第50卷第3期 中国科学技术大学学报 Vol. 50, No. 3
2020年3月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Mar. 2020

文章编号:0253-2778(2020)03-0369-13

带权超网络的多重分形研究

刘胜久[1,2],李天瑞[1,2],刘 佳[1,2],谢 鹏[1,2]

(1.西南交通大学信息科学与技术学院,四川成都 611756;2.四川省云计算与智能技术高校重点实验室,四川成都 611756)

摘要:超网络是较通常意义上的复杂网络更为复杂的网络,超网络维数是度量超网络的一种可行的方法.针对带权超网络中节点权重及超边权重可以分别为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同的类型,首先给出了各种不同类型带权超网络的多重分形维数;然后讨论了带权超网络的多重分形特性;研究表明,在不同类型的带权超网络中,除节点权重及超边权重均为正实数及负实数的两种情形之外,其他类型的带权超网络均具有多重分形特性,且可以分为7个不同的类别,均分布于整个复平面;最后给出了所有这些带权超网络多重分形维数的解析表达式,并分析了这些带权超网络多重分形维数的若干重要性质.

关键词:超图;超网络;超网络维数;分形理论;分形维数;多重分形

中图分类号:TP393 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2020.03.016

引用格式:刘胜久,李天瑞,刘佳,等. 带权超网络的多重分形研究[J]. 中国科学技术大学学报,2020,50(3):369-381.

LIU Shengjiu, LI Tianrui, LIU Jia, et al. Research on multi-fractals of weighted hypernetworks[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020,50(3):369-381.

Research on multi-fractals of weighted hypernetworks

LIU Shengjiu[1,2], LI Tianrui[1,2], LIU Jia[1,2], XIE Peng[1,2]

(1. *School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 611756, *China*;
2. *Sichuan Key Lab of Cloud Computing and Intelligent Technique, Chengdu* 611756, *China*)

Abstract: Hypernetwork is a kind of network that is more complex than ordinary complex networks, while hypernetwork dimension is a feasible tool for measuring it. For the case that both node weight and hyperedge weight in weighted hypernetworks can value among positive real number, negative real number, pure imaginary number and complex number, etc., fractal dimensions for various weighted hypernetworks is proposed and their multi-fractals are discussed. It is shown that among all types of weighted hypernetworks, except those with both node weight and hyperedge weight being positive or negative real numbers, other types of weighted hypernetworks share multi-fractals and can be divided into seven different categories that are all distributed in the entire complex plane. The analytic expressions of multi-fractal dimensions for all types of weighted hypernetworks are also presented. Finally, some important properties of the multi-fractal dimensions of these weighted hypernetworks are analyzed.

Key words: hypergraph; hypernetwork; hypernetwork dimension; fractal theory; fractal dimension; multi-fractals

收稿日期:2019-07-15;**修回日期**:2019-09-28

基金项目:国家自然科学基金(61573292)资助.

作者简介:刘胜久,男,1988年生,博士.研究方向:数据挖掘、复杂网络、自然语言处理. E-mail: liushengjiu2008@163.com

通讯作者:李天瑞,博士/教授. E-mail: trli@swjtu.edu.cn

0 引言

图论是复杂网络研究的基础.图将真实世界中的复杂系统抽象为节点及节点对之间的边,可以较好地刻画真实系统的各项特性.现代意义上复杂网络的研究起源于上世纪中叶对 ER 随机图的研究[1],基于随机图理论,一系列其他类型的复杂网络模型相继提出[2-4].

在研究真实世界的复杂系统中,人们发现,小世界、无标度、自相似[5]是复杂网络的三大特性.度量自相似特性的重要工具是分形维数,对复杂网络的分形维数——网络维数的研究是其自相似特性研究的重要内容[6].由于实际情况的多样性与复杂性,采用一个单一的网络维数往往不能很好地描述复杂网络的自相似特性,采用多个不同的网络维数对复杂网络的自相似特性进行描述成为新的研究内容,这就是多重分形[7].多重分形是分形理论研究的重要内容,也是复杂网络研究的重要内容[8].

由于通常意义上的图中一条边能且只能连接两个节点,而真实世界中往往存在一条边连接任意多个节点的情形,这就是超图[9-10].用超图进行描述的网络较通常意义上的复杂网络更为复杂,这就是超网络[11].对超网络而言,也存在与复杂网络的网络维数类似的超网络维数[12].采用一个单一的超网络维数对超网络的自相似特性进行研究并不能全面刻画超网络的各项特性,需要对带权超网络的多重分形特性进行研究.

