第50卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol. 50, No. 2
2020年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2020

文章编号:0253-2778(2020)02-0146-10

Knight 不确定下单边有限承诺连续时间契约问题

费为银,杨珊珊,梁 勇

(安徽工程大学数理学院,安徽芜湖 241000)

摘要:研究了在 Knight 不确定下单边有限承诺的最优契约设计问题.首先,基于 Knight 不确定代理人的禀赋和委托人返还给代理人的消费,在代理人消费预期效用(代理人延续价值)不低于代理人外部期权价值(保持代理人参与约束)下,设计委托人预期收益最大化的代理人单边有限承诺最优契约.利用非线性期望下的动态规划原理得到委托人最大预期效用值函数所满足的 HJB 方程.其次,在非线性期望下,建立了委托人价值函数的弱和强对偶定理,并获得了最优契约的判定定理.最后,针对一个消费问题的例子,对所得最优策略进行了数值模拟和经济学分析.

关键词:Knight 不确定;次线性期望;连续时间契约;单边有限承诺;HJB 方程

中图分类号:O211.6;F062.5 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2020.02.010

2010 Mathematics Subject Classification:Primary 60H30; Secondary 91B40

引用格式:费为银,杨珊珊,梁勇. Knight 不确定下单边有限承诺连续时间契约问题[J]. 中国科学技术大学学报,2020,50(2):146-155.

FEI Weiyin, YANG Shanshan, LIANG Yong. Continuous-time contracting problems with one-sided limited commitment under Knightian uncertainty[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020,50(2):146-155.

Continuous-time contracting problems with one-sided limited commitment under Knightian uncertainty

FEI Weiyin, YANG Shanshan, LIANG Yong

(*School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu* 241000, *China*)

Abstract: The optimal contract design problem with one-sided limited commitment under Knightian uncertainty was studied. First, based on the agent's endowment process and the consumption returned by the principal under Knightian uncertainty, the contract model was established with the agent's one-side limited commitment which characterizes the maximization of the principal expected profit under the agent's expected utility (the agent's continuation value) being not lower than the agent's outside option value (keeping the participation constraint). By using the dynamic programming principle under Peng's sublinear expectation theory, the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation of the principal's value function on her maximal expected utility was derived. Next, using the sublinear theory, the weak and strong dual theorems and the verification theorem of optimal strategy were obtained. Finally, for an example of consumption, the numerical simulation for results and the corresponding economic analysis were provided.

收稿日期:2018-06-09;**修回日期**:2018-10-25

基金项目:国家自然科学基金(71571001)资助.

作者简介:费为银(通讯作者),男,1963 年生,博士/教授.研究方向:金融数学与金融工程,随机分析与随机控制. E-mail:wyfei@ahpu.edu.cn.

Key words：Knightian uncertainty；sublinear expectation；continuous-time contracts；one-sided limited commitment；HJB equation

0 引言

契约理论是 20 世纪 30 年代至今的一种主流企业理论. Coase[1] 于 1937 年开启了契约理论研究的先河. 之后人们对契约理论的研究按两个方向发展，其中一个方向就是委托-代理理论.

许多实证研究发现，完全风险分摊的假设往往并非成立. 例如 Cochrane[2] 在研究消费者是否能有效地避免个人收入或财富的特殊冲击时，发现长期患病和非自愿的失业保险会被保险公司拒绝，这部分人群无法实现完全风险分摊. Townsend[3] 研究了印度南部半干旱热带地区三个贫穷的高危村庄，使用数据进行了完整的保险模型的测试，结果表明在三个村庄中，没有土地的人被保险的程度不如有土地的人. 这说明在市场中，由于外生市场的不完整性，有许多其他未被考虑到的因素在起作用，影响着委托人和代理人之间的风险分摊.

一个重要的来协调上述经验证据的方法是假设每个人都有有限的承诺，以此来取代外生市场不完整性. 这种假设的动机是，债务偿还的执行成本很高，债务的收集、诉讼都是昂贵的，债务人可能会拖欠债务. 在这种情况下，个人的收入风险不会被完全分摊. Alvarez 和 Jermann[4] 提出了一个均衡的概念，假定市场存在内在的偿付能力约束，这些偿付能力的约束阻止了违约，降低了风险分担的成本. Ligon 等[5] 提供了一个动态模型，完全描述了由有限承诺约束的有效非正式保险安排，同时使用来自三个印度村庄的数据来测试模型，发现模型可以充分解释消费对收入的动态响应. 这些学者的研究表明“有限承诺”假设的提出有效地解决了外生市场不完整对于模型的影响，使得模型更加完善.

解决动态契约模型的一般方法是使用动态规划，并将代理人的承诺延续值作为状态变量. 这种方法是由 Thomas 和 Worrall[6] 在 1988 年提出. Sannikov[7] 扩展了这种方法，用以研究连续时间情形下隐藏行为或隐藏信息下的委托-代理问题. Miao 和 Rivera[8] 在 Sannikov[7] 的研究框架中引入了稳健性和重新谈判的能力. Grochulski 和 Zhang[9] 运用这种方法研究一个连续时间单边承诺情况下的消费保险问题，当委托人和代理人具有同等的耐心时，他们提供了一个显式的解决方案. 动态规划的方法逐渐趋于成熟，并在契约理论的研究中使用越来越频繁.

连续时间契约模型在经济和金融领域备受青睐. Williams[10] 研究了动态环境中代理人具有持久私有信息最优契约的设计问题，特别关注了一个连续时间的标准保险问题，在这个问题中，风险厌恶的代理人愿意从风险中性的贷款人那里借钱来稳定他的收入流（收入流是对借款人的私人信息，并且是连续的），展示了连续性如何改变契约的性质，并考虑了一个可以用显示解求解的指数效用例子. Zhang[11] 提供了一个解决方案，以解决当风险厌恶的代理人面临一个随机收入流，不能承诺长期合同关系的风险中性委托人时的长期契约问题. 这些学者完善了连续时间契约问题的研究.

在前人研究的基础之上，Miao 和 Zhang[12] 研究了连续时间情形下的单边和双边有限承诺的契约问题. 从代理人的视角，她为委托人的项目提供利润（禀赋）或收入，并从委托人那里获得消费（工资），代理人的延续价值由其预期消费效用刻画，并且代理人有外部价值（即一旦延续价值小于外部期权价值，她就放弃签约）；从委托人的视角，在有承诺约束条件下，他提供给代理人的消费支出要实现其累计预期净利润最大化. 基于上述背景，文献[12]研究了最优契约设计问题，提出了一种对偶方法，通过建立弱和强的对偶定理，得到了契约模型的 HJB 方程及其对应的解析解，列举了两个消费保险的案例，并进行了数值模拟；通过与离散时间模型的比较研究，发现在双边有限承诺下，无论是无风险分摊还是完全风险分摊，都无法实现预期效用最大化，无法得到最优契约.

