第50卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol. 50, No. 2
2020年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2020

文章编号:0253-2778(2020)02-0132-08

一种完全图上的多阶段传染病模型

符书楠,廖红怡,聂嘉欣

(北京交通大学理学院,北京 100044)

摘要:经典接触过程是一种建立在 n 个点的完全图 C_n 上的相互作用粒子系统模型. 这是一个具有状态空间 $\{0,1\}^{C_n}$ 的连续时间马尔可夫过程,探究的是图上以一定速率传播的两阶段疾病的存活情况. 然而模型中的粒子可能不止有"健康"和"全感染"两种状态. 为此,考虑传播速率为 $\frac{\lambda}{n}(\lambda>0)$ 的多阶段传染病模型,研究其在长时间效应下未来趋势的变化. 探索 λ 的相变临界值 $\lambda_c(\lambda_c>0)$,使得当 $\lambda>\lambda_c$ 时,传染病在指数时间 e^{C_n} 内以高概率存活;当 $\lambda<\lambda_c$ 时,传染病在对数时间 $C\ln n$ 内以高概率灭绝.

关键词:完全图;接触过程;多阶段;相变临界值

中图分类号:O211.62 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2020.02.008

2010 Mathematics Subject Classification:60K35

引用格式:符书楠,廖红怡,聂嘉欣. 一种完全图上的多阶段传染病模型[J]. 中国科学技术大学学报,2020,50(2):132-139.
FU Shunan, LIAO Hongyi, NIE Jiaxin. A multi-stage infectious disease model on the complete graph [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020,50(2):132-139.

A multi-stage infectious disease model on the complete graph

FU Shunan, LIAO Hongyi, NIE Jiaxin

(*School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

Abstract: The classical contact process is an interactive particle system model based on the complete graph C_n of n points. This is a continuous-time Markov process with state space $\{0,1\}^{C_n}$, which explores the survival of two-stage disease spread at a certain rate on the graph. However, particles in the model may have more than two states. To this end, a multi-stage infectious disease model with a propagation rate of $\frac{\lambda}{n}(\lambda>0)$ was considered, its future trends under long-term effects was studied. And the critical value $\lambda_c(\lambda_c>0)$ was explored, so that when $\lambda>\lambda_c$, the infectious disease survives with a high probability within the exponential time e^{C_n}; when $\lambda<\lambda_c$, the infectious disease extincts with a high probability within the logarithmic time $C\ln n$.

Key words: complete graph; contact process; multi-stage; critical value

收稿日期:2019-01-23;**修回日期**:2019-05-21

基金项目:北京交通大学大学生创新训练项目(180170018)资助.

作者简介:符书楠,女,1998年生,本科生. 研究方向:统计学. E-mail:16271216@bjtu.edu.cn

通讯作者:廖红怡,本科生. E-mail:16271196@bjtu.edu.cn

0　引言

接触过程是一类非常重要的数学模型，该模型刻画了图上传染病的传播机制. 接触过程于 1974 年由 Harris 在文献[1]中首次引入，Liggett 于 1985 年及 1999 在文献[2-3]中系统地介绍了当时接触过程的部分成果，Krone 于 1999 年在文献[4]中首次提出了多阶段接触过程，之后 Foxall 在文献[5]中解决了文献[3]中关于两状态接触过程的一些猜想，Xue 于 2018 年在文献[6]中得到了格点上两状态接触过程临界值的极限定理. 以上提及的两状态接触过程均为经典接触过程，即只有患病与不患病两种状态，经典接触过程探究的是完全图上以一定速率传播的疾病的存活情况，而在本文中，我们将把完全图上的经典接触过程推广为多阶段接触过程进行研究.

1　模型介绍

在一个完全图 $C_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上，每个点代表一个个体，任意两点间均有一条边相连，代表个体之间相互联系. 每个个体有三种可能的状态，分别为健康状态、半感染状态、全感染状态. 我们假设开始时刻即 $t=0$ 时，图上所有点均被完全感染. 随着时间的变化，每个个体的状态均可能发生变化：健康个体以正比于全感染个体数目的速率被传染为半感染状态，其比值为 $\dfrac{\lambda}{n}$；半感染个体和全感染个体分别以速率 $1+\delta$ 和 1 变为健康状态，半感染个体以速率 γ 变为全感染状态. 需要注意的是，这里速率是指等待状态改变所需的、服从指数分布的时间的参数，实际发生的状态改变取决于相互独立的指数等待时间中哪一个先到来.

