第50卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol. 50, No. 2
2020年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2020

文章编号:0253-2778(2020)02-0156-07

END随机变量加权和的完全矩收敛性

李 翔,沈爱婷

(安徽大学数学科学学院,安徽合肥 230601)

摘要:利用END随机变量的Rosenthal型矩不等式和随机变量的截尾技术,研究了END随机变量加权和的完全收敛性以及完全矩收敛性,所得结果推广了独立变量以及NA随机变量的若干相应结果.

关键词:END随机变量;完全收敛性;完全矩收敛性;加权和

中图分类号:O211.4 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2020.02.011

2010 Mathematics Subject Classification:60F15

引用格式:李翔,沈爱婷. END随机变量加权和的完全矩收敛性[J]. 中国科学技术大学学报,2020,50(2):156-162.

LI Xiang, SHEN Aiting. Complete moment convergence for weighted sums of extended negatively dependent random variables[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020,50(2):156-162.

Complete moment convergence for weighted sums of extended negatively dependent random variables

LI Xiang, SHEN Aiting

(*School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China*)

Abstract: The complete convergence and complete moment convergence for weighted sums of extended negatively dependent (END) random variables was studied by using the Rosenthal type moment inequality and truncation method of random variables. The obtained results extend some corresponding ones for independent random variables and negatively associated (NA) random variables in the existing literature.

Key words: END random variables; complete convergence; complete moment convergence; weighted sums

0 引言

众所周知,有关独立变量的结果已经非常完善.考虑到实际问题中,随机变量之间并非独立,而是存在着某种相依结构,所以近六十年来,概率统计学者们相继提出了各种混合变量以及相依变量的概念,比如:α混合、ρ混合、φ混合、ρ^*混合、NA变量、NOD变量、NSD变量、END变量等,同时还研究了这些随机变量部分和与加权和的概率极限性质.而在这些变量中,EDN变量是一种比较宽泛的相依结构,包含了独立变量、NA变量、NOD变量、NSD变量以及一些正相依变量作为其特例.本文主要研究END变量部分和的概率极限性质,特别是完全收敛性和完全矩收敛性,所得结果推广了独立变量以及

收稿日期:2019-07-31;**修回日期**:2019-11-20

基金项目:安徽高校省级自然科学研究重点项目(KJ2019A0003)资助.

作者简介:李翔,男,1995年生,硕士生.研究方向:概率论与数理统计. E-mail:1499493591@qq.com

通讯作者:沈爱婷,博士/教授. E-mail:empress201010@126.com

NA 变量的相应结果. 为此,我们先分别给出 NA 变量和 END 变量的概念,具体如下.

定义 0.1　称随机变量序列 $\{X_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是 NA 序列,如果对于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任何两个不相交的非空子集 A_1 和 A_2,有

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_i, i \in A_1), f_2(X_j, j \in A_2)) \leqslant 0,$$

其中 f_1 和 f_2 是任何两个使得协方差存在且对每个变元均非降(或同为对每个变元均非升)的函数. 称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 NA 的,如果对任何 $n \geqslant 2$, $X_1, \cdots, X_n$ 是 NA 的.

NA 变量的概念由 Alam 和 Saxena[1] 给出,随后 Joag-Dev 和 Proschan[2] 对 NA 变量的性质进行了细致地研究,并且取得了很多有意义的结果. 之后,Liu[3] 又引入了 END 变量的概念,具体如下.

定义 0.2　称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 END 的,若存在常数 $M \geqslant 1$,使得对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$,都有下面两个式子成立:

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \cdots, X_n > x_n) \leqslant M \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i),$$

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \cdots, X_n < x_n) \leqslant M \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x_i).$$

由 END 随机变量的定义知,若 $M = 1$,则 END 变量即为 NOD 变量,NOD 变量的概念由 Joag-Dev 和 Proschan[2] 给出;他们还指出 NA 变量是 NOD 的,同时还给出了是 NOD 但不是 NA 的反例. Hu[4] 指出 NSD 变量是 NOD 的. Liu[3] 通过举例指出: END 变量既包含负相依结构又包含正相依结构. 因此,END 变量是一类包含独立变量、NA 变量、NSD 变量、NOD 变量以及一些正相依结构在内的非常广泛的相依变量,对其概率极限性质及其应用的研究具有重要的理论意义和应用价值.

