型,可以很好地刻画数据的动态特征,也便于估计,定义如下:若 y_t 表示想考察的因变量,也是可观察到的数据样本,如收益率序列,服从条件分布 $p(y_t, \theta_t)$,其中 θ_t 为条件分布函数中的时变参数,它能完全描述条件分布,

且取值只取决于 $\{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ 和一些静态变量 κ , A, B, \mathcal{F}_{t-1} 表示 t 时刻之前的全部信息,包括 $\{\theta_1, \dots, \theta_{t-1}\}$ 和 $\{y_1, \dots, y_{t-1}\}$,则 GAS 模型的表达式为

$$y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim p(y_t, \theta_t) \quad (1)$$

$$\theta_{t+1} = \kappa + A s_t + B \theta_t \quad (2)$$

式中,

$$s_t = S_t \nabla_t \quad (3)$$

$$\nabla_t = \frac{\partial \ln p(y_t, \theta_t)}{\partial \theta_t} \quad (4)$$

$$S_t = \mathcal{J}_t(\theta_t)^{-\gamma} \quad (5)$$

式(2)表现了 GAS 模型的主要特点:时变参数向量 θ_t 的变化由条件分布的得分即式(4)和自回归成分共同决定.其中 $\mathcal{J}_t(\theta_t)$ 是 θ_t 的信息阵,即 $\mathcal{J}_t(\theta_t) = E_{t-1}[\nabla_t(y_t, \theta_t) \nabla_t(y_t, \theta_t)']$,这里的期望是基于 $y_t | \mathcal{F}_{t-1}$ 的条件期望.由等式(2)可以看出 s_t 是按比例放缩过后的得分.式(2)中的 κ, A, B 即为前面所提到的影响 θ_t 的静态变量,其中 A, B 我们限制其必须为对角阵.

常用的 γ 取值为 $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$,当 $\gamma=0$ 时, $S_t = I$, I 为单位阵,表示没有放缩,当 $\gamma=1$ 时, S_t 为协方差阵的逆,当 $\gamma=\frac{1}{2}$ 时, S_t 为协方差阵逆的平方根,具体取值往往由使用者自行决定,本文选取 $\gamma=0$.

值得一提的是,无论 γ 取值如何, s_t 是一个基于 $y_t | \mathcal{F}_{t-1}$ 条件分布的鞅差序列,即 $E_{t-1}[s_t] = 0$,对任意 t .由于 s_t 是一个鞅差序列,如果 B 的谱半径小于 1,则式(2)意味着 θ_t 的更新是一个围绕着长期均值 $(I-B)^{-1}\kappa$ 的均值回复过程,所以向量 κ 和矩阵 B 控制了这个过程的水平和其持续性.其中谱半径的定义为:对于一个 L 阶方阵 X , τ_i 为 X 的第 i 个特征值,则 X 的谱半径为 $\max(|\tau_1|, |\tau_2|, \dots, |\tau_L|)$.系数矩阵 A 控制了 s_t 对 θ_{t+1} 的影响,而 s_t 表示了参数向量 θ_t 向 θ_{t+1} 移动的移动方向,因此 A 作为移动的步长,它不能扰乱由 s_t 决定的方向,因此 A 中的元素应当全部不为负.

GAS 模型是许多观察值驱动模型的一般形式,如 GARCH 模型中考虑基本的 GARCH(1,1)模型

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (6)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \quad (7)$$

式中, ϵ_t 是服从正态分布 $N(0, 1)$ 随机扰动.

当考虑 GAS 模型为 $y_t = \sigma_t \epsilon_t$, ϵ_t 是服从 $N(0, 1)$ 的随机扰动, σ_t 是时变的标准差,则 y_t 服从均值

为 0, 方差为时变的 σ_t^2 的正态分布 $N(0, \sigma_t^2)$, 即同式(1), 此时 $\theta_t = \sigma_t^2$, 取 $\gamma = 1$, 通过简单计算, 由式(2)有 $\sigma_{t+1}^2 = \omega + A_1(y_t^2 - \sigma_t^2) + B_1\sigma_t^2$, 通过简单的计算, 可以看出与式(7)一致.

考虑到 GAS 模型所具有的观察值驱动模型的良好特性和其本身所具有的描述特定时序的便利性, 本文基于该模型提出 E-GAS-AST 模型来对金融市场的收益率序列进行拟合. 由于收益率序列的条件期望和条件波动率具有的时变特征, 取 $\theta_t = \{\mu_t, \sigma_t\}$, 并对式(2)中的参数进行定义:

$$\begin{aligned} \kappa_t &:= \begin{pmatrix} \kappa_1^1 \\ \kappa_2^1 \end{pmatrix}, A_t := \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 \\ 0 & a_2^1 \end{pmatrix}, \\ s_{1,t} &:= \begin{pmatrix} s_{1,t}^1 \\ s_{2,t}^1 \end{pmatrix}, B_t := \begin{pmatrix} b_1^1 & 0 \\ 0 & b_2^1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

则式(2)可以写为

$$\begin{pmatrix} \mu_{t+1} \\ \sigma_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1^1 \\ \kappa_2^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 \\ 0 & a_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{1,t}^1 \\ s_{2,t}^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^1 & 0 \\ 0 & b_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \sigma_t \end{pmatrix} \quad (9)$$

1.1.2 条件分布的定义

Zhu^[17] 提出的非对称学生 t -分布 (AST 分布) 定义为

$$f_{\text{AST}}(y | \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{v_1} \left(\frac{y - \mu}{2\alpha\sigma K(v_1)} \right)^2 \right]^{-(v_1+1)/2}, & y \leq \mu \\ \frac{1}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{v_2} \left(\frac{y - \mu}{2(1-\alpha)\sigma K(v_2)} \right)^2 \right]^{-(v_2+1)/2}, & y > \mu \end{cases} \quad (10)$$

式中, v_1, v_2 为尾部参数, α 为偏度参数, $K(v) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\sqrt{\pi v} \Gamma(v/2)}$, μ 和 σ 分别为位置参数和刻度参数, 由于样本量不够大, 取 $v_1 = v_2$ 对模型参数的估计影响较小, 定义 $v := v_1 = v_2$, 并使用记号 $\text{AST}_v(\mu, \sigma, \alpha)$ 来表示 $v = v_1 = v_2$ 时的 AST 分布.

定义条件分布 $p(y_t, \theta_t)$ 为 $\text{AST}_v(\mu_t, \sigma_t, \alpha)$ 来刻画收益率序列的有偏、重尾等基本特征. AST 分布本身属于位置刻度分布族, 所以可以将 y_t 写为 $y_t | \mathcal{F}_{t-1} = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t$, 其中 $\epsilon_t \sim \text{AST}_v(0, 1, \alpha)$, 得到

$$y_t | \mathcal{F}_{t-1} = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t \quad (11)$$

$$\mu_{t+1} = \kappa_1^1 + a_1^1 s_{1,t}^1 + b_1^1 \mu_t \quad (12)$$

$$\sigma_{t+1} = \kappa_2^1 + a_2^1 s_{2,t}^1 + b_2^1 \sigma_t \quad (13)$$

1.1.3 GAS-AST 模型的构建

考虑模型的复杂程度, 取放缩矩阵函数 S_t 的参

数 $\gamma = 0$, 则得分 $s_t = \nabla_t l_t = \frac{\partial \ln p(y_t, \theta_t)}{\partial \theta_t}$, 由 y_t 的对数似然函数得到

$$l_t(y_t | \mu_t, \sigma_t, v, \alpha) = -\frac{v+1}{2} \log \left[1 + \frac{1}{v} \left(\frac{(y_t - \mu_t) \wedge 0}{2\alpha\sigma_t K(v)} \right)^2 \right] - \log(\sigma_t) - \frac{v+1}{2} \log \left[1 + \frac{1}{v} \left(\frac{(y_t - \mu_t) \vee 0}{2(1-\alpha)\sigma_t K(v)} \right)^2 \right] \quad (14)$$

定义 $L := (y_t - \mu_t) \wedge 0$, $G := (y_t - \mu_t) \vee 0$, 对 l_t 求偏微分以求得分

$$s_{1,t}^1 = \frac{\partial l_t}{\partial \mu_t} = \frac{(v+1) \cdot L}{v(2\alpha\sigma_t K(v))^2 + L^2} + \frac{(v+1) \cdot G}{v(2(1-\alpha)\sigma_t K(v))^2 + G^2} \quad (15)$$

$$s_{2,t}^1 = \frac{\partial l_t}{\partial \sigma_t} = \frac{1}{\sigma_t} \left[-1 + \frac{(v+1) \cdot L^2}{v(2\alpha\sigma_t K(v))^2 + L^2} + \frac{(v+1) \cdot G^2}{v(2(1-\alpha)\sigma_t K(v))^2 + G^2} \right] \quad (16)$$

将式(15)和(16)代入式(12)和(13), 得到 GAS-AST 模型.