另一方面，Knight 明确指出，在经济行为中概率统计模型本身的不确定性是本质的，不能消除掉的. 通常称这种概率本身的不确定性为 Knight 不确定性. 事实上，不仅在经济和金融领域，现实世界中绝大多数的决策环境都具有程度不同的 Knight 不确定性.

随着人们对 Knight 不确定性研究的深入，对于 Knight 不确定性的刻画和描述越来越成熟，并逐渐形成了系统的理论. Choquet[13] 将 Lebesgue 积分的

概念推广应用于非可加测度，获得了一个很重要的非线性期望—Choquet 期望. Ellsberg[14] 设计的系统而精致的经济学实验直接指出，实际上人们在做决策时会对 Knight 不确定性有非常显著的厌恶，从而进一步揭示了以非线性来代替线性期望效用公理化体系的必要性. Schmeidler[15] 提出了非线性的 Choquet 期望效用. Chen 和 Epstein[16] 用一种特殊的次线性的生成函数 g 构成的 g 期望，很好地刻画了消费者 Knight 不确定性厌恶.

关于 Knight 不确定性下的金融和经济问题，已经有诸多学者在各方面开展了研究. 韩立岩和周娟[17]研究了 Knight 不确定环境下期权定价模型，用 λ 模糊测度和 Choquet 积分求解欧式无红利期权的价格. 费为银和李淑娟[18]研究了投资者在 Knight 不确定下带有通胀的最优消费和投资决策问题.

费为银等[19]研究了 Knight 不确定下带通胀的跨国直接投资问题. 彭实戈[20]给出非线性期望空间的基本定义，并说明这个新框架可以广泛地用来分析和计算现实世界数据背后隐藏的概率和统计分布的不确定性. Fei 和 Fei[21] 建立了 G 框架下一个随机控制问题的最优性原理，通过推导判定定理，研究了一种具有波动性模糊的最优消费和投资组合决策，然后明确地得到了两个基金分离定理，并给出了一个示例.

考虑到外生市场、契约双方的风险不确定，本文研究了连续时间情形下的单边有限承诺契约问题，将 Knight 不确定考虑到契约模型之中，使得模型更加贴近于现实的经济金融市场；同时通过对偶方法及弱与强的对偶定理来求解在 Knight 不确定环境委托人值函数的 HJB 方程；然后，提出一个消费问题的例子，对所得结果进行数值模拟和经济学分析.

论文安排如下，节 1 和节 2 构建模型的框架，建立 G-HJB 方程，并利用对偶方法求得 G-HJB 方程的解析解，节 3 提出了一个实例，节 4 进行数值分析并给出经济学解释，节 5 为本文结论.

1 基本框架与模型建立

考虑一个连续时间有限承诺的规范契约模型. 在一个次线性期望空间$(\Omega,\mathscr{H},\{\mathscr{H}_t\}_{t\geqslant 0},\hat{E})$上定义一个一维 G 布朗运动 $B_t\sim N(0,[\underline{\sigma}^2,\bar{\sigma}^2]t)$，$0<\underline{\sigma}<\bar{\sigma}<\infty$. 信息流$\{\mathscr{H}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是由 G 布朗运动生成的，$\mathscr{H}_0$ 是平凡的，非线性期望及有关的概念参见文献[20]. 本文以下所有过程都定义在上述次线性期望空间上. 为了便于说明，本文将契约双方作为委托人(principal) 和代理人(agent). 委托人是风险中性且模糊厌恶(ambiguity aversion)的，以 $r>0$ 的利率贴现未来现金流. 代理人是风险厌恶且模糊厌恶的，并且代理人的禀赋(委托人项目收入过程)$Y=\{Y_t\}_{t\geqslant 0}$满足随机微分方程：

$$\mathrm{d}Y_t=\mu(Y_t)\mathrm{d}t+\sigma(Y_t)\mathrm{d}B_t,Y_0=y,$$

其中代理人的努力水平 $\mu:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，收入过程的波动率 $\sigma:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$.

假设 1.1 (i) 对于每一个 y，都有唯一的伊藤过程$\{Y_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足上面的随机微分方程.

(ii) 对于 $r>0$，期望 $\hat{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}Y_t\mathrm{d}t\right]$ 是有限的.

消费计划 $C=\{C_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个非负的过程，因此其现值是有限的，即

$$\hat{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}C_t\,\mathrm{d}t\right]<\infty \tag{1}$$

模糊厌恶的代理人从消费计划 C 中获得稳健(robust)效用：

$$U_0^a(C)\equiv-\hat{E}\left[-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}u(C_t)\,\mathrm{d}t\right],$$

其中，$\rho>0$ 是主观折现率，$u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$. 代理人的延续效用在时间 t 时为

$$U_t^a(C)\equiv-\hat{E}_t\left[-\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\rho(s-t)}u(C_s)\mathrm{d}s\right],$$

这里$-\hat{E}_t[-\cdot]=-\hat{E}[-\cdot|\mathscr{H}_t]$为条件期望. 假定效用函数 u 满足：

假设 1.2 $u'>0,u''<0,\lim\limits_{c\downarrow 0}u'(c)=\infty$，并且 $\lim\limits_{c\uparrow\infty}u'(c)=0$.

上述假设表明，存在一个严格递减和连续可微的反函数 $I:\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}_{++}$，对于 $x>0$，$I(x)=(u')^{-1}(x)$，其中$\mathbb{R}_{++}:=\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$. 定义 $I(0)=\lim\limits_{x\downarrow 0}I(x)=\infty$和 $I(\infty)=\lim\limits_{x\uparrow\infty}I(x)=0$.

设代理人无法进入金融市场，为了保证自己不受收入风险的影响，她与模糊厌恶委托人签订了一份契约. 代理人将她的禀赋 Y 给委托人，委托人将返还消费 C 给代理人. 委托人可以自由进入金融市场并获得效用

$$U^P(y,C)\equiv-\hat{E}\left[-\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}(Y_t-C_t)\mathrm{d}t\right)\right].$$

注意，本文允许 $\rho\neq r$，因为当本文把委托人解释为金融中介时，它的贴现率 r 是利率. 在一般均衡模型中，由内生决定的利率通常低于代理人的主观

贴现率 ρ.

模型的关键假设是代理人的承诺有限.代理人可以在契约签订后的任何时间违约,并且可以获得一个外部价值.假设外部价值在 t 时刻由 $U_d(Y_t)$ 给出,其中 $U_d:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是一个可测函数.她的外部价值等于自有价值,所以

$$U_d(Y_t)=-\hat{E}\left[-\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\rho(s-t)}u(Y_s)\mathrm{d}s\right].$$

为了确保代理人不会违约,强加以下参与约束:

$$U_t^a(C)\geqslant U_d(Y_t),\ \forall\, t\geqslant 0 \tag{2}$$

此外,本文还提出以下的初始个人理性约束或保持承诺约束:

$$U_0^a(C)=w \tag{3}$$

式中,w 是对代理人的初始承诺值.如果消费计划满足式(2)和式(3),则称之为可行消费计划.令 $\Gamma(y,w)$表示所有的可行消费计划的集合.根据式(2),本文必须在整个分析过程中假定 $w\geqslant U_d(Y_0)$.