本文针对带权超网络中的节点权重及超边权重可以分别为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同的类型,我们对带权超网络的多重分形特性进行研究,给出了带权超网络的多重分形维数,并论述了其多重分形维数的若干重要性质.

1 预备知识

1.1 超图与超网络

对于非空有限集 $V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,其中,若 $e_i\neq\varnothing(i=1,2,\cdots,|E|)$,且 $|\bigcup_{i=1}^{|E|} e_i|=V$,我们称二元关系 $H=(V,E)$ 为一个超图.在超图 H 中,节点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_i,\cdots\}(1\leqslant i\leqslant|V|)$ 是超图 H 中所有节点的集合,超边集 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_j,\cdots\}(1\leqslant j\leqslant|E|)$ 是超图 H 中所有超边的集合.$|V|$ 表示超图 H 中所有节点的数量,称为超图 H 的阶;$|E|$ 表示超图 H 中所有超边的数量,且有 $E\subseteq P(V)\backslash\varnothing$.其中,$P(V)=2^V$,表示节点集 V 的幂集.若超图 H 中两个节点属于同一条超边,我们称这两个节点邻接;若两条超边存在共有的节点,我们称这两条超边邻接.一般情况下,人们只对无向超图进行研究.尽管目前已相继提出多种不同的有向超图理论[13-15],但对有向超图的研究仍不多,相关的理论尚不成熟,在理论与应用等方面仍有很多研究工作需要进一步完善.本文只对无向超图进行研究.

超图来源于图,但超图中的超边不同于图中的边.与图类似,超图也可以用关联矩阵或邻接矩阵进行分析研究.下面,我们分别论述超图的关联矩阵及邻接矩阵.

定义 1.1[16] 对任一超图 $H=(V,E)$,其关联矩阵 $\boldsymbol{C}(H)$ 是一个 $|V|\times|E|$ 阶的矩阵,其中,若 $v_i\in e_j$,则 $C_{ij}=1$,否则,$C_{ij}=0$.

定义 1.2[17] 对任一超图 $H=(V,E)$,其邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(H)$ 是一个 $|V|\times|V|$ 阶的方阵,其中,A_{ij} 为在超图的关联二部图中,从 v_i 到 v_j 的 2 长路的数目.

对超图而言,其关联矩阵及邻接矩阵的区别主要在于:关联矩阵一定是 0-1 矩阵,但邻接矩阵不一定是 0-1 矩阵;关联矩阵不一定是对称矩阵,但邻接矩阵一定是对称矩阵.特别地,若超图中每条边只关联有两个节点,则超图就退化为普通意义上的图,此时超图的邻接矩阵即为图的邻接矩阵.超图与其关联矩阵一一对应,一个超图只对应有一个关联矩阵,反之也成立;但超图与其邻接矩阵并不一定一一对应,有可能存在一个邻接矩阵对应多个超图的情形.在超网络中,我们往往通过与超图一一对应的关联矩阵对其进行分析研究.

1.2 分形与多重分形

不同于经典的欧氏理论,分形理论为我们提供了一种分析研究物体的崭新视角.与传统欧氏几何对零维的点、一维的线、二维的面、三维的体等进行刻画不同的是,分形理论能更好地描述不规则、不光滑、不一致的物体.分形理论对描述自相似现象有着远胜欧氏几何的优势.对具备自相似特性的物体而言,主要是对其分形维数的研究.人们相继提出一系列不同的度量物体分形维数的方法,如 Hausdorff 维数、Hausdorff-Besicovitch 维数、Informaiton 维数、Box-counting 维数等.其中,Hausdorff 维数是分形维数计算中较为通行的方法,Hausdorff 维数

的计算公式为

$$d=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log(\varepsilon^{-1})} \tag{1}$$

式中，ε 是小球体的半径或小立方体的棱长，$N(\varepsilon)$ 表示用此小球体或小立方体覆盖被测形体所得到的数目，式(1)意味着通过用半径为 ε 的小球体或棱长为 ε 的小立方体覆盖被测形体来计算形体的 Hausdorff 维数. 通常情况下，对于任一物体 X 而言，其 Hausdorff 维数 $\dim_H X$ 与其拓扑维数 $\dim_t X$ 二者之间存在如下关系式[18]

$$\dim_t X \leqslant \dim_H X \tag{2}$$

对于三维欧氏空间中的形体而言，运用式(1)可以得到形体的分形维数，同时，根据式(2)，其分形维数不超过 3. 对于现实生活中的一些真实物体而言，难以或不便于用式(1)直接进行计算，如湍流、云朵、火焰等. 对于这些特殊的物体，可以先将它们投射到低维空间；再计算低维空间中投射物的分形维数；最后运用余维相加定律反求出初始物体的分形维数[19]. 如对三维立体形式的火焰分形维数 FD_3 的计算，可以先将其投影到一个二维平面，计算二维平面中火焰图像的分形维数 FD_2，再用余维相加定律，使用

$$FD_3=FD_2+1 \tag{3}$$

间接得到火焰的分形维数[20].