自从 Liu[3] 于 2009 年给出 END 变量的概念以来,很多概率统计学者对 END 变量的概率极限理论及其应用进行了大量的研究,并且取得了很多有意义的成果. Liu[5] 研究了具有重尾的 END 随机变量的中偏差的充要条件;Shen[6] 建立了 END 随机变量的 Rosenthal 型矩不等式,并利用它研究了非负 END 随机变量的逆矩的渐近逼近问题;Wu 和 Guan[7] 研究了 END 随机变量序列的若干收敛性质,包括弱收敛性、L_p 收敛性以及完全收敛性;Qiu 等[8] 在不同条件下获得了 END 阵列加权和的完全收敛定理;Wang 等[9] 获得了 END 随机变量序列以及随机变量阵列的完全收敛性;Wang 和 Wang[10] 给出了一致变化尾下 END 变量的精确大偏差结果;Wang 等[11] 研究了 END 误差下非参数回归模型中加权估计量的完全相合性问题;Shen[12] 研究了 END 随机变量加权和的完全收敛性,同时将其应用于非参数回归模型;Shen 和 Volodin[13] 得到了 END 随机变量阵列的弱大数定律和强大数定律,并给出应用; Shen 等[14] 给出了 END 随机变量的完全收敛性以及完全矩收敛性的充分必要条件;Wu 等[15] 研究了 END 随机变量阵列的完全收敛性和完全矩收敛性;Yang 等[16] 进一步研究了 END 误差下非参数回归模型中加权估计量的完全相合性问题,同时还得到了强收敛速度,改进了 Wang 等[11] 的相应结果.

本文将在很一般的条件下,进一步研究 END 变量加权和的完全收敛性和完全矩收敛性,所得结果会推广已有文献的相应结果.

接下来,我们将给出完全收敛性和完全矩收敛性的概念. 众所周知,完全收敛性是概率极限理论中的一个重要研究内容,特别是在建立强收敛速度的时候起到至关重要的作用. 完全收敛性的概念最早由 Hsu 和 Robbins[17] 于 1947 给出,其定义如下.

定义 0.3　称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 完全收敛于一个常数 C,如果对任意的 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - C| > \varepsilon) < \infty.$$

由定义 0.3 以及 Borel-Cantelli 引理,容易得到 $X_n \to C$ a. s. ,所以完全收敛性是一种比 a. s. 收敛更强的收敛性质. 对于独立同分布的随机变量序列,Li 等[18] 研究了其加权和的完全收敛性,并得到如下结果:

定理 0.1　设 $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ 是一独立同分布的随机变量序列, $\beta \geqslant -1$. $\{a_{ni} \approx (i/n)^{\beta}(1/n), 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是一个正常数三角阵列. 则以下两个结论是等价的:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} E|X|^{1/(1+\beta)} < \infty, & -1 < \beta < -1/2; \\ E|X|^2 \log(1+|X|) < \infty, & \beta = -1/2; \\ E|X|^2 < \infty, & \beta > -1/2 \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i - EX\right| > \varepsilon\right) < \infty, \forall \varepsilon > 0 \tag{2}$$

之后,Liang[19]又将定理 0.1 的结果从独立同分布的随机变量序列推广到 NA 随机变量的场合,并建立了以下结果.

定理 0.2 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是一列独立同分布且均值为零的 NA 随机变量序列,且被随机变量 X 随机控制.设常数列 $\{a_{nk}, 1 \leqslant k \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 满足定理 0.1 中的条件.对于 $r > 1$,如果

$$\begin{cases} E\mid X\mid^{(r-1)/(1+\beta)} < \infty, -1 < \beta < -1/r; \\ E\mid X\mid^{r}\log(1+\mid X\mid) < \infty, \beta = -1/r; \\ E\mid X\mid^{r} < \infty, \beta > -1/r \end{cases} \tag{3}$$

则对任意的 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{j} a_{ni}X_i\right| > \varepsilon\right) < \infty \tag{4}$$

相反的,如果 $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ 是同分布的 NA 随机变量序列,且式(4)成立,则式(3)仍成立.