本文现在可以将单边有限承诺问题描述如下.

问题 1.1(原问题)　委托人的值函数

$$V(y,w)=\sup_{C\in\Gamma(y,w)}U^p(y,C) \tag{4}$$

解决这个原问题的标准方法是应用动态规划原理,并将代理人的延续价值作为一个状态变量.令 $W_t=U_t^a(C)$ 表示这个状态变量.设存在一个 $\{\sigma_t^W\}_{t\geqslant 0}$ 使得$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足下面的随机微分方程:

$$\mathrm{d}W_t=(\rho W_t-u(C_t))\mathrm{d}t+\sigma_t^W\mathrm{d}B_t \tag{5}$$

这里,代理人延续价值服从式(5)和参与约束 $W_t\geqslant U_d(Y_t)$.

根据文献[21],委托人的值函数 V 满足下面 G-HJB 方程:

$$\begin{aligned}rV(Y_t,W_t)=\sup_{C_t,\sigma_t^W}[&Y_t-C_t+V_y(Y_t,W_t)\mu(Y_t)+\\&\sigma^2(Y_t)\widetilde{G}(V_{yy}(Y_t,W_t))+\\&V_w(Y_t,W_t)(\rho W_t-u(C_t))+\\&(\sigma_t^W)^2\widetilde{G}(V_{ww}(Y_t,W_t))+\\&2\widetilde{G}(V_{yw}(Y_t,W_t))\sigma_t^W\sigma(Y_t)],\end{aligned}$$

其中,$\widetilde{G}(a)=\dfrac{1}{2}(a^+\underline{\sigma}^2-a^-\overline{\sigma}^2)$,而且

$$2\widetilde{G}(V_{yw}(Y_t,W_t))=\begin{cases}V_{yw}\overline{\sigma}^2,V_{yw}<0;\\V_{yw}\underline{\sigma}^2,V_{yw}\geqslant 0.\end{cases}$$

对上述 G-HJB 方程右式分别优化 C_t 和 σ_t^W 后,G-HJB 方程就归结到非线性偏微分方程(PDE).因为存在参与约束,G-HJB 方程很难求得解析解,一般用数值方法求解.

2　模型求解

在用有限的承诺解决问题之前,提出一个解决问题的最优准则.现作出如下假设:

假设 2.1　积分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}u(I(\mathrm{e}^{(\rho-r)t}))\mathrm{d}t$ 是有限的.初始承诺值 w 满足

$$\begin{aligned}&\lim_{\phi\downarrow 0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}u(I(\mathrm{e}^{(\rho-r)t}/\phi))\mathrm{d}t=\\&\frac{u(0)}{\rho}<w<\frac{u(\infty)}{\rho}=\\&\lim_{\phi\uparrow\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}u(I(\mathrm{e}^{(\rho-r)t}/\phi))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

结合假设 2.1 和假设 1.2,那么存在唯一的与保持承诺约束(3)最优消费有关的拉格朗日乘子 $\phi^*>0$,使得对所有的 $t\geqslant 0$,最优消费由 $C_t^*=I(\mathrm{e}^{(\rho-r)t}/\phi^*)$ 确定.

例如,如果 $u(c)=c^\alpha/\alpha,0\neq\alpha<1$,那么

$$C_t^*=\phi^{*\frac{1}{1-\alpha}}\mathrm{e}^{\frac{r-\rho}{1-\alpha}t},$$

其中,$\phi^*=\left[\dfrac{\alpha\, w(\rho-\alpha\, r)}{1-\alpha}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$.

假设 2.1 成立当且仅当 $\rho>\alpha r$ 和 $\alpha w>0$.在最优的情况下,模糊厌恶委托人承担所有的不确定性,并完全为模糊厌恶代理人保险.特别地,如果 $\rho=r$,那么代理人的最优消费计划是确定的.如果 $r>(<)\rho$,那么代理人比委托人有更多(更少)的耐心,所以代理人的最优消费随时间而增加(减少).

首先,写出连续时间的拉格朗日函数

$$\begin{aligned}L=-\hat{E}[-(&\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}(Y_t-C_t)\mathrm{d}t+\\&\phi(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}u(C_t)\mathrm{d}t-w)+\\&\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\lambda_t(\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\rho(s-t)}u(C_s)\mathrm{d}s-U_d(Y_t))\mathrm{d}t)],\end{aligned}$$

其中,$\mathrm{e}^{-rt}\lambda_t\geqslant 0$ 是在任意 $t\geqslant 0$ 时刻与参与约束(2)相关的拉格朗日乘子,$\phi>0$ 是与保持承诺约束(3)相关的拉格朗日乘子.由于提高代理人的承诺约束值会增加代理人消费和减少委托人的价值,所以必须 $\phi>0$.用分部积分法,可以计算得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\lambda_t\left(\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\rho(s-t)}u(C_s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\\&\int_0^\infty\left(\int_0^t \mathrm{e}^{(\rho-r)s}\lambda_s\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\rho t}u(C_t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

将这个方程带入拉格朗日函数,有

$$L=-\hat{E}[-(\int_0^\infty e^{-rt}(Y_t-C_t)dt+(\int_0^\infty e^{-rt}\lambda_t U_d(Y_t)dt)-\int_0^\infty(\int_0^t e^{(\rho-r)s}\lambda_s ds+\phi)e^{-\rho t}u(C_t)dt)]-\phi w.$$

现定义共态(costate)过程 X 为拉格朗日乘数的累积量，

$$X_t=\int_0^t e^{(\rho-r)s}\lambda_s ds+\phi, t\geqslant 0.$$

这个过程是连续递增的，并且满足

$$dX_t=e^{(\rho-r)t}\lambda_t dt.$$

运用这个过程，拉格朗日函数变为

$$L=-\hat{E}[-(\int_0^\infty e^{-rt}Y_t dt-\int_0^\infty e^{-\rho t}U_d(Y_t)dX_t+\int_0^\infty e^{-rt}(X_t e^{-(\rho-r)t}u(C_t)-C_t)dt)]-X_0 w \tag{6}$$

为了得到对偶问题，首先选择消费来最大化 L. 定义效用函数 u 的对偶函数 $\tilde{u}$ 为

$$\tilde{u}(z)=\max_{c>0}\{zu(c)-c\}, z>0.$$

因为 u 是严格凹的，所以解为 $c^*=I(1/z)$. 其中 $I(1/z)$ 在 z 上是严格递增的，$\tilde{u}(z)$ 在 z 上是严格凸的. 对式(6)关于 C_t 最大化得到

$$\tilde{\mathscr{L}}(X)=-\hat{E}[-(\int_0^\infty e^{-rt}(Y_t+\tilde{u}(X_t e^{-(\rho-r)t}))dt-\int_0^\infty e^{-\rho t}U_d(Y_t)dX_t)]-X_0 w.$$

然后，选择过程 X 来最小化 $\tilde{\mathscr{L}}(X)$.