在对分形维数的分析研究中，人们发现，通过一个单一的分形维数并不能全面刻画自相似形式物体的各项特性，于是提出通过多个不同的分形维数对物体进行分析描述，这就是多重分形[21]. 最简单的多重分形是双分形[22]. 多重分形理论突破了经典的单分形理论将物体的分形维数表述为数轴中一个孤立点的局限，将物体的分形维数表述为平面中的有限多个点，甚至无限多个点，如直线及曲线等，以便更全面、客观地对物体的各项特性进行描述，是经典分形理论的重要扩展. 目前已提出多种不同的多重分形理论. 多重分形迄今并没有严格、公认的准确定义，对多重分形理论的研究是分形理论研究的重要内容之一，也是分形理论研究的前沿课题.

1.3　网络维数与超网络维数

对于节点及边带有权重的带权图而言，节点与边的权重可以分别为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同的类型，我们将带权图的网络维数定义为带权图中边权重和的对数值以及节点权重和的对数值的比值[6]，公式表述为

$$\mathrm{ND}=\frac{\log\sum_{e\in E}f(e)}{\log\sum_{v\in V}f(v)} \tag{4}$$

显然，对于节点权重及边权重均为正实数的带权图来说，运用式(4)可以直接得到带权图的网络维数. 对于节点权重及边权重为负实数、纯虚数及复数等类型的带权图，我们需要先借助欧拉公式对负实数、纯虚数及复数等其他形式的权重进行变换，再计算其网络维数. 欧拉公式表述为

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{5}$$

欧拉公式的使用，使得我们可以将网络维数应用于节点权重及边权重分别为负实数、纯虚数及复数等多种不同类型的带权图中. 由于欧拉公式本质上是一个周期多值函数，我们对节点权重与边权重为负实数、纯虚数及复数等其他类型带权图分形维数的计算需要借助周期多值函数形式的欧拉公式进行计算，这将导致这些类型的带权图分形维数不唯一，也即需要用多个不同的分形维数来对其进行刻画，这其实就是带权图的多重分形. 分析表明，在所有的 16 种不同类型的带权图中，除节点权重及边权重均为正实数的带权图之外，其他 15 种类型的带权图均具有多重分形特性[8].

对于超网络而言，由于其一条超边可以连接任意多个节点，一般情况下，我们是通过与超网络一一对应的关联矩阵对其进行分析研究的. 我们将超网络维数定义为所有超边包含的节点权重之和与其权重乘积和的对数值和节点权重之和与超边权重之和乘积对数值的比值的两倍，即[12]

$$\mathrm{HD}=\frac{2\log\sum_{e\in E}\left(f(e)\sum_{v\in e}f(v)\right)}{\log\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)} \tag{6}$$

对于节点权重及超边权重均为正实数的带权超网络而言，运用式(6)可以直接得到带权超网络的超网络维数. 同理，借助欧拉公式，我们也可以将超网络维数应用于节点权重及超边权重分别为负实数、纯虚数及复数等多种不同类型的带权超网络中.

分析结果表明，在所有的 16 种不同权重类型的带权超网络中，共有 8 种不同的超网络维数. 下面，我们将借助周期多值函数形式的欧拉公式对带权超网络的多重分形特性进行研究，主要是分析带权超网络的多重分形维数，即为其对应的超网络维数.

2 带权超网络的多重分形研究

2.1 带权超网络的超网络维数

对节点权重及超边权重分别为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同类型的带权超网络而言，共有 16 种不同的组合，这 16 种组合对应有 8 种不同的超网络维数，如表 1 所示.