1.1.4 E-GAS-AST 模型的构建

由于 σ_t 为条件标准差, 借鉴 EGARCH 模型的思想, 令 $\sigma_t = e^{h_t}$, 以保证 $\sigma_t > 0$. 由链式法则 $\frac{\partial l_t}{\partial h_t} =$

$\frac{\partial l_t}{\partial \sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial h_t} = \frac{\partial l_t}{\partial \sigma_t} e^{h_t}$, 得到 E-GAS-AST 模型:

$$y_t | \mathcal{F}_{t-1} = \mu_t + e^{h_t} \epsilon_t \quad (17)$$

$$\mu_{t+1} = \kappa_1 + a_1 s_{1,t} + b_1 \mu_t \quad (18)$$

$$h_{t+1} = \kappa_2 + a_2 s_{2,t} + b_2 h_t \quad (19)$$

式中,

$$s_{1,t} = \frac{\partial l_t}{\partial \mu_t} = (v+1) \left\{ \frac{L}{v[2\alpha e^{h_t} K(v)]^2 + L^2} + \frac{G}{v[2(1-\alpha)e^{h_t} K(v)]^2 + G^2} \right\}$$

$$s_{2,t} = \frac{\partial l_t}{\partial h_t} = (v+1) \left\{ \frac{L^2}{v[2\alpha e^{h_t} K(v)]^2 + L^2} + \frac{G^2}{v[2(1-\alpha)e^{h_t} K(v)]^2 + G^2} \right\} - 1.$$

由式(18)和式(19), 我们可以看出 y_t 的条件分布可以由历史信息 and 待估参数 $\theta = \{\kappa_1, \kappa_2, a_1, a_2, b_1, b_2\}$ 完全表示出来, 所以本文使用极大似然估计的方法对参数进行估计, 该估计方法是基于现有样本推断参数最有可能的估计值的方法, 按照 Creal

等^[5]类似的证明方法,可以证明该极大似然估计矩有相合性和渐近正态性.

1.1.5 VaR 和 ES 的计算

本文关注基于收益率序列历史数据的条件风险度量的估计.

(I) 在险值 VaR

由 JP Morgan 的风险测度, VaR 被风险监管机构和众多金融机构接受. 对于 $\{y_t\}_{t \in N}$ 是一个组合的损失率(收益率的相反数)序列, 置信水平为 $q \in (0, 1)$ 的 VaR 是在知道时刻 t 之前的信息情况下, 时间 t 时刻, 损失 y_t 有 q 的概率会低于 VaR, 定义为 $\text{VaR}_q^t = \inf\{x \in \mathcal{R}: P(y_t < x | \mathcal{F}_{t-1}) \geq q\}$. 其中, \mathcal{F}_{t-1} 是时间 $t-1$ 的可知信息集, q 常在 $[0.9, 1)$ 之间.

用 $F_{\text{AST}}(\cdot)$ 表示非对称学生 t -分布的累积分布函数, 则模型 1 的在险值由下式计算

$$\text{VaR}_q(y_t) = \mu_t + \sigma_t F_{\text{AST}}^{-1}(q) = \mu_t + e^h F_{\text{AST}}^{-1}(q) \quad (20)$$

令 $F_t(\cdot)$ 是标准学生 t -分布的累积分布函数, 经过简单的计算, 得到 $F_t(\cdot)$ 与 $F_{\text{AST}}(\cdot)$ 的关系

$$F_{\text{AST}}^{-1}(p) = 2\alpha F_t^{-1}\left(\frac{p \wedge \alpha}{2\alpha}, v\right) + 2(1-\alpha) F_t^{-1}\left(\frac{p \vee \alpha + 1 - 2\alpha}{2(1-\alpha)}, v\right).$$

结合上式, 在得到对分布参数的估计和模型动态均值方差的预测后, 可以由式(20)计算出 VaR 的预测值.

(II) 期望损失 ES

对损失率序列 $\{y_t\}_{t \in N}$, 置信水平为 q 的 ES 为基于损失超过 VaR_q 的情况下, 损失的期望值为

$$\text{ES}_q^t = E_t[r_{t+1} | r_{t+1} > \text{VaR}_q],$$

因此, ES 也被称为期望尾部损失或条件 VaR.

根据参考文献^[17]可以计算标准 AST 分布在置信水平为 q 情况下的 ES 值. 令 $f_t(\cdot), F_t(\cdot)$ 分别表示标准学生 t -分布的密度函数和累积分布函数, 若服从标准 AST 分布, 则在置信水平为 q 下的 ES 值为

$$\begin{aligned} \text{ES}_q^{\text{AST}} = & -\frac{4k(v)}{F_{\text{AST}}(q)} \left\{ \alpha^2 \left(\frac{v}{v-1} \right) \left[1 + \frac{1}{v} \leq \left(\frac{q \wedge \alpha}{2\alpha} \right)^2 \right]^{(1-v)/2} + \right. \\ & \left. (1-\alpha)^2 \leq \left(\frac{v}{v-1} \right) \leq \right. \\ & \left. \left[\left(1 + \frac{1}{v} \leq \left(\frac{q \wedge \alpha}{2(1-\alpha)} \right)^2 \right)^{(1-v)/2} - 1 \right] \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

因此对于 y_t , 置信水平为 q 的 ES 值为

$$\text{ES}_q(y_t) = \mu_t + \sigma_t \text{ES}_q^{\text{AST}}$$

1.2 模型 2: E-GAS-AST-GPD 模型

1.2.1 模型

当考虑金融资产的风险时, 需要应用极值理论从观察到的巨大损失中获取更多信息, 以更好地预测罕见的损失. 本文使用基于 GPD 分布的 POT 模型进行建模, 只考虑高于某一阈值值的观察值并用 GPD 对这些值进行拟合的方法称作 POT (peak over threshold) 方法.

为使用 GPD 分布, 由极值理论第二定理^[26], 用来拟合的数据需为白噪声序列, 因此先对收益率序列进行预处理, 先用 E-GAS-AST 模型来拟合收益率曲线, 并计算残差项 $z_t = (y_t - \mu_t) / \sigma_t$, 由残差项的 ACF 图, 确定残差为白噪声序列, 见图 1.

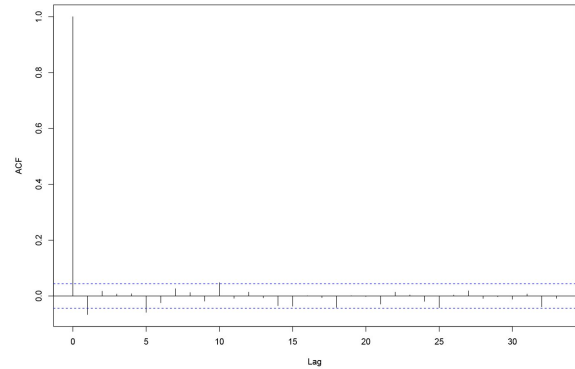


图 1 残差 ACF 图

Fig. 1 ACF of the Residuals

上下尾的阈值分别记为 u^L, u^R , 采用 DuMouchel^[27]提出的 10% 原则来选取, 即选取 10% 分位数作为阈值, 该方法简捷有效, 可以由程序自动完成, 则残差序列的尾部可以由 GPD 分布拟合, 中间部分采用 Gauss 核平滑法拟合, 具体的累积分布函数为

$$F(z) = \begin{cases} \frac{N_u^L}{N} \leq \left(1 + \xi^L \frac{u^L - z}{\beta^L} \right)^{-1/\xi^L}, & z < u^L \\ \Phi(z), & u^L \leq z \leq u^R \\ 1 - \frac{N_u^R}{N} \leq \left(1 + \xi^R \frac{u^R - z}{\beta^R} \right)^{-1/\xi^R}, & z > u^R \end{cases} \quad (22)$$

式中, ξ^R, ξ^L 是形状参数, β^R, β^L 是刻度参数, N 是样本量, N_u^L, N_u^R 分别是超过阈值 u^R 和 u^L 的样本量, 尾部分布 GPD 分布的待估参数 $\theta = \{\xi^R, \xi^L, \beta^R, \beta^L\}$ 由极大似然估计得到.