问题 2.1(对偶问题)

$$\inf_{X\in\mathscr{I}}\tilde{\mathscr{L}}(X) \tag{7}$$

式中，$\mathscr{I}$ 是所有从正初值开始左极右连递增过程 X 的集合，并且

$$\hat{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\mid U_d(Y_t)\mid dX_t\right]<\infty \tag{8}$$

$$\hat{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\mid\tilde{u}(X_t e^{-(\rho-r)t})\mid dX_t\right]<\infty \tag{9}$$

可积条件(8)和(9)确保了 $\tilde{\mathscr{L}}(X)$ 是有限的.

将问题 2.1 分成两个子问题. 定义

$$\mathscr{L}(y,x,X)=-\hat{E}[-(\int_0^\infty e^{-rt}(Y_t+\tilde{u}(X_t e^{-(\rho-r)t}))dt-\int_0^\infty e^{-\rho t}U_d(Y_t)dX_t)],$$

其中，期望的条件是 $X_0=x$ 和 $Y_0=y$. 定义对偶值函数为

$$\tilde{V}(y,x)\equiv\inf_{X\in\mathscr{I}(x)}\mathscr{L}(y,x,X), x>0 \tag{10}$$

于是对偶问题(7)转化为下列问题：

$$\inf_{x>0}(\tilde{V}(y,x)-xw) \tag{11}$$

容易得到性质：$\tilde{V}(y,x)$ 在 x 上是凸函数. 证明类似于文献[12]. 现在，研究原问题和对偶问题之间的关系.

定理 2.1(弱对偶性) 对于每一个可执行的消费计划 $C\in\Gamma(y,w)$，任意的 $x>0$ 和 $X\in\mathscr{L}(x)$，下列不等式成立：

$$U^P(y,C)\leqslant\mathscr{L}(y,x,X)-xw \tag{12}$$

式(12)等号成立当且仅当对于所有的 $t\geqslant 0$，有

$$X_t e^{(r-\rho)t}u'(C_t)-1=0 \tag{13}$$

$$\int_0^t e^{-\rho s}(U_s{}^a(C)-U_d(Y_s))dX_s=0 \tag{14}$$

这个定理表明了对偶问题里的目标函数 $\mathscr{L}(y,x,X)-xw$ 为原问题里的目标函数 $U^P(y,C)$ 提供了一个上界. 一个直接的推论是原问题的值函数弱于对偶问题的值函数：

$$V(y,w)\leqslant\inf_{x>0}(\tilde{V}(y,x)-xw) \tag{15}$$

这个结果称为弱对偶性.

式(13)和(14)给出式(12)中等号成立的条件，这个条件类似于离散时间模型中的库恩-塔克条件. 特别地，式(13)是消费的一阶条件，式(14)是连续时间情形下最优的互补松弛条件. 式(15)与 Skorokhod 问题有关，表明 X_t 只有在参与约束 $U_t^a(C)\geqslant U_d(Y_t)$ 生效时才递增.

下面的定理证明了对偶问题的解就是原问题的解，因此式(13)和式(15)的等号成立.

定理 2.2(强对偶性) 假设 $X^*\in\mathscr{I}$ 是对偶问题(7)的解. 令 $C_t^*\equiv I(e^{(\rho-r)t}/X_t^*)$，$t>0$. 如果 C^* 满足式(11)，并且存在 $\delta>0$ 对于 $X^\delta=X^*+\delta$ 和 $\overline{X}^{\pm\delta}=X^*(1\pm\delta)$ 满足式(9)，那么 C^* 就是原问题式(4)的解. 另外，

$$V(y,w)=\inf_{x>0}(\tilde{V}(y,x)-xw).$$

证明 首先，证明定义的 C^* 满足参与约束(2)和承诺约束(3). 定义当 $\varepsilon\in(0,\delta)$，$X^\varepsilon\equiv X^*+\varepsilon$. 对偶函数 $\tilde{u}(\cdot)$ 的凸性表明

$$e^{(r-\rho)t}u(C_t^*)\leqslant\frac{\tilde{u}(X_t^\varepsilon e^{(r-\rho)t})-\tilde{u}(X_t^* e^{(r-\rho)t})}{\varepsilon}\leqslant\frac{\tilde{u}(X_t^\delta e^{(r-\rho)t})-\tilde{u}(X_t^* e^{(r-\rho)t})}{\delta}.$$

由假设，有 $\hat{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\mid \tilde{u}(X_t^\delta e^{(r-\rho)t}\mid dt)\right]<\infty$. 进而，

$$\hat{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\mid u(C_t^*)\mid dt\right]\leqslant$$
$$\hat{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\frac{\mid X_t^* e^{(r-\rho)t}u(C_t^*)\mid}{X_0^*}dt\right]\leqslant$$
$$\hat{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{\mid X_t^* e^{(r-\rho)t}\mid+C_t^*}{X_0^*}dt\right]<\infty.$$

所以 $\hat{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\mid \tilde{u}(X_t^\varepsilon e^{(r-\rho)t}\mid dt)\right]<\infty$. 因此，有 $X^\varepsilon\in\mathscr{I}(X^*+\varepsilon)$ 和 $\widetilde{\mathscr{L}}(X^\varepsilon)\geqslant\widetilde{\mathscr{L}}(X^*)$. 这意味着

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\widetilde{\mathscr{L}}(X^\varepsilon)-\widetilde{\mathscr{L}}(X^*)}{\varepsilon}\geqslant 0,$$

等价的有

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}-\hat{E}\left[-\int_0^\infty e^{-rt}\frac{\tilde{u}(X_t^\varepsilon e^{(r-\rho)t})-\tilde{u}(X_t^* e^{(r-\rho)t})}{\varepsilon}dt\right]-w\geqslant 0.$$

容易知道，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}-\hat{E}\left[-\int_0^\infty e^{-rt}\frac{\tilde{u}(X_t^\varepsilon e^{(r-\rho)t})-\tilde{u}(X_t^* e^{(r-\rho)t})}{\varepsilon}dt\right]=$$
$$-\hat{E}\left[-\int_0^\infty e^{-rt}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\tilde{u}(X_t^\varepsilon e^{(r-\rho)t})-\tilde{u}(X_t^* e^{(r-\rho)t})}{\varepsilon}dt\right]=-\hat{E}\left[-\int_0^\infty e^{-\rho t}u(C_t^*)dt\right].$$

于是

$$U_0^a(C^*)=-\hat{E}\left[-\int_0^\infty e^{-\rho t}u(C_t^* dt)\right]\geqslant w \quad (16)$$