表 1 16 种带权超网络对应的超网络维数统计表

Tab. 1 Statistics of Hypernetwork Dimensions of 16 Weighted Hypernetworks

编号	节点权重	超边权重	超网络维数	
1	$f(v)\in R^{+}$	$f(e)\in R^{+}$	$\dfrac{2\log\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\log\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$	(7)
2	$-f(v)\in R^{-}$	$-f(e)\in R^{-}$		
3	$f(v)\in R^{+}$	$if(e)\in I$	$\dfrac{2\log e^{\frac{i\pi}{2}}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\log e^{\frac{i\pi}{2}}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$	(8)
4	$if(v)\in I$	$f(e)\in R^{+}$		
5	$f(v)\in R^{+}$	$-f(e)\in R^{-}$	$\dfrac{2\log e^{i\pi}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\log e^{i\pi}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$	(9)
6	$-f(v)\in R^{-}$	$f(e)\in R^{+}$		
7	$if(v)\in I$	$if(e)\in I$		
8	$-f(v)\in R^{-}$	$if(e)\in I$	$\dfrac{2\log e^{\frac{3}{2}i\pi}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\log e^{\frac{3}{2}i\pi}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$	(10)
9	$if(v)\in I$	$-f(e)\in R^{-}$		
10	$f(v)\in R^{+}$	$(a+bi)f(e)\in C$	$\dfrac{2\log\sqrt{a^2+b^2}e^{i\tan^{-1}\frac{b}{a}}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\log\sqrt{a^2+b^2}e^{i\tan^{-1}\frac{b}{a}}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$	(11)
11	$(a+bi)f(v)\in C$	$f(e)\in R^{+}$		
12	$if(v)\in I$	$(a+bi)f(e)\in C$	$\dfrac{2\log\sqrt{a^2+b^2}e^{i(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2})}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\log\sqrt{a^2+b^2}e^{i(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2})}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$	(12)
13	$(a+bi)f(v)\in C$	$if(e)\in I$		
14	$-f(v)\in R^{-}$	$(a+bi)f(e)\in C$	$\dfrac{2\log\sqrt{a^2+b^2}e^{i(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi)}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\log\sqrt{a^2+b^2}e^{i(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi)}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$	(13)
15	$(a+bi)f(v)\in C$	$-f(e)\in R^{-}$		
16	$(a+bi)f(v)\in C$	$(a+bi)f(e)\in C$	$\dfrac{2\log(a^2+b^2)e^{i\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\log(a^2+b^2)e^{i\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$	(14)

表 1 实际上是在[−π, π]一个周期内分析带权超网络的超网络维数，我们需要在多个周期内对带权超网络的超网络维数进行分析. 从表 1 可以发现，除节点权重及超边权重均为正实数或均为负实数的两种情形之外，其他 14 种情形对应的 7 种超网络维数均需要运用欧拉公式进行分析研究. 下面，我们分别对这 7 种不同的超网络维数进行分析研究. 为便于计算，在对数运算中，我们均取自然对数.

2.2 带权超网络的多重分形维数

表 1 中，式(7)所示的节点权重及超边权重均为正实数或均为负实数的带权超网络不具有多重分形特性，我们对带权超网络多重分形维数的研究先从式(8)所示的节点权重及超边权重分别为正实数、纯虚数或纯虚数、正实数的带权超网络开始.

对式(8)所示的节点权重为正实数、超边权重为纯虚数及节点权重为纯虚数、超边权重为正实数的 2 种带权超网络对应的超网络维数而言，其对应的多重分形维数为

$$\mathrm{HD}_1=\frac{2\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+2(2m+\frac{1}{2})(2n+\frac{1}{2})\pi^2}{(2m+\frac{1}{2})^2\pi^2+\ln^2\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+$$

$$2i\pi\frac{(2n+\frac{1}{2})\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-(2m+\frac{1}{2})\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(2m+\frac{1}{2})^2\pi^2+\ln^2\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},$$

$$m,n\in \mathrm{Z} \tag{15}$$

显然,式(15)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系方程为

$$z=\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}-t\left[i\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(2m+\frac{1}{2})\pi}+\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right],$$

$$m\in \mathrm{Z},t\in \mathrm{R} \tag{16}$$

该直线系是一簇经过点($\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$,0)的直线.式(15)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系方程为

$$\left|z\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))-i\pi(2n+\frac{1}{2})\right|=$$

$$\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+\pi^2(2n+\frac{1}{2})^2},n\in \mathrm{Z} \tag{17}$$

其圆心为

$$\left(\frac{\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},i\pi\frac{2n+\frac{1}{2}}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right),$$

半径为

$$\frac{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+\pi^2(2n+\frac{1}{2})^2}}{\left|\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\right|}.$$

使用等价的参数方程表述,则式(15)中的多值函数为

$$z\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)=\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+i\pi(2n+\frac{1}{2})+$$

$$\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+\pi^2(2n+\frac{1}{2})^2}(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{(2m+\frac{1}{2})\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v),m,n\in \mathrm{Z} \tag{18}$$

式(18)实际上是式(16)所示的直线系与式(17)所示的圆系的交点.