1.2.2 VaR 和 ES 的计算

(I) 在险值 VaR

在确定阈值 u 的情况下,由式(22)和 VaR 的定义,直接求得 VaR

$$\text{VaR}_q^t = \mu_t + \sigma_t \left\{ u - \frac{\beta}{\xi} \leq \left(1 - \left[\frac{N}{N_u} (1-q) \right]^{-\xi} \right) \right\} \quad (23)$$

(II) 期望损失 ES

若门槛为 u_0 时,数据可以由形状参数为 ξ ,刻度参数为 β_{u_0} 的 GPD 分布拟合,那么对门槛 $u > u_0$,可以由形状参数为 ξ 、刻度参数为 $\beta_u = \beta_{u_0} + \xi(u - u_0)$ 的 GPD 分布进行拟合.

现在,对于 $Z - u | Z > u \sim \text{GPD}(\beta, \xi)$,其中 $\xi < 1, \beta + u\xi > 0$,

$$E[Z - u | Z > u] = \frac{\beta}{1 - \xi}.$$

对于 $z_q > u, Z - z_q | Z > z_q \sim \text{GPD}(\beta + \xi(z_q - u), \xi)$,有

$$E[Z - z_q | Z > z_q] = \frac{\beta + \xi(z_q - u)}{1 - \xi},$$

等价于

$$E[Z | Z > z_q] = \frac{z_q}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi}.$$

这样就得到了 Z 的 ES_q^t ,对 y_t 的 $\text{ES}_q^t(y_t)$ 的估计如下:

$$\text{ES}_q^t(y_t) = \mu_t + \sigma_t \leq \left(\frac{\text{VaR}_q^t(Z)}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi} \right) \quad (24)$$

2 对比模型

为了更好与我们提出的数据驱动模型作比较,引入 3 个参数驱动的时间序列模型.

2.1 对比模型 1: 半参数 GARCH 模型

为比较模型对风险的估计效果,引入半参数 GARCH 模型及一种由 Patton et al. [27] 提出的估计 VaR 值和 ES 值的方法.基于 GARCH 模型,通过求‘FZ 损失函数’最小值点的方法来估计 VaR 值和 ES 值.这种方法被认为虽然不是预测波动率的最好方法,却是对 VaR 和 ES 的最好预测方法.FZ 损失函数为

$$L_{\text{FZ0}}(Y, v, e; \alpha) = -\frac{1}{\alpha e} \mathbf{1}\{Y \leq qv\} (v - Y) + \frac{v}{e} + \log(-e) - 1,$$

式中, Y 为收益率序列, e 代表 ES, v 表示 VaR, $1 - \alpha$ 为置信度.

半参数 GARCH (1,1) 具体表达为

$$Y_t = \sigma_t \eta_t \quad (25)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma Y_{t-1}^2 \quad (26)$$

η_t 服从的分布不予假定,只假定 $\{\eta_t\}_{t=1}^T$ 是白噪声序列.

由式(25)以及 η_t 的白噪声假设得出

$$v_t = a \cdot \sigma_t \quad (27)$$

$$e_t = b \cdot \sigma_t \quad (28)$$

式中, v_t, e_t 分别为动态的 VaR 和 ES, a, b 对应标准残差 η_t 的 VaR 和 ES 是常数.同文献[28]中一样,由经验设定 $\omega = 1$.对 VaR 和 ES 的估计转换成估计

$$\hat{\theta}_T = \underset{\theta}{\text{argmin}} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L_{\text{FZ0}}(y_t, v(\sigma_{t-1}; \theta), e(\sigma_{t-1}; \theta); \alpha),$$

这里 $\theta = \{a, b, \beta, \gamma\}$.

2.2 对比模型 2: EGARCH-t 模型

众所周知,EGARCH-t 模型能很好地描述数据的异方差性和非对称等特征,本文引入条件分布为学生 t -分布的 EGARCH 模型[29]来做对比.

本文考虑 EGARCH-t(1,1)

$$Y_t = \mu_t + \sigma_t \eta_t \quad (29)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha Y_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma (|Y_{t-1}| - E|Y_{t-1}|) \quad (30)$$

式中, η_t 服从标准学生 t -分布,可以看出该模型的非对称性主要由 $Y_{t-1} | -E|Y_{t-1}|$ 控制,而重尾由学生 t -分布体现.我们将用极大似然估计(MLE)对 $\theta = \{\omega, \alpha, \beta, \gamma\}$ 进行估计. VaR 和 ES 的计算如下:

(I) 在险值 VaR

若标准学生 t -分布在置信水平为 q 的 VaR 值记为 $\text{VaR}_{q, st}$,那么 t 时刻,收益率序列 $\{y_t\}_{t \in N}$ 的 VaR 值为

$$\text{VaR}_q(y_t) = \mu_t + \sigma_t \text{VaR}_{q, st} \quad (31)$$

由 VaR 值的定义可知, VaR 值即是累积分布函数的分位数,若用 F_{st} 表示标准学生 t -分布的累积分布函数,则 $\text{VaR}_{q, st} = F_{st}^{-1}(q)$.

(II) 期望损失 ES

若标准学生 t -分布在置信水平为 q 的 ES 值记为 $\text{ES}_{q, st}$,那么 t 时刻,收益率序列 $\{y_t\}_{t \in N}$ 的 ES 值为

$$\text{ES}_q(y_t) = \mu_t + \sigma_t \text{ES}_{q, st} \quad (32)$$

由 ES 的定义,若用 Z 表示服从标准学生 t -分布的随机变量,有 $\text{ES}_{q, st} = E_t[Z | Z > \text{VaR}_{q, st}]$,这里

我们对 $ES_{q, st}$ 的计算, 源于蒙特卡洛模拟, 我们生成了 100000 个服从标准学生 t -分布的样本, 并对低于 $VaR_{q, st}$ 的样本求期望.

2.3 对比模型 3: GJR-GARCH- t 模型

为了衡量收益率序列的非对称性, Glosten 等^[30]提出了 GJR-GARCH 模型, 考虑到金融数据的重尾性, 我们将其分布设定为学生 t -分布.

$$Y_t = \mu_t + \sigma_t \eta_t \quad (33)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha Y_t^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma I_{t-1} Y_{t-1}^2 \quad (34)$$

$$I_{t-1} = \begin{cases} 1, & \text{if } Y_{t-1} < 0 \\ 0, & \text{if } Y_{t-1} \geq 0 \end{cases} \quad (35)$$

式中, η_t 服从标准学生 t -分布, 可以看出该模型的非对称性主要由 I_{t-1} 控制, 重尾同样由学生 t -分布体现. 我们将用极大似然估计 (MLE) 对待估参数 $\theta = \{\omega, \alpha, \beta, \gamma\}$ 进行估计. VaR 和 ES 的计算同 2.2 节对比模型 2.

3 数据模拟

本节主要对本文讨论的主要模型 E-GAS-AST 模型进行数据模拟, 通过产生模拟数据并对模拟数

据进行参数估计, 以验证本文使用的参数估计方法的较小误差, 不会对后续的 VaR 值和 ES 值的估计产生很大的不利影响.

这部分中, 用表 1 第一行的给定值作为 E-GAS-AST 模型 (式 (17) ~ (19)) 中的参数值, 并产生 5000 组样本量为 3000 的样本, 再用 MLE 估计求得该模型的带估参数 $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_\alpha, \kappa_{e^v}, a_\mu, a_2, b_\mu, b_2, v, \alpha\}$ 的估计值; 表 1 第二行即为 5000 组估计值的均值; 第三行为标准差; 第四行为均方误差. 通过对比, 可以看到 α, v 相关的参数 $\kappa_\alpha, \kappa_{e^v}, v, \alpha$ 估计误差都非常小, 而 μ, h 相关的参数 $\kappa_1, \kappa_2, a_\mu, a_2, b_\mu, b_2$ 的估计误差偏大. 我们认为这与 μ, h 为时变参数, 他们的值由式 (18) 和 (19) 决定有关. 从标准差来看, 数据模拟本身具有一定的不确定性, 我们认为这与产生的样本量大小有关, 且模型参数较多, 表现的数据特征也相对复杂, 所以如果能用更大数量级的样本量, 效果会更好. 从均方误差来看, 我们认为估计值与估计值的关系与我们直观对比得出的结论一致.