易见,在定理 0.2 中取 $r=2$,则可得到定理 0.1.

最近,Chen 和 Sung[20]做了一个很好的工作,他们在十分宽泛的权系数条件和矩条件下给出了 ρ^* 混合序列加权和的完全收敛性以及完全矩收敛性的充分必要条件.

本文的目的是进一步将定理 0.2 中的完全收敛性推广到完全矩收敛性,同时将 NA 变量推广到 END 变量的场合.完全矩收敛性的概念最早由 Chow[21]于 1988 年给出,具体如下:

定义 0.4 设 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 是一随机变量序列,$a_n > 0$, $b_n > 0$, $q > 0$.如果对任意的 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n E(b_n^{-1}\mid Z_n\mid - \varepsilon)_+^q < \infty,$$

则称 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 是 q 阶完全矩收敛的.

本文的主要结果要用到随机控制的概念,具体如下:

定义 0.5 称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 被随机变量 X 随机控制,如果存在一个常数 $C > 0$,使得对任意的 $n \geqslant 1$ 和 $x \geqslant 0$,有

$$P(\mid X_n\mid \geqslant x) \leqslant CP(\mid X\mid \geqslant x).$$

本文中的常数一律以 $C(>0)$ 表示,且在不同的地方 C 可以表示不同值,$I(A)$ 表示集合 A 的示性函数,记 $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $x_+ = xI(x > 0)$.

1 相关引理

为了证明主要结果,我们需要以下引理.其中引理 1.1 是 END 随机变量的基本性质,具体可参考文献[3].

引理 1.1 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 END 随机变量序列,$\{f_n(\cdot), n \geqslant 1\}$ 同为单调递增(或同为单调递减)的函数列,则 $\{f_n(X_n), n \geqslant 1\}$ 仍是 END 随机变量序列.

引理 1.2 设 X 为一个随机变量,对于任意的 $\alpha \geqslant 0$, $\gamma > 0$ 以及 $\beta > -1$,有

$$\int_1^{\infty} u^{\beta} E\mid X\mid^{\alpha} I(\mid X\mid > u^{\gamma})\mathrm{d}u \leqslant CE\mid X\mid^{\frac{\beta+1}{\gamma}+\alpha} \tag{5}$$

$$\int_1^{\infty} u^{\beta}\log u E\mid X\mid^{\alpha} I(\mid X\mid > u^{\gamma})\mathrm{d}u \leqslant CE\mid X\mid^{\frac{\beta+1}{\gamma}+\alpha}\log(1+\mid X\mid) \tag{6}$$

证明 先证明式(5).易见,

$$\int_1^{\infty} u^{\beta} E\mid X\mid^{\alpha} I(\mid X\mid > u^{\gamma})\mathrm{d}u \leqslant \int_1^{\infty} u^{\beta}\sum_{i=\lfloor u\rfloor}^{\infty} E\mid X\mid^{\alpha} I(i < \mid X\mid^{1/\gamma} \leqslant i+1)\mathrm{d}u \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} E\mid X\mid^{\alpha} I(i < \mid X\mid^{1/\gamma} \leqslant i+1)\int_1^{i} u^{\beta}\mathrm{d}u \leqslant CE\mid X\mid^{\frac{\beta+1}{\gamma}+\alpha}.$$

式(6)的证明与式(5)的证明类似,故省略.证毕.

引理 1.3 设 X 为一个随机变量,对于任意的 $\alpha \geqslant 0$, $\gamma > 0$ 以及 $\beta < -1$,有

$$\int_1^{\infty} u^{\beta} E\mid X\mid^{\alpha} I(\mid X\mid \leqslant u^{\gamma})\mathrm{d}u \leqslant CE\mid X\mid^{\frac{\beta+1}{\gamma}+\alpha} \tag{7}$$

$$\int_1^{\infty} u^{\beta}\log u E\mid X\mid^{\alpha} I(\mid X\mid \leqslant u^{\gamma})\mathrm{d}u \leqslant CE\mid X\mid^{\frac{\beta+1}{\gamma}+\alpha}\log(1+\mid X\mid) \tag{8}$$

引理 1.3 的证明过程与引理 1.2 的类似,故省略.