对式(9)所示的节点权重为正实数、超边权重为负实数及节点权重为负实数、超边权重为正实数,或节点权重及超边权重均纯虚数的 3 种带权超网络对应的超网络维数而言,其对应的多重分形维数为

$$\mathrm{HD}_2=\frac{2\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+2(2m+1)(2n+1)\pi^2}{(2m+1)^2\pi^2+\ln^2\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+$$
$$2i\pi\frac{(2n+1)\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-(2m+1)\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(2m+1)^2\pi^2+\ln^2\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},$$
$$m,n\in \mathrm{Z} \tag{19}$$

显然,式(19)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系方程为

$$z=\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}-t\left[i\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(2m+1)\pi}+\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right],$$
$$m\in \mathrm{Z},t\in \mathrm{R} \tag{20}$$

该直线系是一簇经过点($\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$,0)的直线.式(19)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系方程为

$$\left|z\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))-i\pi(2n+1)\right|=$$
$$\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+\pi^2(2n+1)^2},n\in \mathrm{Z} \tag{21}$$

其圆心为

$$(\frac{\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},i\pi\frac{2n+1}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}),$$

半径为

$$\frac{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+\pi^2(2n+1)^2}}{\left|\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\right|}.$$

使用等价的参数方程表述,则式(19)中的多值函数为

$$z\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)=\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+i\pi(2n+1)+$$
$$\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+\pi^2(2n+1)^2}(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{(2m+1)\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v),m,n\in \mathrm{Z} \tag{22}$$

式(22)实际上是式(20)所示的直线系与式(21)所示的圆系的交点.

对式(10)所示的节点权重为负实数、超边权重为纯虚数及节点权重为纯虚数、超边权重为负实数的 2 种带权超网络对应的超网络维数而言,其对应的多重分形维数为

$$\mathrm{HD}_3=\frac{2\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+2(2m+\frac{3}{2})(2n+\frac{3}{2})\pi^2}{(2m+\frac{3}{2})^2\pi^2+\ln^2\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+$$

$$2i\pi\frac{(2n+\frac{3}{2})\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-(2m+\frac{3}{2})\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(2m+\frac{3}{2})^2\pi^2+\ln^2\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},$$
$$m,n\in \mathrm{Z} \tag{23}$$

显然,式(23)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系方程为

$$z=\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}-t\left[i\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(2m+\frac{3}{2})\pi}+\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right],$$
$$m\in \mathrm{Z},t\in \mathrm{R} \tag{24}$$

该直线系是一簇经过点($\frac{2\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$,0)的直线. 式(23)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系方程为

$$\left|z\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))-i\pi(2n+\frac{3}{2})\right|=$$
$$\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+\pi^2(2n+\frac{3}{2})^2},n\in \mathrm{Z} \tag{25}$$

其圆心为

$$\left(\frac{\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},i\pi\frac{2n+\frac{3}{2}}{\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right),$$

半径为

$$\frac{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+\pi^2(2n+\frac{3}{2})^2}}{\left|\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\right|}.$$

使用等价的参数方程表述,则式(23)中的多值函数为

$$z\ln\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)=\ln\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+i\pi(2n+\frac{3}{2})+$$
$$\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+\pi^2(2n+\frac{3}{2})^2}(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{(2m+\frac{3}{2})\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v),m,n\in \mathrm{Z} \tag{26}$$

式(26)实际上是式(24)所示的直线系与式(25)所示的圆系的交点.

对式(11)所示的节点权重为正实数、超边权重为复数及节点权重为复数、超边权重为正实数的 2 种带权超网络对应的超网络维数而言,其对应的多重分形维数为

$$\mathrm{HD}_4=\frac{2\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(\tan^{-1}\frac{b}{a}+2m\pi)(\tan^{-1}\frac{b}{a}+2n\pi)}{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+2m\pi)^2+\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+$$

$$i\frac{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+2n\pi)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-(\tan^{-1}\frac{b}{a}+2m\pi)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+2m\pi)^2+\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},m,n\in\mathrm{Z} \tag{27}$$

显然,式(27)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系方程为

$$z=\frac{\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+t(i\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\tan^{-1}\frac{b}{a}+2m\pi}-\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}),$$
$$m\in\mathrm{Z},t\in\mathrm{R} \tag{28}$$

该直线系是一簇经过点($\frac{\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$,0)的直线.式(27)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系方程为

$$\left|z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))-i(2n\pi+tan^{-1}\frac{b}{a})\right|=$$
$$\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2},$$
$$n\in\mathrm{Z} \tag{29}$$

其圆心为

$$(\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},\ i\frac{2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}),$$

半径为

$$\frac{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}{\left|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\right|}.$$

使用等价的参数方程表述,则式(27)中的多值函数为

$$2z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)=\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+i(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+$$
$$\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e),m,n\in\mathrm{Z} \tag{30}$$

式(30)实际上是式(28)所示的直线系与式(29)所示的圆系的交点.