表 1 模型 1 的模拟估计结果

Tab. 1 Parameter estimators of Model 1 for simulated data

	κ_1	κ_2	κ_α	κ_{e^v}	a_μ	a_2	b_μ	b_2	v	α
给定值	0.02	-0.0357	1.425	-3.091	0.1	0.1	0.9	0.9	6	0.8
估计值	0.0195	0.234	1.416	-4.885	0.324	0.186	0.869	0.897	4.602	0.801
标准差	0.0292	0.0514	0.0660	1.202	0.154	0.0122	0.0948	0.0222	0.251	0.0101
均方误差	0.000835	0.0762	0.00443	4.633	0.0786	0.00771	0.00974	4.98e-04	2.009	9.07e-05

4 实证分析

本节将用道琼斯指数与上证 50 对提出的新模型 E-GAS-AST 模型和 E-GAS-AST-GPD 模型进行实证检验, 这里用到的指数数据为对数收益率数据. 在对模型参数进行估计后, 对 VaR 值和 ES 值进行预测, 并与半参数 GARCH 模型、EGARCH- t 模型和 GJR-GARCH- t 模型的估计和预测进行对比. 其中对 GAS 模型的参数估计过程用到 R 包 GAS^[31].

4.1 道琼斯指数

对道琼斯指数, 选取 2007-01-03 至 2018-12-31 区间的数, 由于时间跨度较长, 需要对收益率序列进行变点检测以防出现模型结构突变的情况, 通过 pettitt 变点检测, p 值为 0.6136, 认为检测出的变

点统计意义不显著. 接下来将全部数据分为两块, 前 2000 个数据用来拟合模型, 后 1020 个数据作为样本外数据用来进行回测检验. 首先, 对样本内数据用 E-GAS-AST 模型进行拟合, 得到参数的估计值, 然后用式 (18) 和 (19) 迭代得到 μ_{t+1}, h_{t+1} , 并由此求得 y_{t+1} 在该模型下的 VaR 值和 ES 值如图 2 所示.

接下来计算残差 $\epsilon_t = \frac{y_t - \mu_t}{\sigma_t}$, 并取 10% 分位数

为阈值, 将低于阈值的残差作为分布的下尾, 并用 GPD 分布进行拟合, 最后用式 (23) 和 (24) 计算 E-GAS-AST-GPD 模型下的 VaR 值和 ES 值, 具体见图 3.

对于半参数 GARCH 模型, 由于其 FZ 损失函数的非连续性, 用 R 中的 optim 函数求得的最优解可能是局部最优解, 使用 logistic 函数替代示性函

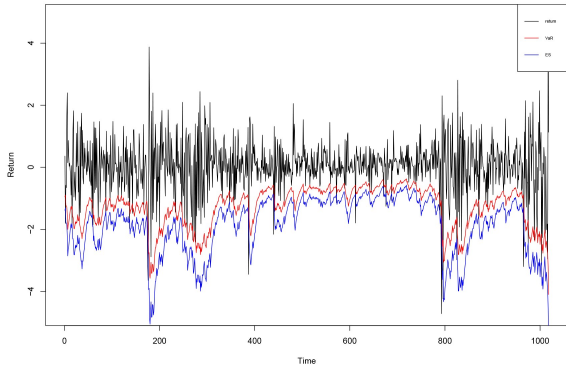


图 2 道琼斯指数下,基于 E-GAS-AST 模型估计的 VaR 值与 ES 值

Fig. 2 Estimated VaR and ES based on E-GAS-AST model for Dow-Jones Index

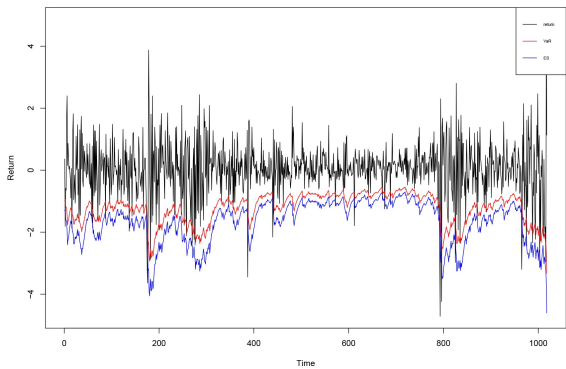


图 3 道琼斯指数下,基于 E-GAS-AST-GPD 模型估计的 VaR 值与 ES 值

Fig. 3 Estimated VaR and ES based on E-GAS-AST-GPD model for Dow-Jones Index

数来对 L_{FZ0} 进行平滑,得到新的函数为

$$\tilde{L}_{FZ0}(Y, e, v, \alpha; \tau) = -\frac{1}{\alpha} \frac{v - Y}{e \cdot 1 + \exp\{\tau(Y - v)\}} + \frac{v}{e} + \log(-e) - 1, \tau > 0.$$

可以看出当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{L}_{FZ0} \rightarrow L_{FZ0}$, 而 \tilde{L}_{FZ0} 可以求导, 更加方便求全局最优点, 因此先随意选定一个初值, 求得 $\tilde{L}_{FZ0}(Y, e, v, \alpha; 5)$ 的全局最小值点, 并以此为初值求 $\tilde{L}_{FZ0}(Y, e, v, \alpha; 20)$ 的全局最小值点. 此时, 这个点已经很接近 $L_{FZ0}(Y, e, v, \alpha)$ 全局最小值点了, 以此为初值求 $L_{FZ0}(Y, e, v, \alpha)$ 的全局最小值点. 之后通过迭代计算出 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_T\}$, 代入式(27)和(28), 即可求得动态 VaR 值和 ES 值, 见图 4.

对于 EGARCH- t 模型, 我们用极大似然估计

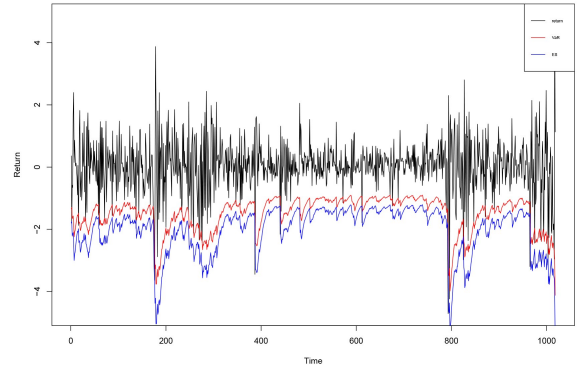


图 4 道琼斯指数下,基于半参数 GARCH 模型估计的 VaR 值与 ES 值

Fig. 4 Estimated VaR and ES based on semi-parameter GARCH model for Dow-Jones Index

对参数进行估计, 并利用式(30)对波动率进行迭代计算. 之后由式(31)和式(32)求得在该模型下对 VaR 值和 ES 值的预测, 具体见图 5.

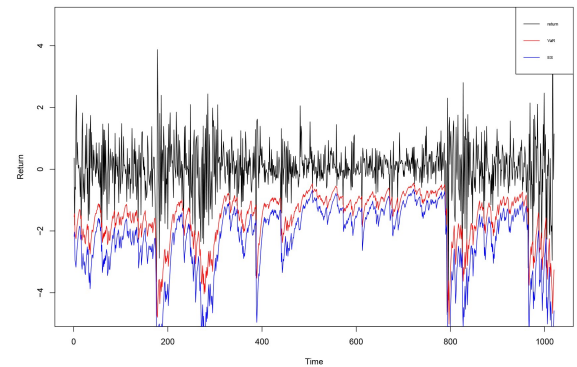


图 5 道琼斯指数下,基于 EGARCH- t 模型估计的 VaR 值与 ES 值

Fig. 5 Estimated VaR and ES based on EGARCH- t model for Dow-Jones Index

同样我们对 GJR-GARCH- t 模型用极大似然估计进行参数估计, 并通过计算式(34)对波动率进行迭代, 之后由式(36)和式(37)求得在该模型下对 VaR 值和 ES 值的预测, 具体见图 6.