对于 $\varepsilon>0, t>0$，其中 **1** 表示示性函数，定义 $X^\varepsilon(\omega,s)=X^*(\omega,s)+\varepsilon\mathbf{1}_{A\times[t,\infty)}(\Omega,s)$. 同理可得 $X^\varepsilon\in\mathscr{I}(X_0^*)$. 根据 $\widetilde{\mathscr{L}}(X^\varepsilon)\geqslant\widetilde{\mathscr{L}}(X^*)$，得到

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\widetilde{\mathscr{L}}(X^\varepsilon)-\widetilde{\mathscr{L}}(X^*)}{\varepsilon}\geqslant 0.$$

通过类似的论证，可得

$$-\hat{E}_t\left[-\int_t^\infty e^{-\rho(s-t)}u(C_s^*)ds\right]\geqslant U_d(Y_t).$$

上式乘以 $e^{-\rho t}$，且关于 X 积分并取下期望，可以得

$$-\hat{E}[-\int_0^\infty e^{-\rho t}U_t^a(C^*)dX_t]\geqslant$$
$$-\hat{E}[-\int_0^\infty e^{-\rho t}U_d(Y_t)dX_t] \quad (17)$$

其次，我们需要表明不等式(16)和(17)等号必然成立. 为此，在 $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ 上考虑 $\overline{X}^\varepsilon=X^*(1+\varepsilon)$. 对偶函数 $\tilde{u}(\cdot)$ 的凸性表明

$$\frac{\tilde{u}(\overline{X}_t^{-\delta}e^{(r-\rho)t})-\tilde{u}(X_t^* e^{(r-\rho)t})}{-\delta}\leqslant$$
$$\frac{\tilde{u}(\overline{X}_t^{\varepsilon}e^{(r-\rho)t})-\tilde{u}(X_t^* e^{(r-\rho)t})}{\varepsilon}\leqslant$$
$$\frac{\tilde{u}(\overline{X}_t^{\delta}e^{(r-\rho)t})-\tilde{u}(X_t^* e^{(r-\rho)t})}{\delta}.$$

这意味着 $\overline{X}^\varepsilon\in\mathscr{I}(X_0^*(1+\varepsilon))$. 根据 $\widetilde{\mathscr{L}}(\overline{X}^\varepsilon)\geqslant\widetilde{\mathscr{L}}(\overline{X}^*)$，可以得到

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\widetilde{\mathscr{L}}(\overline{X}^\varepsilon)-\widetilde{\mathscr{L}}(\overline{X}^*)}{\varepsilon}\geqslant 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\uparrow 0}\frac{\widetilde{\mathscr{L}}(\overline{X}^\varepsilon)-\widetilde{\mathscr{L}}(\overline{X}^*)}{\varepsilon}\leqslant 0.$$

于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\widetilde{\mathscr{L}}(\overline{X}^\varepsilon)-\widetilde{\mathscr{L}}(\overline{X}^*)}{\varepsilon}=-\hat{E}[-(\int_0^\infty e^{-\rho t}X_t^* u(C_t^*)dt-$$
$$\int_0^\infty e^{-\rho t}U_d(Y_t)dX_t^*))-X_0^* w$$

应该是非负的和非正的. 因此，

$$-\hat{E}[-(\int_0^\infty e^{-\rho t}X_t^* u(C_t^*)dt-$$
$$\int_0^\infty e^{-\rho t}U_d(Y_t)dX_t^*)]-X_0^* w=0.$$

注意到

$$-\hat{E}[-(\int_0^\infty e^{-\rho t}X_t^* u(C_t^*)dt-$$
$$\int_0^\infty e^{-\rho t}U_t^a(C^*)dX_t^*)]=X_0^* U_0^a(C^*),$$

于是可推得

$$X_0^*(U_0^a(C^*)-w)-$$
$$\hat{E}[-(\int_0^\infty e^{-\rho t}(U_t^a(C^*)-U_d(Y_t))dX_t^*)]=0.$$

因此，当 $X_0^*>0$ 时，不等式(16)和(17)等号必然成立.

最后，我们表明 C^* 在原问题中是最优消费. 事实上，由式(12)容易知道

$$U^P(y,C^*)\leqslant\sup_{C\in\Gamma(y,w)}U^P(y,C)\leqslant$$

$$\inf_{X\in\mathscr{I}(x),x>0}\mathscr{L}(y,x,X)-xw\leqslant$$
$$\mathscr{L}(y,x^*,X^*)-x^*w.$$

C^* 和 X^* 满足式(13)和(14)，根据定理 2.1，上式中的所有不等号都必须具有等式，因此 C^* 实际上是原问题的最优解. 另外，可知

$$V(y,w)=\inf_{x>0}\widetilde{V}(y,x)-xw.$$

定理证毕.

定理 2.2 表明，在解对偶问题后，原始问题的最优消费可以被函数 $I(e^{(\rho-r)t}/X_t^*)$ 完全刻画. 通过前面的分析，这个函数是随着 $e^{(r-\rho)t}/X_t^*$ 严格递增的. 由式(13)可知，$e^{(r-\rho)t}/X_t^*$ 是委托人和代理人的边际效用比值. 本文可以将 $e^{(r-\rho)t}/X_t^*$ 解释为委托人和代理人的"临时相对帕累托权重".

将委托人和代理人的边际效用比值作为状态变量. 这一比值相当于贴现率调整的协态变量 $Z_t\equiv e^{(r-\rho)t}/X_t^*$，其满足动力学方程

$$dZ_t=Z_t/X_t dX_t-(r-\rho)Z_t dt,X_0=Z_0=z>0 \tag{18}$$

根据式(18)，将式(10)重写为

$$J(y,z)\equiv\inf_{X\in\mathscr{I}(x)}-\widehat{E}[-(\int_0^\infty e^{-rt}(Y_t+\widetilde{u}(X_t e^{(r-\rho)t}))dt-\int_0^\infty e^{-\rho t}U_d(Y_t)dX_t)] \tag{19}$$

不难发现式(19)本质上是控制理论中一个奇异控制或瞬时控制问题，其中 X 是控制过程，Y 和 Z 是状态过程. 注意，J 和 $\widetilde{V}$ 的关系为

$$J(Y_0,Z_0)=\widetilde{V}(Y_0,X_0).$$

类似文献[21, Theorem 3.10]在 Knight 不确定环境下的 G-HJB 方程讨论，关于 J 的 HJB 方程表示成变分不等式的形式，有

$$\min\{y+\widetilde{\mu}(z)+\mathscr{A}J(y,z),J_z(y,z)-U_d(y)\}=0,(y,z)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_{++} \tag{20}$$

式中，

$$\mathscr{A}J(y,z)=(r-\rho)zJ_z(y,z)+J_y(y,z)\mu(y)+\sigma^2(y)\widetilde{G}(J_{yy}(y,z))-rJ(y,z).$$