对式(12)所示的节点权重为纯虚数、超边权重为复数及节点权重为复数、超边权重为纯虚数的 2 种带权超网络对应的超网络维数而言,其对应的多重分形维数为

$$\mathrm{HD}_5=\frac{2\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2}+2m\pi)(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2}+2n\pi)}{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2}+2m\pi)^2+\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+$$
$$i\frac{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2}+2n\pi)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2}+2m\pi)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2}+2m\pi)^2+\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},$$
$$m,n\in\mathrm{Z}\tag{31}$$

显然,式(31)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系方程为

$$z=\frac{\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+t\left[i\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{\pi}{2}+2m\pi}-\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right]$$
$$m\in\mathrm{Z},t\in\mathrm{R}\tag{32}$$

该直线系是一簇经过点($\frac{\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$,0)的直线.式(31)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系方程为

$$\left|z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))-i(2n\pi+\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{b}{a})\right|=$$
$$\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2},n\in\mathrm{Z}\tag{33}$$

其圆心为

$$(\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},i\frac{2n\pi+\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}),$$

半径为

$$\frac{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(2n\pi+\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}{\left|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\right|}.$$

使用等价的参数方程表述,则式(31)中的多值函数为

$$2z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)=\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+i(2n\pi+\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{b}{a})+$$
$$\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(2n\pi+\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2m\pi+\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{b}{a}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e),m,n\in\mathrm{Z}\tag{34}$$

式(34)实际上是式(32)所示的直线系与式(33)所示的圆系的交点.

对式(13)所示的节点权重为负实数、超边权重为复数及节点权重为复数、超边权重为负实数的 2 种带权超网络对应的超网络维数而言,其对应的多重分形维数为

$$\mathrm{HD}_6=\frac{2\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi+2m\pi)(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi+2n\pi)}{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi+2m\pi)^2+\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+$$

$$i\frac{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi+2n\pi)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi+2m\pi)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi+2m\pi)^2+\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},m,n\in\mathrm{Z}\tag{35}$$

显然,式(35)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系方程为

$$z=\frac{\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+t\left[i\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi+2m\pi}-\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right],$$
$$m\in\mathrm{Z},t\in\mathrm{R}\tag{36}$$

该直线系是一簇经过点$\left(\frac{\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},0\right)$的直线.式(35)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系方程为

$$\left|z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))-i(2n\pi+\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})\right|=$$
$$\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2},$$
$$n\in\mathrm{Z}\tag{37}$$

其圆心为

$$\left(\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},\ i\frac{2n\pi+\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right),$$

半径为

$$\frac{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(2n\pi+\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}{\left|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\right|}.$$

使用等价的参数方程表述,则式(35)中的多值函数为

$$2z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)=\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+i(2n\pi+\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+$$
$$\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(2n\pi+\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2m\pi+\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e),m,n\in\mathrm{Z}\tag{38}$$

式(38)实际上是式(36)所示的直线系与式(37)所示的圆系的交点.

对式(14)所示的节点权重及超边权重均为复数的带权超网络对应的超网络维数而言,其对应的多重分形维数为

$$\mathrm{HD}_7=\frac{2\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}+2m\pi)(\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}+2n\pi)}{(\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}+2m\pi)^2+\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+$$
$$i\frac{(\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}+2n\pi)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-(\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}+2m\pi)\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{(\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}+2m\pi)^2+\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},m,n\in\mathrm{Z} \tag{39}$$

显然,式(39)是一个多值函数,在复平面中,其分布在经过同一点的一簇直线的直线系上,该直线系方程为

$$z=\frac{\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}+t\left[i\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}+2m\pi}-\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right],$$
$$m\in\mathrm{Z},t\in\mathrm{R} \tag{40}$$

该直线系是一簇经过点($\dfrac{\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}$,0)的直线.式(39)中的多值函数也可视为分布在多个圆的圆系上,该圆系方程为

$$\left|z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)-\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))-i(2n\pi+\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2})\right|=$$
$$\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2})^2},n\in\mathrm{Z} \tag{41}$$

其圆心为

$$\left(\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\sum_{e\in E}f(e)},\ i\frac{2n\pi+\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}}{\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)}\right),$$

半径为

$$\frac{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2})^2}}{\left|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)\right|}.$$

使用等价的参数方程表述,则式(39)中的多值函数为

$$2z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e)=$$
$$\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+i(2n\pi+\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2})+$$
$$\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}(f(e)\sum_{v\in e}f(v))+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2})^2}(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2m\pi+\tan^{-1}\dfrac{2ab}{a^2-b^2}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in e}f(v)\sum_{e\in E}f(e),m,n\in \mathrm{Z} \tag{42}$$

式(42)实际上是式(40)所示的直线系与式(41)所示的圆系的交点.