从上面 5 张图可以看出, 这 5 个模型得到的 VaR 值 ES 值都很好地描述了收益率序列的重要特征, 尤其是波动聚集现象. 当数据较为平稳时, VaR 和 ES 值都相对平稳, 对于波动比较剧烈的地方, VaR 和 ES 值尤其是 ES 值很好的覆盖了发生剧变的收益率, 基本保证不会出现损失较大却没有预测到而出现破产风险的情况. 也可以看出他们对收益率变化的具体描述各有不同, 为了方便比较不同模型估计得到的 VaR 值, 将 VaR 值放入一张图内进

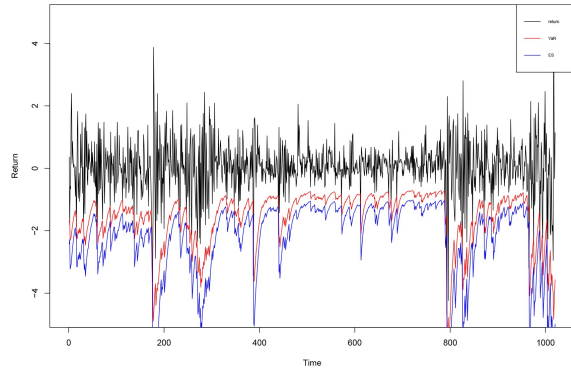


图 6 道琼斯指数下,基于 GJR-GARCH- t 模型估计的 VaR 值与 ES 值.

Fig. 6 Estimated VaR and ES based on GJR-GARCH- t model for Dow-Jones Index

行比较,并加入历史模拟法得到的 VaR 值作为对比,历史模拟法下的 VaR 值具体计算方法为取过去一定时间段的收益率序列的 $1-q$ 分位数,这里取时间区间为 100 天,即第 t 日的 VaR 值为将 $\{y_{t-100}, y_{t-99}, \dots, y_{t-1}\}$ 从小到大排列的第 $(1-q) \times 100$ 个数,六个 VaR 值得对比见图 7.

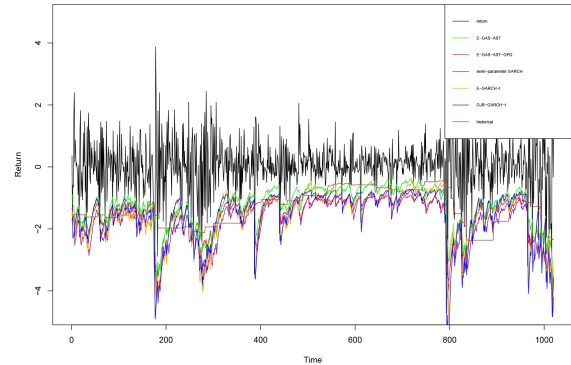


图 7 道琼斯指数下,基于 E-GAS-AST 模型、E-GAS-AST-GPD 模型、半参数 GARCH 模型、EGARCH- t 模型、GJR-GARCH- t 模型的 VaR 值与历史模拟法的 VaR 值

Fig. 7 Estimated VaR based on E-GAS-AST model, E-GAS-AST-GPD model, semi-parameter GARCH model, EGARCH- t model, GJR-GARCH- t model and historical VaR for Dow-Jones Index

从图 7 可以看出,由 5 个模型计算得到的 VaR 序列相对于历史模拟法更好地贴合了收益率序列.其中 EGARCH- t 模型的表现与 GJR-GARCH- t 模型的表现比较相近,在较为平稳时,半参数 GARCH 模型和 E-GAS-AST-GPD 模型表现相近,E-GAS-AST 模型最贴近于收益率序列;在波动剧烈的时候,半参数 GARCH 模型和 E-GAS-AST 模型表现

相近,E-GAS-AST-GPD 模型、EGARCH- t 模型和 GJEGARCH- t 模型表现相近,更为保守,相对来说成本较高,也更少出现 VaR 突破的情况,更能够减少破产风险的几率.总体来说,几个模型各有千秋,都有表现相对更好的情况,而 E-GAS-AST-GPD 模型比 E-GAS-AST 模型在大部分情况下都更加保守,这可能与 E-GAS-AST-GPD 模型在 E-GAS-AST 模型的基础上更注重尾部分布的描述有关.

同样,为比较不同模型之间估计的 ES 值,将 5 个 ES 值序列进行对比,具体见图 8.

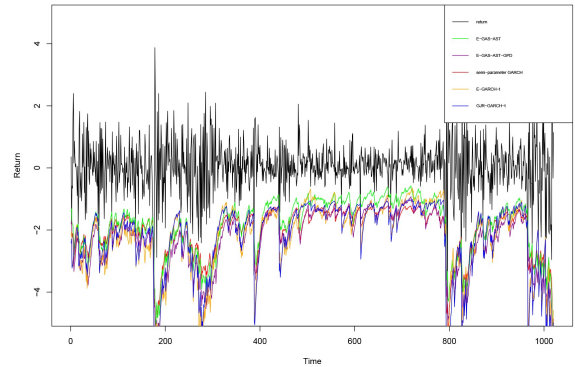


图 8 道琼斯指数下,基于 E-GAS-AST 模型、E-GAS-AST-GPD 模型、半参数 GARCH 模型、EGARCH- t 模型、GJR-GARCH- t 模型的 ES 值.

Fig. 8 Estimated ES based on E-GAS-AST model, E-GAS-AST-GPD model, semi-parameter GARCH model, EGARCH- t model and GJR-GARCH- t model for Dow-Jones Index

由图 8 可以看到,总体来说,ES 值要保守许多,除非是非常极端的变化,几乎 ES 值都要比收益率小许多,也很少有被突破的情况;同样,E-GAS-AST-GPD 模型总体来说都要比 E-GAS-AST 模型更加保守.由于 E-GAS-AST 模型已经很好地预测了风险,也不会存在很多破产风险,却会大大降低成本,所以 E-GAS-AST 模型会相对更好.与 VaR 相似,在平稳的时间段,半参数 GARCH 模型预测的 ES 值与 E-GAS-AST-GPD 模型相接近,EGARCH- t 模型与 GJR-GARCH- t 模型接近;在波动剧烈的时期半参数 GARCH 模型与 E-GAS-AST 模型更接近,E-GAS-AST-GPD 模型、EGARCH- t 模型和 GJEGARCH- t 模型表现相近,而 E-GAS-AST 模型可以保持相对较小的成本,却存在最多的突破,即破产风险,E-GAS-AST-GPD 模型整体成本较高,3 个对比模型从突破和成本两个角度都处于两个提出模型之间,相对风险和成本之间平衡较好.

最后,用定量的方法来比较模型之间的风险估计效果,用条件覆盖检验(LR_{CC})、非条件覆盖检验

(LR_{UC})和动态分位数检验(DQ)对上述模型预测的 VaR 进行回测检验,见表 2.

表 2 道琼斯指数下,基于 E-GAS-AST 模型、E-GAS-AST-GPD 模型、半参数 GARCH 模型、EGARCH-*t* 模型、GJR-GARCH-*t* 模型的 VaR 值与历史模拟法的 VaR 值回测对比.

Tab. 2 Backtest comparison of Estimated VaR based on E-GAS-AST model, E-GAS-AST-GPD model, semi-parameter GARCH model, EGARCH-*t* model, GJR-GARCH-*t* model and historical VaR for Done-Jones Index

tests	历史模拟法	E-GAS-AST	E-GAS-AST-GPD	半参数 GARCH	EGARCH- <i>t</i>	GJR-GARCH- <i>t</i>
LR _{UC} stats	0.0816	0.182	15.606	3.223	8.540	10.614
LR _{UC} <i>p</i> -value	0.775	0.669	7.80e-05	0.0726	0.00347	0.00112
LR _{CC} stats	13.620	0.637	24.237	4.522	14.209	11.738
LR _{CC} <i>p</i> -value	0.00110	0.727	5.456e-06	0.104	8.213e-04	0.00283
DQ stats	36.854	2.807	25.421	7.410	21.905	13.827
DQ <i>p</i> -value	5.00e-06	0.902	6.39e-04	0.388	0.00264	0.0543

从表 2 可以看出,对于道琼斯指数来说,历史模拟法在不考虑独立性的情况下,表现非常好,E-GAS-AST 模型与他表现相近,但历史模拟法的独立性非常不好,因此条件覆盖检验结果很不理想,而 E-GAS-AST 模型的条件覆盖检验结果表现最好.由于条件覆盖检验是在非条件覆盖检验的基础上进行了独立性检验,动态分位数(DQ)检验佐证了 E-GAS-AST 模型对尾部分位数拟合良好的观点;半参数 GARCH 模型,具有良好的独立性,在置信水

平为 0.95 的情况下,条件覆盖检验和非条件覆盖检验也是不能被拒绝的,从 3 个回测检验来看,E-GAS-AST-GPD 模型、EGARCH-*t* 模型和 GJR-GARCH-*t* 模型对 VaR 值得预测都不好,这可能与过于保守有关.以上从表 2 得出的定量结论与从图中得出的定性结论较为一致.