利用随机控制的定义以及分部积分,我们可以得到如下引理,其证明过程也可以参考文献[22].

引理 1.4 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是一随机变量序列,且被随机变量 X 随机控制.则对于任意的 $\mu > 0$, $t > 0$ 以及 $n \geqslant 1$,以下两式成立:

$$E\mid X_n\mid^{\mu} I(\mid X_n\mid \leqslant t) \leqslant C_1[E\mid X\mid^{\mu} I(\mid X\mid \leqslant t) + t^{\mu}P(\mid X\mid > t)] \tag{9}$$

$$E\mid X_n\mid^{\mu} I(\mid X_n\mid > t) \leqslant C_2 E\mid X\mid^{\mu} I(\mid X\mid > t) \tag{10}$$

式中,C_1 和 C_2 为两个正常数.

下面的引理是 END 变量的矩不等式,在证明

主要结果的过程中起主要作用,其中,式(11)可参考文献[6],式(12)可参考文献[14].

引理 1.5　设 $p \geqslant 1$, $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是均值为零的 END 随机变量序列,且 $E|X_n|^p < \infty$, $n \geqslant 1$. 则存在仅依赖于 p 的正常数 C_p 和 D_p,使得对任意的 $n \geqslant 2$,均有

$$E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^p\right) \leqslant C_p\left[\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p + \left(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\right)^{p/2}\right],\ p \geqslant 2 \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{l} E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^p\right) \leqslant C_p \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p, \\ 1 \leqslant p < 2 \end{array}\right\} \tag{12}$$

2　主要结果及其证明

定理 2.1　设 $\beta > -1$, $r > 1$, $1 \leqslant q < (r \wedge 2)$, $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是一均值为 0 的 END 随机变量序列,且被随机变量 X 随机控制. 设 $\{a_{ni} \approx (i/n)^\beta (1/n), 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是一个三角阵列. 如果

$$\begin{cases} E|X|^{(r-1)/(1+\beta)} < \infty, & -1 < \beta < -1/r; \\ E|X|^r \log(1+|X|) < \infty; & \beta = -1/r; \\ E|X|^r < \infty, & \beta > -1/r \end{cases} \tag{13}$$

则对于任意的 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i\right| - \varepsilon\right)_+^q < \infty \tag{14}$$

从而,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i\right| > \varepsilon\right) < \infty \tag{15}$$

证明　先证明式(14). 对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 1$,定义

$$a_{ni} Y_{ni} = -I(a_{ni} X_i < -1) + a_{ni} X_i I(|a_{ni} X_i| \leqslant 1) + I(a_{ni} X_i > 1),$$
$$a_{ni} Z_{ni} = (a_{ni} X_i + 1) I(a_{ni} X_i < -1) + (a_{ni} X_i - 1) I(a_{ni} X_i > 1).$$

注意到 $EX_n = 0$, $a_{ni} X_i = a_{ni}(Y_{ni} + Z_{ni})$,我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}(Y_{ni} - EY_{ni})\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}(Z_{ni} - EZ_{ni})\right| \tag{16}$$

由 C_r 不等式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i\right| - \varepsilon\right)_+^q \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}(Y_{ni} - EY_{ni})\right| - \varepsilon\right)_+^q + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}(Z_{ni} - EZ_{ni})\right|\right)^q \overset{\Delta}{=} L_1 + L_2.$$

因此,为了证明式(14)成立,只需要证明 $L_1 < \infty$, $L_2 < \infty$. 首先,我们证明 $L_1 < \infty$. 对于给定的 $n \geqslant 1$,由引理 1.1 很容易得 $\{Y_{ni} - EY_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 仍是 END 随机变量序列. 因此,对于 $p > 2$,由引理 1.5、Markov 不等式、Jensen 不等式以及 $q < 2 < p$ 得

$$\begin{aligned} L_1 &\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \int_0^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}(Y_{ni} - EY_{ni})\right| > t^{1/q} + \varepsilon\right) \mathrm{d}t \leqslant \\ &C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \int_0^{\infty} \frac{1}{(t^{1/q} + \varepsilon)^p} E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}(Y_{ni} - EY_{ni})\right|\right)^p \mathrm{d}t \leqslant \\ &C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^p E|Y_{ni} - EY_{ni}|^p + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 E|Y_{ni} - EY_{ni}|^2\right)^{p/2}\right] \leqslant \\ &C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni} Y_{ni}|^p + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \left(\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni} Y_{ni}|^2\right)^{p/2} \overset{\Delta}{=} K_1 + K_2. \end{aligned}$$