2.3 带权超网络的多重分形分析

在2.2节中,我们对节点权重及超边权重分别为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同类型的带权超网络的多重分形特性进行了研究.通过分析发现,在16种带权超网络中,除节点权重及超边权重均为正实数或负实数的2种带权超网络之外,其他14种带权超网络具有多重分形特性,而且均分布于整个复平面.我们可以将14种带权超网络的多重分形维数分为7个不同的类别,16种带权图的多重分形统计如表2所示.

表2 16种不同类型带权超网络多重分形统计表

Tab.2 Statistics of multi-fractals of 16 weighted hypernetworks

类别	类别	边权重	多重分形维数分布	备注
1	正实数 $f(v)\in\mathrm{R}^+$	正实数 $f(e)\in\mathrm{R}^+$	—	单分形,分布于一个点
	负实数 $-f(v)\in\mathrm{R}^-$	负实数 $-f(e)\in\mathrm{R}^-$		
2	正实数 $f(v)\in\mathrm{R}^+$	纯虚数 $if(e)\in I$	直线系/圆系	多重分形,分布于整个复平面
	纯虚数 $if(v)\in I$	正实数 $f(e)\in\mathrm{R}^+$		
3	正实数 $f(v)\in\mathrm{R}^+$	负实数 $-f(e)\in\mathrm{R}^-$	直线系/圆系	多重分形,分布于整个复平面
	负实数 $-f(v)\in\mathrm{R}^-$	正实数 $f(e)\in\mathrm{R}^+$		
	纯虚数 $if(v)\in I$	纯虚数 $if(e)\in I$		
4	负实数 $-f(v)\in\mathrm{R}^-$	纯虚数 $if(e)\in I$	直线系/圆系	多重分形,分布于整个复平面
	纯虚数 $if(v)\in I$	负实数 $-f(e)\in\mathrm{R}^-$		
5	正实数 $f(v)\in\mathrm{R}^+$	复数 $(a+bi)f(e)\in C$	直线系/圆系	多重分形,分布于整个复平面
	复数 $(a+bi)f(v)\in C$	正实数 $f(e)\in\mathrm{R}^+$		
6	纯虚数 $if(v)\in I$	复数 $(a+bi)f(e)\in C$	直线系/圆系	多重分形,分布于整个复平面
	复数 $(a+bi)f(v)\in C$	纯虚数 $if(e)\in I$		
7	负实数 $-f(v)\in\mathrm{R}^-$	复数 $(a+bi)f(e)\in C$	直线系/圆系	多重分形,分布于整个复平面
	复数 $(a+bi)f(v)\in C$	负实数 $-f(e)\in\mathrm{R}^-$		
8	复数 $(a+bi)f(v)\in C$	复数 $(a+bi)f(e)\in C$	直线系/圆系	多重分形,分布于整个复平面

3 结论

分形理论具有不同于经典欧氏理论的一些特性,为我们分析研究客观事物提供了一个崭新的视角,多重分形是分形理论研究的重要内容之一,我们对分形理论及多重分形在带权超网络中的研究与应用进行了分析.本文的创新之处主要体现在下述几个方面:

(Ⅰ)针对带权超网络中的节点权重及超边权重可以为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同的情形,分别给出了对应的16种带权超网络的分形维数分析结果,并给出了每一种带权超网络的分形维数,将带权超网络的分形维数由实数域推广到复数域;

(Ⅱ)在16种不同类型的带权超网络中,除节点权重及超边权重均为正实数或负实数的2种情形之外,其他他14种带权超网络均具备多重分形的特性,而且可以分为7个不同的类别,这些带权超网络的多重分形维数均分布于整个复平面;

(Ⅲ)对7个不同类别的带权超网络的多重分形维数进行研究,用参数方程的形式给出了这些分布在复平面上呈面状分布的带权超网络的多重分形维

数,并分析了这些带权超网络多重分形维数的若干重要性质.