对样本外数据用 McNeil 等^[23]提到的 bootstrap 检验和 Embrechts 等^[32]的“V 检验”对上述模型预测的 ES 进行回测检验,见表 3.

表 3 道琼斯指数下,基于 E-GAS-AST 模型、E-GAS-AST-GPD 模型、半参数 GARCH 模型、EGARCH-*t* 模型、GJR-GARCH-*t* 模型的 ES 值回测对比

Tab. 3 Backtest comparison of Estimated ES based on E-GAS-AST model, E-GAS-AST-GPD model, semi-parameter GARCH model, EGARCH-*t* model, GJR-GARCH-*t* model for Done-Jones Index

tests	E-GAS-AST	E-GAS-AST-GPD	半参数 GARCH	EGARCH- <i>t</i>	GJR-GARCH- <i>t</i>
Bootstrap <i>p</i> -value	0.0947	0.0453	0.185	0.227	0.391
V ₁ test	3.756	4.398	4.289	4.225	3.963
V ₂ test	0.0780	0.468	0.369	0.312	0.351
V test	1.917	2.433	2.329	2.269	2.157

从 Bootstrap 回测的 *p* 值来看,3 个对比模型都表现得不错,其中 GJR-GARCH-*t* 模型效果最好,从 V 测试来看 E-GAS-AST 模型的效果最好,其次是 GJR-GARCH-*t* 模型,且 3 个对比模型都不错,而 V₁ 和 V₂ 分别在统计量的计算上(不考虑 ES 的计算时)基于 VaR 值与不基于 VaR 值,也代表 V₂ 更加着重于 ES 的效果,也意味着 V₁ 是理论上更合理的做法,而 V₂ 是更加依赖于数据的更实践的做法.由此可以看到,E-GAS-AST 模型的 V₂ 统

计量远比其他的模型要好,也就意味着从数据角度来说,E-GAS-AST 模型的 ES 估计非常好,而对于 E-GAS-AST 模型两种回测检验结果差别非常大.我们认为这与两种回测的定义有关,Bootstrap 回测在计算 *p* 值时,考虑的零假设为:正确的估计了参数和 $\mu_t, \sigma_t, ES'_q(y_t)$,则

$$R = \{R_{t+1} = \frac{y_{t+1} - ES'_q(y_{t+1})}{\sigma_{t+1}}; \text{ for } t$$

$$\text{s. t. } y_{t+1} > \text{VaR}'_q(y_{t+1})\}$$

应当是一列独立同分布的随机变量的样本,且均值为 0. 备择假设为 R 有大于 0 的均值,此时 ES 被系统地低估,是非常严重的错误,因为可能导致短期的巨大损失未被提前预知而产生破产的风险,但这个备择假设可能会让我们更倾向于选择高估 ES 的模型,造成长期成本过高的弊端,从图 7 可以知道, E-GAS-AST 模型可能存在相对较多的突破,这是该检验不能接受的错误,而 3 个对比模型相对成本较高是该检验会忽略的弊端. 在 V 测试中,不仅引入了是否存在 $y_{t+1} > \text{VaR}'_q(y_{t+1})$ 的考虑,还额外考虑了 $y_{t+1} - \text{VaR}'_q(y_{t+1})$ 的大小,因此会将成本问题纳入考量,两种回测检验自身的差异导致了最终对 E-GAS-AST 模型检验结果的差异.

4.2 上证指数

对上证指数,取 2013-01-04 至 2019-05-22 之间的收益率序列来考察,将前 1100 个数据作为样本内数据,后 448 个数据作为样本外数据来做回测检验,通过 pettitt 突变点检验,突变点为第 591 个数据,且检测出的变点统计意义显著, p 值为 0. 2293. 这时我们需要考虑模型的突变,因此将样本内数据分为两部分,前 590 个数据作为变点前样本,记作第一组样本,其余 510 个数据为变点后样本内数据,为第二组数据. 这时,将第一组数据和第二组数据分别用 E-GAS-AST 拟合,得到估计值如表 4,可以看到的确有模型的突变.

表 4 两组样本的参数估计对比

Tab. 4 Parameter estimators comparison for two set of samples

	κ_1	κ_2	κ_a	κ_{e^v}	a_μ	a_2	b_μ	b_2	v	α
第一组样本	5.206e-06	0.011	-0.012	-3.98	0.015	0.034	0.999	0.988	4.842	0.497
第二组样本	0.096	0.001	0.161	-5.139	9.994e-07	0.048	0.127	0.999	4.268	0.539

由于对 VaR 和 ES 的预测需要用到模型在当前时间区间应有的参数估计,对第二组数据和样本外数据的联合数据进行 pettitt 检验,这时 p 值为 0. 8758,检测出的变点统计意义不显著,认为变点后的数据不具有变点,所以可以用第二组样本的估计值来对样本外进行 VaR 值和 ES 值的预测, E-GAS-AST 模型的 VaR, ES 值预测图见图 9.

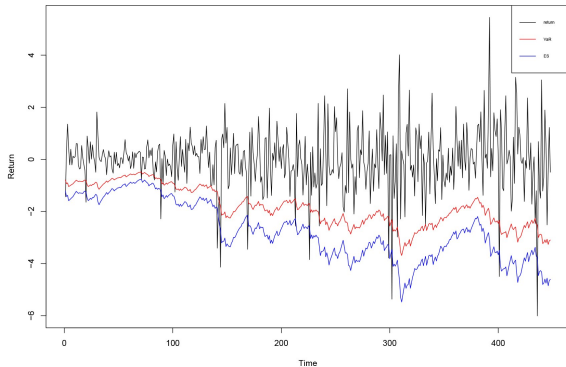


图 9 上证指数下,基于 E-GAS-AST 模型估计得 VaR 值与 ES 值.

Fig. 9 Estimated VaR and ES based on E-GAS-AST model for SSE Composite Index

基于第二组样本,我们对 E-GAS-AST-GPD 模型做估计,并计算 VaR 值和 ES 值的预测, E-GAS-AST-GPD 模型的 VaR, ES 值图如图 10.

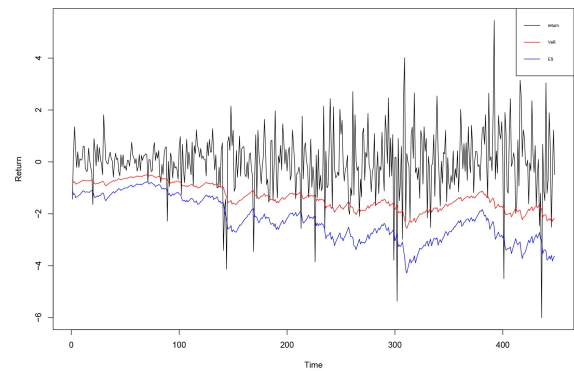


图 10 上证指数下,基于 E-GAS-AST-GPD 模型估计得 VaR 值与 ES 值

Fig. 10 Estimated VaR and ES based on E-GAS-AST-GPD model for SSE Composite Index

同样,我们计算半参数 GARCH 模型的 VaR 值, ES 值,如图 11.

同道琼斯指数,我们计算 EGARCH- t 模型在上证指数下预测的 VaR 值, ES 值,如图 12 所示.

同样,我们计算 GJR-GARCH- t 模型在上证指数下预测的 VaR 值, ES 值,如图 13 所示.

从上面 5 个图可以看到, 5 个模型的 VaR 和 ES 值序列的趋势都很好的符合了收益率序列, VaR 值和 ES 值的预测很好地体现了模型对数据波动聚集的预测.