显然,由 Y_{ni} 的定义和引理 1.4 得

$$\begin{aligned} K_1 &\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \sum_{i=1}^{n} P(|a_{ni} X_i| > 1) + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni} X_i|^p I(|a_{ni} X_i| \leqslant 1) \leqslant \\ &C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \sum_{i=1}^{n} P(|a_{ni} X| > 1) + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni} X|^p I(|a_{ni} X| \leqslant 1) \overset{\Delta}{=} K_{11} + K_{12} \end{aligned} \tag{17}$$

下面我们先来证明 $K_{11} < \infty$. 由引理 1.2 和式(13),有

$$K_{11}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\sum_{i=1}^{n}P(|X|>Cn^{1+\beta}i^{-\beta})\approx$$
$$C\int_1^{\infty}x^{r-2}\int_1^{x}P(|X|>Cx^{1+\beta}y^{-\beta})\mathrm{d}y\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_1^{\infty}\mathrm{d}u\int_1^{u}u^{(r-2-\beta)/(1+\beta)}v^{\beta(r-1)/(1+\beta)}P(|X|>Cu)\mathrm{d}v\approx$$
$$(\text{令 } u=x^{1+\beta}y^{-\beta},v=y)$$
$$\begin{cases}C\int_1^{\infty}u^{(r-1)/(1+\beta)-1}P(|X|>Cu)\mathrm{d}u, & -1<\beta<-1/r;\\ C\int_1^{\infty}u^{r-1}\log uP(|X|>Cu)\mathrm{d}u, & \beta=-1/r;\\ C\int_1^{\infty}u^{r-1}P(|X|>Cu)\mathrm{d}u, & \beta>-1/r\end{cases}\approx$$
$$\begin{cases}CE|X|^{(r-1)/(1+\beta)}<\infty, & -1<\beta<-1/r;\\ CE|X|^{r}\log(1+|X|)<\infty, & \beta=-1/r;\\ CE|X|^{r}<\infty, & \beta>-1/r\end{cases}\tag{18}$$

取 p 足够大,使得

$(r-1)/(1+\beta)-1-p<-1,r-1-p<-1$,

由引理 1.3 和式(13),有

$$K_{12}\approx C\int_1^{\infty}x^{r-2}\int_1^{x}x^{-p(1+\beta)}y^{p\beta}\cdot E|X|^{p}I(|X|\leqslant Cx^{1+\beta}y^{-\beta})\mathrm{d}y\mathrm{d}x\leqslant$$
$$(\text{令 } u=x^{1+\beta}y^{-\beta},v=y)$$
$$C\int_1^{\infty}\mathrm{d}u\int_1^{u}u^{(r-2-\beta)/(1+\beta)-p}v^{\beta(r-1)/(1+\beta)}\cdot E|X|^{p}I(|X|\leqslant Cu)\mathrm{d}v\approx$$
$$\begin{cases}C\int_1^{\infty}u^{(r-1)/(1+\beta)-1-p}E|X|^{p}I(|X|<Cu)\mathrm{d}u, & -1<\beta<-1/r;\\ C\int_1^{\infty}u^{r-1-p}\log uE|X|^{p}I(|X|<Cu)\mathrm{d}u, & \beta=-1/r;\\ C\int_1^{\infty}u^{r-1-p}E|X|^{p}I(|X|<Cu)\mathrm{d}u, & \beta>-1/r\end{cases}\approx$$
$$\begin{cases}CE|X|^{(r-1)/(1+\beta)}<\infty, & -1<\beta<-1/r;\\ CE|X|^{r}\log(1+|X|)<\infty, & \beta=-1/r;\\ CE|X|^{r}<\infty, & \beta>-1/r.\end{cases}$$