图与超图及分别对应的网络与超网络是复杂系统与复杂性科学研究的重点,分形理论是复杂系统与复杂性科学的重要研究内容.后续研究的重点在于深入分析带权超网络中的多重分形特性,研究各类不同权重对应的带权超网络多重分形维数之间的关联,并结合真实复杂系统中的超网络对带权超网络的多重分形维数进行分析研究,尝试给出量化的分析结果.

参考文献(References)

[1] ERDÖSP, RéNYI A R. On random graphs Ⅰ[J]. Publicationes Mathematicae, 1959, 6: 290-297.

[2] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393: 440-442.

[3] NEWMAN M E J, WATTS D J. Renormalization group analysis of the small-world network model[J]. Physics Letter A, 1999, 293: 341-346.

[4] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286: 509-512.

[5] SONG C, JALVIN S, MAKSE H A. Self-similarity of complex networks[J]. Nature, 2005, 433: 392-395.

[6] 刘胜久,李天瑞,刘小伟. 网络维数:一种度量复杂网络的新方法[J]. 计算机科学, 2019, 46(1): 51-56.
LIU Shengjiu, LI Tianrui, LIU Xiaowei. Network dimension: A new measure for complex networks[J]. Computer Science, 2019, 46(1): 51-56.

[7] HARTE D. Multifractals: Theory and Applications [M]. Chapman & Hall/CRC, 2001.

[8] 刘胜久,李天瑞,珠杰,等. 带权图的多重分形研究[J]. 南京大学学报, 2020, 56(1): 85-97.
LIU Shengjiu, LI Tianrui, ZHU Jie, et al. Research on multi-fractals of weighted graph[J]. Journal of Nanjing University, 2020, 56(1): 85-97.

[9] ERDÖS P, HAJNAL A. On the chromatic number of graphs and set systems [J]. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica. 1966, 17: 61-99.

[10] BERGE C. Graphs and Hypergraphs[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973.

[11] ESTRADA E, RODRIGUES V R. Subgraphcentrality in complex networks[J]. Physical Review E, 2005, 71(5): 1-9.

[12] 刘胜久,李天瑞,杨宗霖,等. 带权超网络的度量方法及其性质[J]. 计算机应用. 2019, 39(11): 3107-3113.
LIU Shengjiu, LI Tianrui, YANG Zonglin, et al. Measure and properties of weighted hypernetwork[J]. Journal of Computer Applications. 2019, 39(11): 3107-3113.

[13] 黄汝激. 超网络的有向 k 超树分析法[J]. 电子科学学刊, 1987, 9(3): 244-255.
HUANG Ruji. Directed k-hypertree method for hypernetwork analysis[J]. Journal of Electronics, 1987, 9(3): 244-255.

[14] GALLO G, LONGO G, NGUYEN S. Directed hypergraph and applications[J]. Discrete Applied Mathematics, 1993, 42: 177-201.

[15] FAHIR O E, DAVID A G. Directed Moore hypergraphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1995, 63: 117-127.

[16] 王建方. 超图的理论基础[M]. 北京:高等教育出版社, 2006.
WANG Jianfang. Theoretical Principle of Hypergraph [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.

[17] FENG K Q, LI W W. Spectra of hypergraphs and applications[J]. Journal of Number Theory. 1996, 60(1): 1-22.

[18] BALKA R, BUCZOLICH Z, ELEKEs M. A new fractal dimension: The topological Hausdorff dimension[J]. Advances in Mathematics, 2015, 274(1): 881-927.

[19] SREENIVASAN K R, MENEVEAU C. The fractal facets of turbulence[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1986, 173(173): 357-386.

[20] 梁俊杰,李格升,张尊华,等. 球形火焰分形维数的计算方法[J]. 燃烧科学与技术, 2016, 22(1): 26-32.
LIANG Junjie, LI Gesheng, ZHANG Zunhua, et al. Calculation method for fractal dimension of spherical flames [J]. Journal of Combustion Science and Technology, 2016, 22(1): 26-32.

[21] 陈彦光. 城市地理研究中的单分形、多分形和自仿射分形[J]. 地理科学进展, 2019, 38(1): 38-49.
CHEN Yanguang. Monofractal, multifractals, and self-affine fractals in urban studies[J]. Progress in Geography, 2019, 38(1): 38-49.

[22] 赵静湉,陈彦光,李双成. 京津冀城市用地形态的双分形特征及其演化[J]. 地理科学进展, 2019, 38(1): 77-87.
ZHAO Jingtian, CHEN Yanguang, LI Shuangcheng. Bi-fractal structure and evolution of the Beijing-Tianjin-Hebei region urban land-use patterns[J]. Progress in Geography, 2019, 38(1): 77-87.