变分不等式(20)把状态过程分成两个区域：

$$\Omega_1=\{(y,z)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_{++}:J_z(y,z)=U_d(y)\},$$
$$\Omega_2=\{(y,z)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_{++}:J_z(y,z)>U_d(y)\}.$$

由于 $J(y,z)$ 关于 z 是凸的，自由边界 $z=\varphi(y)$ 由

$$\varphi(y)=\inf\{z'>0:J_z(y,z')>U_d(y)\}$$

来定义，且自由边界分离了区域 Ω_1 和 Ω_2. 如果初始 $(Y_0,Z_0)\in\Omega_1$，那么 X 就会立刻上升，因此 Z 能到达自由边界. 另一方面，如果 $(y,z)\in\Omega_2$，那么

$$y+\widetilde{u}(z)+\mathscr{A}J(y,z)=0,$$

并且 X 必须保持恒定. 本文分别称 Ω_1 和 Ω_2 为跳区域和无跳区域. 如果 (Y_0,Z_0) 从无跳区域内部开始，那么 X 就会变成调节 Z 的过程，使得 (Y_t,Z_t) 保持在无跳区域内. X 在最优条件下的样本路径确保仅当 (Y_t,Z_t) 到达自由边界才是增加的，(Y_t,Z_t) 到达自由边界时参与约束生效.

运用动态规划原理[21]，可得下列判定定理.

定理 2.3(判定定理)　设 $J(y,z)$ 是式(20)一个二次连续可微的解，使得对于式(18)中任意的 Z 和 $X\in\mathscr{I}(x)$，

(i) 下列随机过程

$$\int_0^t e^{-rs}J_y(Y_s,Z_s)\sigma(Y_s)dB_s,t\geqslant 0 \tag{21}$$

是一个 G 鞅；

(ii)

$$\lim_{t\to\infty}\widehat{E}[e^{-rt}J(Y_t,Z_t)]=0 \tag{22}$$

进而假设 $Z_t^*\equiv e^{(r-\rho)t}/X_t^*$，其中 $X^*\in\mathscr{I}(x)$ 和 $(y,z)\in\Omega_2$，满足

(a) 对于所有的 $t\geqslant 0$，

$$Y_t+\widetilde{u}(Z_t^*)+\mathscr{A}J(Y_t,Z_t^*)=0 \tag{23}$$

(b) 对于所有的 $t\geqslant 0$，

$$\int_0^t e^{-\rho s}(J_z(Y_s,Z_s^*)-U_d(Y_s))dX_s^*=0 \tag{24}$$

那么 X^* 是问题(19)的最优解，并且 J 是对应的对偶值函数. 进一步假设在 Ω_2 内 $J(y,z)$ 在 Z 上是严格凸的，存在 $z^*>0$ 使得 $J_z(y,z^*)=w$，并且定理 2.2 条件成立. 那么 $X_0^*=z^*$ 是问题(11)的最优解，原问题的值函数为 $V(y,w)=J(y,z^*)-z^*w$. 最优消费计划、延续价值和边际效用比值分别为

$$\left.\begin{array}{l}C_t^*=I(1/Z_t^*),W_t^*=J_z(Y_t,Z_t^*),\\ Z_t^*=-V_w(Y_t,W_t^*)\end{array}\right\} \tag{25}$$

式(23)是一个线性的 PDE，求解非常简单. (21)是用鞅方法来验证 X^* 最优的技术条件. (22)是无限时域控制问题中的横截条件. (24)表明了当且仅当 $J_z(Y_t,Z_t^*)=U_d(Y_t)$ 时，X^* 是递增的. 联系到式(14)，(24)还可以被解释为参与约束的互补松弛条件.

式(25)表明，最优消费计划可以由 Z_t^* 完全刻画，根据包络定理，委托人和代理人的边际效用比值等于给定收入水平的帕累托边际的负斜率. 该式同时也表明代理人的延续价值等于对偶值函数对边际

效用比值 Z_t^* 的偏导数. 因此,最优消费计划可以表示委托人的收入水平 Y_t 和代理人的延续价值 W_t^* 的函数.

3　一个特殊情形

代理人在考虑参与约束(2)的情形下,又必须承担收入的不确定性,在下面的例子中,为了获得问题(23)的闭型解,假设代理人的禀赋 Y 遵循 G 布朗运动的随机微分方程

$$\mathrm{d}Y_t=\mu Y_t+\sigma Y_t\mathrm{d}B_t, Y_0=y>0,$$

其中,$\sigma>0$. 假定

$r>\mu+\underline{\sigma}^2\sigma^2/2, B_t\sim N(0,[\underline{\sigma}^2,\bar{\sigma}^2]t), 0<\underline{\sigma}<\bar{\sigma}$.

这个假设满足判定定理 2.2 中条件(21).

令 $u(c)=c^\alpha/\alpha, 0\neq\alpha<1$. 对数效用的情形下,$\alpha=0$. 假设 $\rho>\alpha r$, 那么最优分配存在. 假设代理人的外部价值是无风险分担的,即

$$U_d(y)=-\hat{E}\left[-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}u(Y_t)\mathrm{d}t \mid Y_0=y\right]=ky^\alpha,$$

其中,

$$k\equiv\frac{1}{\alpha(\rho-\alpha\mu-\alpha(\alpha-1)\sigma^2\underline{\sigma}^2/2)},$$

且 $\rho>\alpha\mu+\alpha(\alpha-1)\sigma^2\underline{\sigma}^2/2$ 来确保有限的风险厌恶值. 易知

$$\tilde{u}(z)=\frac{1-\alpha}{\alpha}z^{\frac{1}{1-\alpha}}, z>0,$$

且最优消费计划是 $c^*=z^{\frac{1}{1-\alpha}}$. 注意到 J 关于 y 是凸函数,在无跳区域内,式(23)变为

$$rJ(y,z)=y+\frac{1-\alpha}{\alpha}z^{\frac{1}{1-\alpha}}+(r-\rho)zJ_z(y,z)+J_y(y,z)\mu y+\frac{\sigma^2\underline{\sigma}^2}{2}y^2J_{yy}(y,z).$$

这是一个线性的 PDE. 给出两个自由边界条件,$J_z(y,z)=U_d(y)$ 和 $J_{zz}(y,z)=0$,得出通解

$$J(y,z)=\frac{y}{r-\mu}+\frac{(1-\alpha)^2}{(\rho-\alpha r)\alpha}z^{\frac{1}{1-\alpha}}+Az^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}y^\beta \tag{26}$$

其中,A 是一个待定常数,β 是下列特征方程的正根(可以表明 $\beta>1$):

$$r=(r-\rho)\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\mu\beta+\frac{\sigma^2\underline{\sigma}^2}{2}\beta(\beta-1).$$