接下来,我们将证明 $K_2<\infty$. 由 Y_{ni} 的定义、Jessen 不等式以及引理 1.4 得

$$K_2\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}P(|a_{ni}X|>1)+\sum_{i=1}^{n}E|a_{ni}X|^{2}I(|a_{ni}X|\leqslant 1)\Big)^{p/2}\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}P(|a_{ni}X|>1)\Big)^{p/2}+$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}E|a_{ni}X|^{2}I(|a_{ni}X|\leqslant 1)\Big)^{p/2}\triangleq K_{21}+K_{22}\tag{19}$$

取 p 足够大,使得 $r-2-pr(1+\beta)/2<-1$,且 $r-2-(r-1)p/2<-1$. 由 Markov 不等式和式(13)得

$$K_{21}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}P(|X|>Cn^{1+\beta}i^{-\beta})\Big)^{p/2}\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{E|X|^{r}}{(n^{1+\beta}i^{-\beta})^{r}}\Big)^{p/2}=$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(E|X|^{r}n^{-(1+\beta)r}\sum_{i=1}^{n}i^{\beta r}\Big)^{p/2}\leqslant$$
$$\begin{cases}C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-pr(1+\beta)/2}, & -1<\beta<-1/r;\\ C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-pr(1+\beta)/2}(\log n)^{p/2}, & \beta=-1/r;\\ C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-(r-1)p/2}, & \beta>-1/r.\end{cases}$$

为了证明 $K_{22}<\infty$,我们考虑以下两种情形.

(i) 当 $1<r<2$ 时,取 p 足够大,使得 $r-2-pr(1+\beta)/2<-1$, $r-2-p(r-1)/2<-1$,由 $E|X|^{r}<\infty$ 得

$$K_{22}\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}E|a_{ni}X|^{r}I(|a_{ni}X|\leqslant 1)\Big)^{p/2}\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{r}\Big)^{p/2}\approx$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}n^{-r(1+\beta)}i^{r\beta}\Big)^{p/2}\leqslant$$
$$\begin{cases}C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-(1+\beta)rp/2}, & -1<\beta<-1/r;\\ C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-(1+\beta)rp/2}(\log n)^{p/2}, & \beta=-1/r;\\ C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-(r-1)p/2}, & \beta>-1/r.\end{cases}$$

(ii) 当 $r\geqslant 2$ 时,注意到式(13)可以推出 $E|X|^{2}<\infty$,取 p 足够大,使得 $r-2-p(1+\beta)<-1$, $r-2-p/2<-1$,可以得到

$$K_{22}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{2}\Big)^{p/2}\approx$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}n^{-2(1+\beta)}i^{2\beta}\Big)^{p/2}\leqslant$$

$$\begin{cases} C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-(1+\beta)p}, & -1<\beta<-1/2; \\ C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-(1+\beta)p}(\log n)^{p/2}, & \beta=-1/2; \\ C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-p/2}, & \beta>-1/2. \end{cases}$$

最后证明 $L_2<\infty$. 由引理 1.1 知 $\{a_{ni}Z_{ni}-Ea_{ni}Z_{ni}, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 仍是 END 随机变量序列. 由引理 1.4 和 1.5 可得

$$L_2 \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}Z_{ni}|^q \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=1}^{n} P(|a_{ni}X|>1)+ C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^q I(|a_{ni}X|\geqslant 1) \overset{\Delta}{=} H_1+H_2.$$

由 $K_{11}<\infty$ 可知 $H_1<\infty$. 接下来证明 $H_2<\infty$. 因为 $a_{ni}\approx(i/n)^{\beta}(1/n)$, 由引理 1.2, $1\leqslant q<(r\wedge 2)$ 以及式(13)得

$$H_2 \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=1}^{n} n^{-q(1+\beta)} i^{q\beta} \cdot E|X|^q I(|X|>Cn^{1+\beta}i^{-\beta}) \approx C\int_1^{\infty} x^{r-2}\int_1^{x} x^{-q(1+\beta)} y^{q\beta}\cdot E|X^q|I(|X|>Cx^{1+\beta}y^{-\beta})\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant C\int_1^{\infty}\mathrm{d}u\int_1^{u} u^{(r-2-\beta)/(1+\beta)-q} v^{\beta(r-1)/(1+\beta)}\cdot E|X|^q I(|X|>Cu)\mathrm{d}v \approx$$