下面为了更清晰地比较各模型估计的 VaR 值

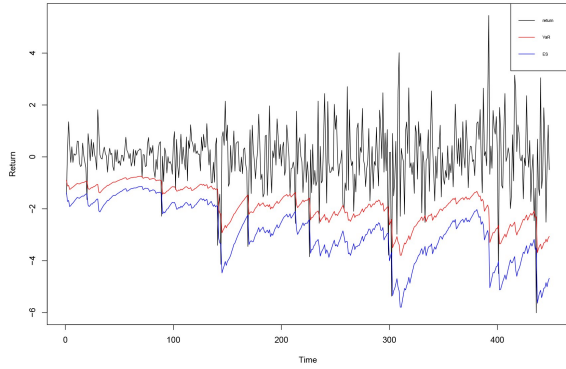


图 11 上证指数下,基于半参数 GARCH 模型估计得 VaR 值与 ES 值

Fig. 11 Estimated VaR and ES based on semi-parameter GARCH model for SSE Composite Index

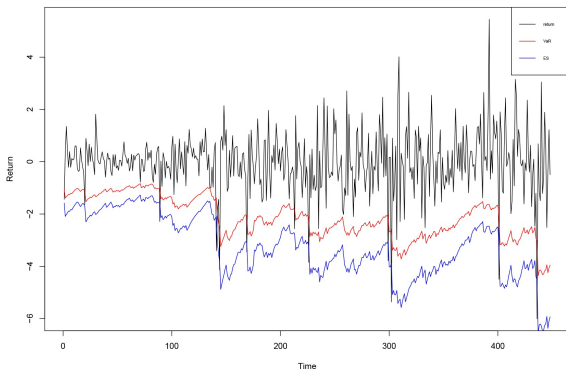


图 12 上证指数下,基于 EGARCH-t 模型估计得 VaR 值与 ES 值

Fig. 12 Estimated VaR and ES based on EGARCH-t model for SSE Composite Index

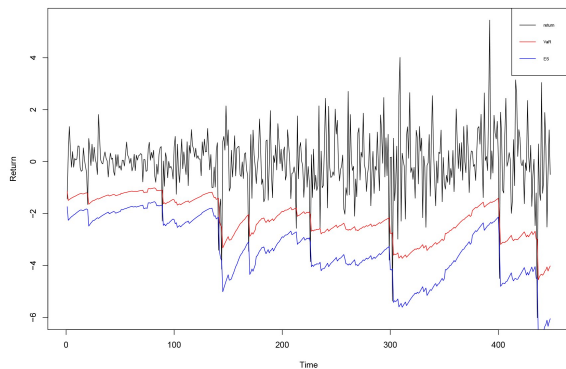


图 13 上证指数下,基于 GJR-GARCH-t 模型估计得 VaR 值与 ES 值

Fig. 13 Estimated VaR and ES based on GJR-GARCH-t model for SSE Composite Index

序列的差别,将它们放入一张图中比较,同样引入历史模拟法预测的 VaR 值进行对比,见图 14.

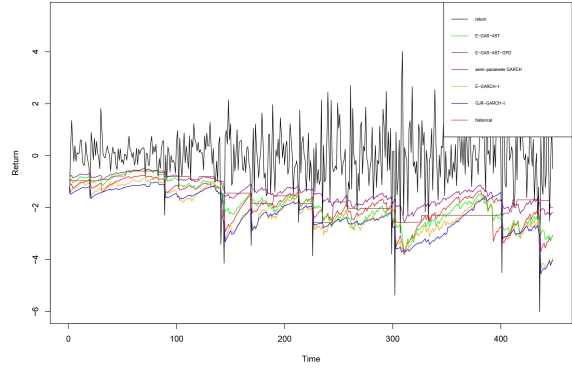


图 14 上证指数下,基于 E-GAS-AST 模型、E-GAS-AST-GPD 模型、半参数 GARCH 模型、EGARCH-t 模型、GJR-GARCH-t 模型的 VaR 值与历史模拟法的 VaR 值

Fig. 14 Estimated VaR based on E-GAS-AST model, E-GAS-AST-GPD model, semi-parameter GARCH model, EGARCH-t model, GJR-GARCH-t model and historical VaR for SSE Composite Index

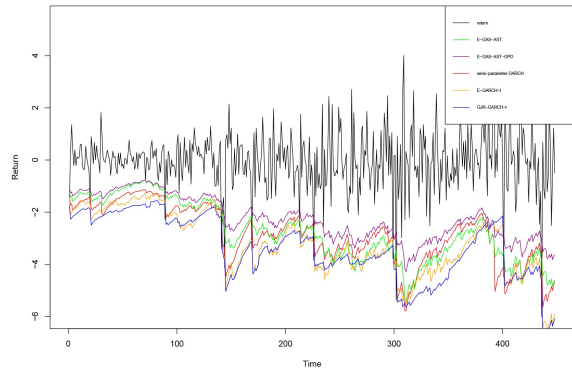


图 15 上证指数下,基于 E-GAS-AST 模型、E-GAS-AST-GPD 模型、半参数 GARCH 模型、EGARCH-t 模型、GJR-GARCH-t 模型的 ES 值

Fig. 15 Estimated ES based on E-GAS-AST model, E-GAS-AST-GPD model, semi-parameter GARCH model, EGARCH-t model and GJR-GARCH-t model for SSE Composite Index

由图 14 可以看到,整体来说,5 个模型的 VaR 值预测都比历史模拟法更加符合收益率序列的变化,且对突发的巨大损失更为敏感. E-GAS-AST-GPD 模型最为贴近收益率序列,成本最小,但是有较多的 VaR 突破, E-GAS-AST 模型与半参数 GARCH 模型都在平稳阶段保持了较小的成本,同时对突发的巨大损失有灵敏的预测,有效地降低了突破的概率, E-GAS-AST 模型预测的 VaR 序列相较半参数 GARCH 模型而言,更多时候更靠近收益

率序列, EGARCH- t 模型和 GJR-GARCH- t 模型表现相对类似, 整体较为保守, 而且 VaR 突破出现的地方从图中来看几乎一致. 总体来说, 5 种模型对突然出现的巨大损失都不能相对准确的预测, 在上证指数这样波动总体更大的收益率序列下, 3 个模型预测的 VaR 突破都会比道琼斯指数多, 这与实际一致, 上证指数的确风险更大且更难预测.

下面对 3 个模型的 ES 序列进行比较, 见图 15.

总的来说, E-GAS-AST-GPD 模型预测的 ES 值最为贴近收益率序列, 但也有效地阻止了突破, 几乎只在极端损失下存在突破, 3 个对比模型的预测是突破数相对较少, 对几次相对极端的巨大损失都有较为准确的预测, 其中 GJR-GARCH- t 模型的预测最为保守, E-GAS-AST 模型的预测在损失较小的时候与 E-GAS-AST-GPD 模型比较接近, 在损失变大时候与半参数 GARCH 模型较为接近.

下面来定量的看各模型的 VaR 值比较, 具体回测统计量或 p 值见表 5.

表 5 上证指数下, 基于 E-GAS-AST 模型、E-GAS-AST-GPD 模型、半参数 GARCH 模型、EGARCH- t 模型、GJR-GARCH- t 模型的 VaR 值与历史模拟法的 VaR 值回测对比

Tab. 5 Backtest comparison of Estimated VaR based on E-GAS-AST model, E-GAS-AST-GPD model, semi-parameter GARCH model, EGARCH- t model, GJR-GARCH- t model and historical VaR for SSE Composite Index

tests	历史模拟法	E-GAS-AST	E-GAS-AST-GPD	半参数 GARCH	EGARCH- t	GJR-GARCH- t
LRuc stats	3.845	0.094	14.520	0.973	6.072	6.072
LRuc p -value	0.050	0.759	1.387e-04	0.324	0.0137	0.0137
LRcc stats	6.972	0.098	15.804	2.398	6.679	6.679
LRcc p -value	0.031	0.952	3.700e-04	0.302	0.0355	0.0355
DQ stats	34.785	9.326	37.650	5.427	12.490	12.564
DQ p -value	1.23e-05	0.230	3.53e-06	0.608	0.0855	0.0835

表 6 是各模型预测的 ES 值之间的回测对比, 由表 6 可以看到, 总体效果与道琼斯指数相差不多, 但有趣的是在两种回测检验下, E-GAS-AST-GPD 模型对 ES 值的预测效果都最好, 我们猜测这可能

表 6 上证指数下, 基于 E-GAS-AST 模型、E-GAS-AST-GPD 模型、半参数 GARCH 模型、EGARCH- t 模型、GJR-GARCH- t 模型的 ES 值回测对比

Tab. 6 Tab. 6 backtest comparison of Estimated ES based on E-GAS-AST model, E-GAS-AST-GPD model, semi-parameter GARCH model, EGARCH- t model and GJR-GARCH- t model for SSE Composite Index

tests	E-GAS-AST	E-GAS-AST-GPD	半参数 GARCH	EGARCH- t	GJR-GARCH- t
Bootstrap p -value	0.0573	0.324	0.0393	0.0205	0.0187
V_1 test	5.187	4.342	5.586	6.652	6.577
V_2 test	0.293	0.006	0.427	0.739	0.795
V test	2.740	2.174	3.007	3.696	3.686

总体来说, 回测效果都比道琼斯指数下要好, 除了历史模拟法, 这很好地说明了文中提到的五种模型对波动较为剧烈的数据更加敏感. 而历史模拟法表现不好, 我们猜测与在三个模型的预测中都考虑了变点的因素, 历史模拟法没有考虑有关. 从表 5 来看, E-GAS-AST 模型表现非常好, 这与从图 14 中的表现一致, 它无论从独立性还是 VaR 突破的次数来看, 都表现得非常好, 半参数 GARCH 模型表现也不错, 在三种回测下检验下, 都是 E-GAS-AST 模型与半参数 GARCH 模型表现最好, 且从图 14 我们知道这两个模型的表现本身也很相近. E-GAS-AST-GPD 模型表现相对较弱, 这可能与 E-GAS-AST-GPD 模型的预测存在 VaR 突破较多有关. 值得注意的是 EGARCH- t 模型与 GJR-GARCH- t 模型的表现从条件覆盖和非条件覆盖检验来看完全一样, 在 DQ 检验下有稍许差别, 这说明从突破来看, 两个模型表现完全一样, 但具体的尾部形态有些许差别.