我们须排除与负根相对应的特解,因为这个解使得在 $y\downarrow 0$ 时,$J(y,z)$ 收敛到无穷. 但是 $J(y,z)$ 应该收敛到有限的最优值,因为风险厌恶值非常小,所以当 $y\downarrow 0$ 时,参与约束将不起作用. 从式(26)和上述两个自由边界条件,可以推导出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1-\alpha}{(\rho-\alpha r)\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}+A\frac{1-\beta}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}}y^\beta=ky^\alpha,\\&\frac{1}{\rho-\alpha r}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}+A\frac{1-\beta}{1-\alpha}\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}-1}y^\beta=0\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

将第二个方程代入第一个方程,可以推导出自由边界 $z=by^{1-\alpha}$, 其中,

$$b=\left[\frac{\alpha(\rho-\alpha r)(\beta-\alpha)k}{\beta(1-\alpha)}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}>0.$$

将自由边界 $z=by^{1-\alpha}$ 带入上接触条件 $J_{zz}(y,z)=0$ 或者式(27),可以推出

$$A=-\frac{(1-\alpha)^2b^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}{(1-\beta)(\alpha-\beta)(\rho-\alpha r)}<0.$$

4　数值模拟与经济学解释

本节将节 3 的例子结果进行数值模拟分析. 固定模型中某些参数值,观察变动量对自由边界以及原问题中委托人效用所带来的影响程度. 现给定模型中参数值:$\mu=0.02, \sigma=0.1, \rho=0.04, r=0.04$ 和 $\alpha=-2$. 利用 MATLAB 软件,可以对式(26)进行数值模拟,结果如图 1～5 所示.

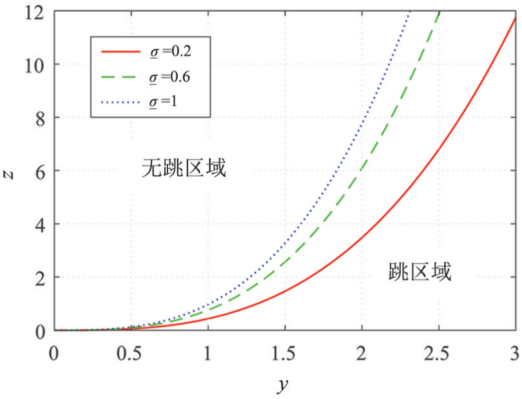

图 1　在三个不同的 $\underline{\sigma}$ 值下曲线 $z=\varphi(y)=by^{1-\alpha}$ 将状态空间划分成跳区域 Ω_1（曲线下方区域）和无跳区域 Ω_2（曲线上方区域）

Fig. 1　$z=\varphi(y)=by^{(1-\alpha)}$ under three different $\underline{\sigma}$, the state area divided into the jump area Ω^1 (below z) and the no jump area Ω^2 (above z)

在图 1 中,曲线 $z=by^{1-\alpha}$ 将状态空间划分成跳区域 Ω_1 和无跳区域 Ω_2. 当初始承诺值 $w\geqslant U_d(y)$ 时,初始状态 (y,z) 必须位于无跳区域,最优的 X^* 确保 (Y_t,Z_t^*) 不会离开无跳区域. 随着 Y 的增大,z 也会相应增大,从而确保 (Y_t,Z_t^*) 在无跳区域内. 随

着 Knight 不确定度 $\underline{\sigma}$ 的增大，$\varphi(y)$的趋势逐渐趋于平缓，自由边界线的位置越来越接近 $z=0$.

在图 2 中，标注的三个点是在 Knight 不确定度 $\underline{\sigma}=1$ 时，分别对应 $y=0.9,1.0,1.1$ 三条曲线上代理人禀赋在 $z=by^{1-\alpha}$ 下的对偶值函数 J 的值. 随着 z 的增大，对偶值函数 J 的值快速减小.

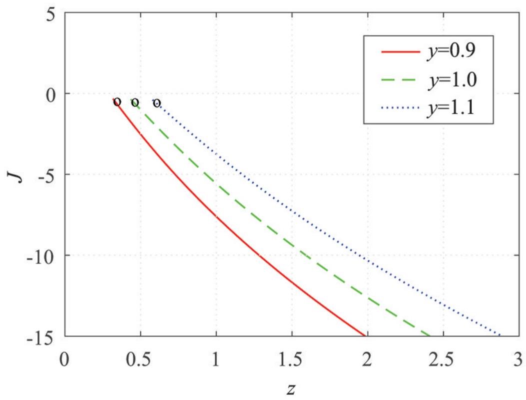

图 2　不同 y 值下 $J(y,z)$关于 z 变化的曲线图

Fig. 2　$J(y,z)$ with respect to z under different y

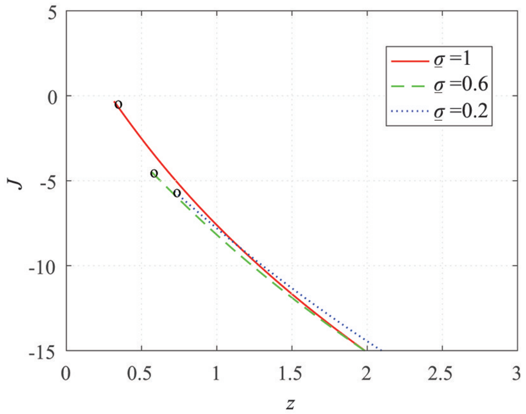

图 3　不同 $\underline{\sigma}$ 值下 $J(y,z)$关于 z 变化的曲线图

Fig. 3　$J(y,z)$ with respect to z under different $\underline{\sigma}$

在图 3 中，标注的三个点是在代理人禀赋 $y=0.9$ 时，分别对应 Knight 不确定度 $\underline{\sigma}=1,0.6,0.2$ 在 $z=by^{1-\alpha}$ 下的对偶值函数 $J(y,z)$ 的值. 对应不同 $\underline{\sigma}$的值，对偶值函数 $J(y,z)$的变化趋势并不会发生改变.

在图 4 中，标注的三个点是在 Knight 不确定度 $\underline{\sigma}=1$ 时，分别对应代理人禀赋 $y=0.9,1.0,1.1$ 时由 $w_{\min}(y)=J_z(y,by^{1-\alpha})=U_d(y)$确定的委托人给代理人初始的承诺值. 图中 $V(y,w)$关于 w 的曲线是凹的，而且是快速递减的. 当 w 很小的时候，委托人会获利，但是当 w 足够大时，由于提高代理人的初始承诺值会增加代理人消费和减少委托人的价值，委托人会亏损.