(令 $u=x^{1+\beta}y^{-\beta}, v=y$)

$$\begin{cases} C\int_1^{\infty} u^{(r-1)/(1+\beta)-1-q} E|X|^q I(|X|>Cu)\mathrm{d}u, & -1<\beta<-1/r; \\ C\int_1^{\infty} u^{r-1-q}\log u E|X|^q I(|X|>Cu)\mathrm{d}u, & \beta=-1/r; \\ C\int_1^{\infty} u^{r-1-q} E|X|^q I(|X|>Cu)\mathrm{d}u, & \beta>-1/r. \end{cases} \leqslant$$

$$\begin{cases} CE|X|^{(r-1)/(1+\beta)}<\infty, & -1<\beta<-1/r; \\ CE|X|^r\log(1+|X|)<\infty, & \beta=-1/r; \\ CE|X|^r<\infty, & \beta>-1/r. \end{cases}$$

这样就证明了 $L_2<\infty$, 从而式(14)得证.

下证式(15). 易见对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i\right|-\varepsilon\right)_+^q = \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\int_0^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i\right|>t^{1/q}+\varepsilon\right)\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\int_0^{\varepsilon^q} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i\right|>2\varepsilon\right)\mathrm{d}t = \varepsilon^q\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i\right|>2\varepsilon\right).$$

从而由式(14)知, 式(15)成立. 定理证毕.

定理 2.2　设 $\beta>-1$, $r>1$, $1\leqslant q<(r\wedge 2)$, $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是一均值为 0 的 END 随机变量序列, 且被随机变量 X 随机控制. 设 $\{a_{ni}\approx(\frac{n-i}{n})^{\beta}(\frac{1}{n}), 0\leqslant i\leqslant n-1, n\geqslant 1\}$ 是一个三角阵列. 如果式(13) 成立, 则对于任意的 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}E\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_{ni}X_i\right|-\varepsilon\right)_+^q<\infty \tag{20}$$

从而,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}P\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_{ni}X_i\right|>\varepsilon\right)<\infty \tag{21}$$

证明　与定理 2.1 的证明过程相似, 由 C_r 不等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}E\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_{ni}X_i\right|-\varepsilon\right)_+^q \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}E\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_{ni}(Y_{ni}-EY_{ni})\right|-\varepsilon\right)_+^q + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}E\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_{ni}(Z_{ni}-EZ_{ni})\right|\right)^q \overset{\Delta}{=} L_1+L_2.$$

由引理 1.5、Markov 不等式、Jensen 不等式以及 $q<2<p$ 得

$$L_1 \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=0}^{n-1} E|a_{ni}Y_{ni}|^p + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} E|a_{ni}Y_{ni}|^2\right)^{p/2} \overset{\Delta}{=} K_1+K_2.$$

显然, 由 Y_{ni} 的定义和引理 1.4 得

$$K_1 \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=0}^{n-1} P(|a_{ni}X|>1)+ C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=0}^{n-1} E|a_{ni}X|^p I(|a_{ni}X|\leqslant 1) \overset{\Delta}{=} K_{11}+K_{12}.$$

根据引理 1.2 得

$$K_{11} \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=0}^{n-1} P(|X|>Cn^{1+\beta}(n-i)^{-\beta}) \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{k=1}^{n} P(|X|>Cn^{1+\beta}k^{-\beta}) \approx C\int_1^{\infty} x^{r-2}\int_1^{x} P(|X|>Cx^{1+\beta}y^{-\beta})\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant$$

$$C\int_1^{\infty}\mathrm{d}u\int_1^{u}u^{(r-2-\beta)/(1+\beta)}v^{\beta(r-1)/(1+\beta)}P(|X|>Cu)\mathrm{d}v\approx$$