与 GPD 分布对尾部的进一步描述有关. 其余几个模型的回测检验表现较差, 这可能与他们有较高的成本却不能有效降低破产风险有关.

5 结论

本文提出了数据驱动新模型 E-GAS-AST 模型、E-GAS-AST-GPD 模型并引入 3 个参数驱动模型, EGARCH- t 模型、GJR-GARCH- t 模型和 Patton 等^[28] 提出的半参数 GARCH 模型及其估计方法 FZ 损失函数法进行对比, 并对 5 个模型进行了实证检验, 通过对样本内数据的估计, 我们预测了一定时间区间的 VaR 值和 ES 值的预测, 并用样本外数据对他们进行了回测检验。

总体来说, E-GAS-AST 模型表现都很好, 不仅可以很好地防止 VaR 突破, 降低破产的风险, 也保持了相对较小的成本, 从回测检验来看, 效果也是模型中较好的。该模型在不同数据下对 VaR 和 ES 值的预测, 用不同回测方法检验都不能拒绝零假设, 其对 VaR 值的预测适用于不同的数据, 且效果都很好, 对 ES 值的预测, 在波动较小的道琼斯指数下, 效果更加好。而 E-GAS-AST-GPD 模型恰恰相反, 它仅在上证指数下对 ES 的预测较好, 且是 3 种模型中最好的。可以看到用 FZ 损失函数法来预测半参数 GARCH 模型的风险测度, 总体来说也是非常好的方法, 回测效果也相对稳定; 置信水平为 0.95 的情况下, 在这两种数据下用不同的回测方法也都不能拒绝该方法, 该方法在道琼斯指数下对 ES 值的预测表现较好, 在上证指数下对 VaR 值的预测表现较好。

EGARCH- t 模型和 GJR-GARCH- t 模型在道琼斯指数下对 ES 的预测有不错的表现, 且 GJR-GARCH- t 模型更好一些, 而在波动较为剧烈的上证指数下, 他们对 VaR 值和 ES 值的预测都不及本文模型的预期。

综上, 对于提出的两个新模型, 他们都各有表现较好的情况, 对于 E-GAS-AST 模型来说, 它对 VaR 值的预测在不同的数据下都非常好, 在相对平稳的数据下, 对 ES 值的预测也不错, 对于上证指数这样波动较为剧烈的数据来说, 它对 ES 值的预测与半参数 GARCH 模型在不同的检验下各有优劣, 而 E-GAS-GPD 模型非常适合在波动较为剧烈的上证指数下对 ES 进行预测。

参考文献 (References)

[1] BROOKS C. Introductory Econometrics for Finance

[M]. Cambridge University Press, 2019.

- [2] BLACK F. Studies in stock price volatility changes[C]//Proceedings of the 1976 Meeting of the Business & Economic Statistics. Washington: American Statistical Association, 1976: 177-81.
- [3] ENGLE R F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation[J]. *Econometrica* 1981, 50: 987-1007.
- [4] BOLLERSLEV T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1986, 31(3):307-327.
- [5] CREAL D, KOOPMAN S J, LUCAS A. Generalized autoregressive score models with applications [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 2013, 28(5): 777-795.
- [6] ENGLE R F, RUSSELL J R. Autoregressive conditional duration: A new model for irregularly spaced transaction data [J]. *Econometrica*, 1998, 66(5): 1127-1162.
- [7] PATTON A J. Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International economic review* [J]. 2006, 47(2):527-556.
- [8] HANSEN B E. Autoregressive conditional density estimation [J]. *International Economic Review*, 1994, 35(3):705-730.
- [9] STEEL F. On bayesian modeling of fat tails and skewness [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1998, 93(441):359-371.
- [10] THEODOSSIOU P. Financial data and the skewed generalized t distribution [J]. *Management Science*, 1998, 44:1650-1661.
- [11] BRANCO M D, DEY D K. A general class of multivariate skew-elliptical distributions [J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 2001, 79(1):99-113.
- [12] BAUWENS L, LAURENT S. A new class of multivariate skew densities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2005, 23(3):346-354.
- [13] JONES M C, FADDY M J. A skew extension of the t-distribution, with applications [J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2003, 65(1):159-174.
- [14] SAHU S K, DEY D K, BRANCO M D. A new class of multivariate skew distributions with applications to bayesian regression models [J]. *Canadian Journal of Statistics*, 2003, 31(2):129-150.

- [15] AZZALINI A, CAPITANIO A. Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t -distribution [J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2003, 65(2):367-389.
- [16] AAS K, HAFF I H. The generalized hyperbolic skew student's t -distribution [J]. *Journal of Financial Econometrics*, 2006, 4(2):275-309.
- [17] ZHU D M, GALBRAITH J W. A generalized asymmetric student- t distribution with application to financial econometrics [J]. *Journal of Econometrics*, 2010, 157(2):297-305.
- [18] RIVAS D, CALEYO F, VALOR A, et al. Extreme value analysis applied to pitting corrosion experiments in low carbon steel: Comparison of block maxima and peak over threshold approaches [J]. *Corrosion Science*, 2008, 50(11):3193-3204.
- [19] LONGIN F. Value at risk: Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes [J]. *Annales économie et de statistique*, 1998, 52: 23-51.
- [20] NEFTCI S N. Value at risk calculations, extreme events, and tail estimation [J]. *Journal of Derivatives*, 2000, 7(3):23-38.
- [21] FROMONT E. Modélisation des rentabilités extrêmes des distributions de hedge funds [J]. *Euro-Mediterranean Economics and Finance*, 2005:126.
- [22] CARVALHAL A, MENDES B V M. Value-at-risk and extreme returns in Asian stock markets [J]. *International Journal of Business*, 2003, 8(1):17-40.
- [23] MCNEIL A J, FREY R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach [J]. *Journal of Empirical Finance*, 2000, 7(3-4):271-300.
- [24] MARIMOUTOU V, RAGGAD B, TRABELSI A. Extreme value theory and value at risk: Application to oil market [J]. *Energy Economics*, 2009, 31(4): 519-530.
- [25] ASSAF A. Extreme observations and risk assessment in the equity markets of mena region: Tail measures and value-at-risk [J]. *International Review of Financial Analysis*, 2009, 18(3):109-116.
- [26] Pickands J III. Statistical inference using extreme order statistics [J]. *The Annals of Statistics*, 1975, 3(1): 119-131.
- [27] DUMOUCHEL W H. Estimating the stable index α in order to measure tail thickness: A critique [J]. *The Annals of Statistics*, 1983, 11(4):1019-1031.
- [28] PATTON A J, ZIEGEL J F, CHEN R. Dynamic semiparametric models for expected shortfall (and value-at-risk) [J]. *Journal of Econometrics*, 2019, 211(2): 388-413.
- [29] NELSON D B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach [J]. *Econometrica*, 1991, 59(2): 347-370.
- [30] GLOSTEN L R, JAGANNATHAN R, RUNKLE D E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks [J]. *The Journal of Finance*, 1993, 48(5):1779-1801.
- [31] CATANIA L, BOUDT K, ARDIA D. GAS: Generalized Autoregressive Score Models[CP]. 2017.
- [32] EMBRECHTS P, KAUFMANN R, PATIE P. Strategic long-term financial risks: Single risk factors [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2005, 32(1-2): 61-90.