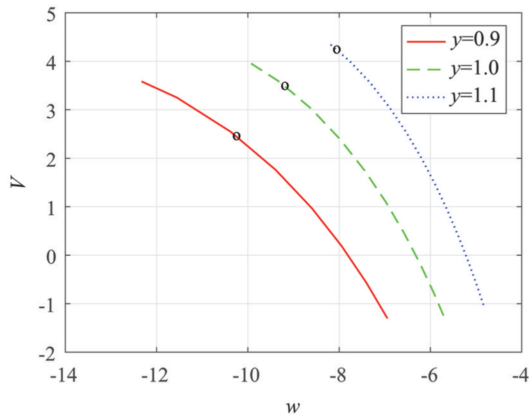

图 4　不同 y 值下 $V(y,w)$关于 w 变化的曲线图

Fig. 4　$V(y,w)$ with respect to w under different y

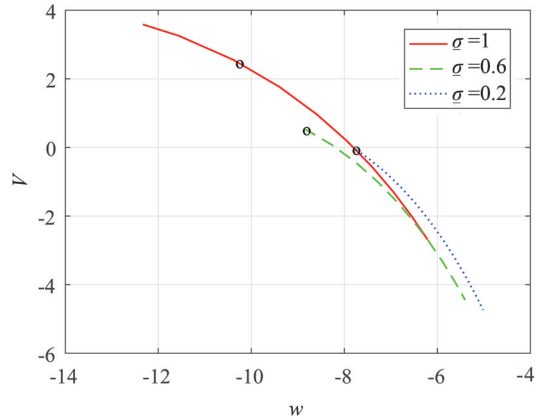

图 5　不同 $\underline{\sigma}$ 值下 $V(y,w)$关于 w 变化的曲线图

Fig. 5　$V(y,w)$ with respect to w under different $\underline{\sigma}$

在图 5 中，标注的三个点是在代理人禀赋 $y=0.9$ 时，分别对应 Knight 不确定度 $\underline{\sigma}=1,0.6,0.2$ 时代理人初始承诺值由 $w_{\min}(y)=J_z(y,by^{1-\alpha})=U_d(y)$确定的委托人最大预期效用 $V(y,w)$随 w 的变化趋势. 对应不同的 Knight 不确定度 $\underline{\sigma}$，值函数 $V(y,w)$ 的变化趋势并不会发生变化. 对应的三个不确定程度，在初始承诺较小或较大时，委托人效用承诺值都随着 Knight 不确定度 $\underline{\sigma}$ 的增大而增大.

5　结论

本文提出了一种对偶方法来解决 Knight 不确定情形下连续时间的最优契约设计问题. 以实现委托人效用最大化为目标设计契约，建立禀赋、消费以及效用的模型. 并应用弱和强对偶性定理，给出了对偶问题的动态规划描述，建立了 G-HJB 方程，并给出最优策略的刻画，在给定委托人对代理人的最优初始承诺值并且满足代理人参与约束条件下得到了

最优消费计划，进而实现最优契约设计. 本文还提供了一个消费问题例子的解决方案，并进行了数值分析，结论表明若代理人禀赋一定，当委托人对代理人初始承诺值很小的时候，委托人会获利，但是当委托人对代理人初始承诺值足够大时，由于提高代理人的初始承诺值会增加代理人消费和减少委托人的价值，委托人会亏损，并且 Knight 不确定性不会影响委托人效用的整体变化趋势. 本文是基于代理人单边有限承诺约束下的最优契约设计问题，而对于考虑委托人和代理人双边有限承诺约束，Knight 不确定下最优契约设计问题有待进一步研究.

参考文献(References)

[1] COASE R H. The nature of the firm[J]. Economica, 1937, 4(9): 386-405.

[2] COCHRANE J H. A simple test of full consumption insurance[J]. Journal of Political Economy, 1991, 99(2): 957-976.

[3] TOWNSEND R M. Risk and insurance in rural Philippines[J]. Econometrica, 1997, 65(1): 171-184.

[4] ALVAREZ F, JERMANN U J. Efficiency, equilibrium, and asset pricing with risk of default[J]. Econometrica, 2000, 68(4): 775-797.

[5] LIGON E, THOMAS J P, WORRALL T. Informal insurance arrangements with limited commitment: Theory and evidence from village economies[J]. Review of Economic Studies, 2002, 69(1): 209-244.

[6] THOMAS J, WORRALL T. Self-enforcing wage contracts[J]. Review of Economic Studies, 1988, 55(4): 541-554.

[7] SANNIKOV Y. A continuous-time version of the principal-agent problem [J]. Review of Economic Studies, 2010, 75(3): 957-984.

[8] MIAO J, RIVERA A. Robust contracts in continuous time[J]. Econometrica, 2016, 84(4): 1405-1440.

[9] GROCHULSKIY B, ZHANG Y. Optimal risk sharing and borrowing constraints in a continuous-time model with limited commitment [J]. Journal of Economic Theory, 2011, 146(3): 2356-2388.

[10] WILLIAMS N. Persistent private information [J]. Econometrica, 2011, 79(4): 1233-1275.

[11] ZHANG Y. Characterization of a risk sharing contract with one-sided commitment[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2013, 37(4): 794-809.

[12] MIAO J, ZHANG Y. A duality approach to continuous-time contracting problems with limited commitment [J]. Journal of Economic Theory, 2015, 159: 929-988.

[13] CHOQUET G. Theory of capacities [J]. Ann Inst Fourier, 1953, 5: 131-295.

[14] ELLSBERG D. Risk, ambiguity, and the savage axiom [J]. Quaterly Journal of Economics, 1961, 7: 643-669.

[15] SCHMEIDLER D. Subjective probability and expected utility without additivity[J]. Econometrica, 1989, 57: 571-587.

[16] CHEN Z, EPSTEIN L. Ambiguity, risk and asset returns in continuous time[J]. Econometrica, 2002, 70: 1403-1443.

[17] 韩立岩，周娟. Knight 不确定环境下基于模糊测度的期权定价模型[J]. 系统工程理论与实践，2007，27(12): 123-132.
HAN Liyan, ZHOU Juan. Option pricing with fuzzy measures under Knightian uncertainty [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2007, 27 (12): 123-132.

[18] 费为银，李淑娟. Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究[J]. 工程数学学报，2012，29(6): 799-806.
FEI Weiyin, LI Shujuan. Study on optimal consumption and portfolio with inflation under Knightian uncertainty [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2012, 29(6): 799-806.

[19] 费为银，高贵云，梁勇. 奈特不确定下带通胀的跨国直接投资问题[J]. 数学杂志，2016，36(3): 598-608.
FEI Weiyin, GAO Guiyun, LIANG Yong. On study of foreign direct investment with inflation under ambiguity[J]. Journal of Mathematics, 2016, 36(3): 598-608.

[20] 彭实戈. 非线性期望的理论、方法及意义[J]. 中国科学：数学，2017，47(10): 1223-1254.
PENG Shige. Theory, methods and meaning of nonlinear expectation theory[J]. Sci Sin Math, 2017, 47(10): 1223-1254.

[21] FEI W Y, FEI C. Optimal stochastic control and optimal consumption and portfolio with G-Brownian motion[EB/OL]. [2018-06-01]. https://arxiv.org/abs/1309.0209.