$$(\text{令 } u=x^{1+\beta}y^{-\beta}, v=y)$$

$$\begin{cases} C\int_1^{\infty}u^{(r-1)/(1+\beta)-1}P(|X|>Cu)\mathrm{d}u, \\ \quad -1<\beta<-1/r; \\ C\int_1^{\infty}u^{r-1}\log u P(|X|>Cu)\mathrm{d}u, \\ \quad \beta=-1/r; \\ C\int_1^{\infty}u^{r-1}P(|X|>Cu)\mathrm{d}u, \\ \quad \beta>-1/r \end{cases}\approx$$

$$\begin{cases} CE|X|^{(r-1)/(1+\beta)}<\infty, -1<\beta<-1/r; \\ CE|X|^{r}\log(1+|X|)<\infty, \beta=-1/r; \\ CE|X|^{r}<\infty, \beta>-1/r. \end{cases}$$

剩下的证明与定理 2.1 的过程类似,具体细节略. 证毕.

参考文献(References)

[1] ALAM K, SAXENA K M L. Positive dependence in multivariate distributions [J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 1981, 10: 1183-1196.

[2] JOAG-DEV K, PROSCHAN F. Negative association of random variables with applications[J]. The Annals of Statistics, 1983, 11: 286-295.

[3] LIU L. Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails[J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79: 1290-1298.

[4] HU T Z. Negatively superadditive dependence of random variables with applications[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2000, 16: 133-144.

[5] LIU L. Necessary and sufficient conditions for moderate deviations of dependent random variables with heavy tails[J]. Science China Mathematics, 2010, 53(6): 1421-1434.

[6] SHEN A T. Probability inequalities for END sequence and their applications[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2011, 2011: 98.

[7] WU Y F, GUAN M. Convergence properties of the partial sums for sequences of END random variables [J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2012, 49(6): 1097-1110.

[8] QIU D H, CHEN P Y, ANTONINI R G, et al. On the complete convergence for arrays of rowwise extended negatively dependent random variables[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2013, 50(2): 379-392.

[9] WANG X J, HU S H, HU T C. Complete convergence for weighted sums and arrays of rowwise END sequences[J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 2013, 42: 2391-2401.

[10] WANG S J, WANG X J. Precise large deviations for random sums of END real-valued random variables with consistent variation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 402: 660-667.

[11] WANG X J, ZHENG L L, XU C, et al. Complete consistency for the estimator of nonparametric regression models based on extended negatively dependent errors[J]. Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics, 2015, 49(2): 396-407.

[12] SHEN A T. Complete convergence for weighted sums of END random variables and its application to nonparametric regression models [J]. Journal of Nonparametric Statistics, 2016, 28(4): 702-715.

[13] SHEN A T, VOLODIN A. Weak and strong laws of large numbers for arrays of rowwise END random variables and their applications[J]. Metrika, 2017, 80: 605-625.

[14] SHEN A T, YAO M, XIAO B Q. Equivalent conditions of complete convergence and complete moment convergence for END random variables [J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2018, 39(1): 83-96.

[15] WU Y F, CABREA M O, VOLODIN A. Complete convergence and complete moment convergence for arrays of rowwise END random variables[J]. Glasnik Matematicki, 2014, 49(2): 449-468.

[16] YANG W Z, XU H Y, CHEN L, et al. Complete consistency of estimators for regression models based on extended negatively dependent errors[J]. Statistical Papers, 2018, 59(2): 449-465.

[17] HSU P L, ROBBINS H. Complete convergence and law of large numbers [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1947, 33(2): 25-31.

[18] LI D L, RAO M B, JIANG T F, et al. Complete convergence and almost sure convergence of weighted sums of random variables[J]. Journal of Theoretical Probability, 1995, 8: 49-76.

[19] LIANG H Y. Complete convergence for weighted sums of negatively associated random variables[J]. Statistics and Probability Letters, 2000, 48: 317-325.

[20] CHEN P Y, SUNG S H. On complete convergence and complete moment convergence for weighted sums of ρ^*-mixing random variables[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 2018: 121.

[21] CHOW Y S. On the rate of moment convergence of sample sums and extremes[J]. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 1988, 16: 177-201.

[22] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京:科学出版社, 2006.