在本文中，我们将接触过程位置 i 处的状态记为 $\eta_t(i)=(\mu_t(i),\zeta_t(i)),i\in C_n$，其中 $\mu_t(i)$ 为半感染个体数目，$\zeta_t(i)$ 为全感染个体数目. 事实上，此接触过程为连续时间 Markov 链，其状态空间为 $\eta_t\in\{(0,1),(1,0),(0,0)\}^{C_n}$. 具体的速率变化如下所示：

$(0,1)\to(0,0)$，以速率 1 转变；

$(1,0)\to(0,0)$，以速率 $1+\delta$ 转变；

$(0,1)\to(0,0)$，以速率 γ 转变；

$(0,1)\to(0,0)$，以速率 $\dfrac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{\eta_t(i)=(0,1)\}}$ 转变.

本文的目的是探索在完全图上参数 λ 的相变临界值 λ_c. 具体而言，此接触过程的未来变化趋势取决于参数 λ 的取值，存在 $\lambda_c>0$，使得当 $\lambda>\lambda_c$ 时，传染病以指数时间存活；而当 $\lambda<\lambda_c$ 时，传染病以对数时间灭绝. 受到 Peterson[7] 的启发，我们将根据经典传染病模型的特点进行相应的改进.

在经典传染病模型中，已有成果显示经典情形的 $\lambda_c=1$. 关于经典接触过程的详细研究，请参阅文献[2]的第六章和文献[3]的第一部分. 本文将在其基础上，更为深入地探索多阶段传染病模型未来趋势的变化.

2　主要结论

定义如下参数：$P_n(A)$ 表示在 C_n 上事件 A 发生的概率；η_t 为二维向量，表示给定初始状态时在时刻 t 的接触过程构型，它的两个分量 μ_t 和 ζ_t 分别表示此时完全图上处于半感染状态和全感染状态的个体总数.

定理 2.1　记相变临界值为 $\lambda_c=\dfrac{1+\delta+\gamma}{\gamma}$，则

①当 $\lambda>\lambda_c$ 时，存在常数 C，使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\eta_{e^{Cn}}\neq(0,0))=1;$$

②当 $\lambda<\lambda_c$ 时，存在常数 C，使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\eta_{C\ln n}=(0,0))=1.$$

λ 在 λ_c 附近变动时，随着完全图的度数趋于无穷，疾病呈现出相变现象. 当 $\lambda>\lambda_c$ 时，疾病以指数时间高概率存活，当 $\lambda<\lambda_c$ 时，疾病以对数时间高概率灭绝. 可以发现，当 γ 趋于无穷的时候，半感染状态瞬间转移成全感染状态，即可近似认为状态空间只有两种状态. 此时临界值趋于 1，即 $\lim\limits_{\gamma\to\infty}\lambda_c=1$，因此多阶段传染病模型与经典传染病模型的结论能够很好地契合.

3　指数时间存活情形证明

本节中，我们将研究 $\lambda>\lambda_c$ 时接触过程以指数时间存活的情形.

引理 3.1（Hille-Yosida 定理）　设 $\{X_t\}_{t\geq0}$ 是状态空间为 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ 的连续时间马氏链，记 $\{s(t)\}_{t\geq0}$ 为 $\{X_t\}_{t\geq0}$ 的算子半群，对于 $\forall t>0$，定义 E 上的如下函数：

$$(s(t)f)(x)=E_x(f(X_t)),\forall x\in E.$$

其中，下标 x 表示过程的初始状态，$f:E\to R$. 记 Ω 为 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 的生成元，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)f=\Omega s(t)f=s(t)\Omega f,\ \forall t>0 \quad (1)$$

我们记 $S^{(n)}(t)=(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))$，其中 $S_1^{(n)}(t)$，$S_2^{(n)}(t)$ 分别表示 C_n 上的接触过程在时刻 t 时半感染个体（记为(1,0)）数目以及全感染个体（记为(0,1)）的数目. 根据多阶段传染病模型的定义，其运行机制如下所示：

$(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\to(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t)-1)$，以速率 $S_2^{(n)}(t)$ 转变；

$(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\to(S_1^{(n)}(t)-1,S_2^{(n)}(t))$，以速率 $(1+\delta)S_1^{(n)}(t)$ 转变；

$(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\to(S_1^{(n)}(t)-1,S_2^{(n)}(t)+1)$，以速率 $\gamma S_1^{(n)}(t)$ 转变；

$(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\to(S_1^{(n)}(t)+1,S_2^{(n)}(t))$，以速率 $(n-S_1^{(n)}(t)-S_2^{(n)}(t))\dfrac{\lambda}{n}S_2^{(n)}(t)$ 转变.

根据 Hille-Yosida 定理，可以得到如下常微分方程(ODE)：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}ES_1^{(n)}(t)}{\mathrm{d}t}=(n-ES_1^{(n)}(t)-ES_2^{(n)}(t))\cdot\\ \qquad\qquad \dfrac{\lambda}{n}ES_2^{(n)}(t)-(1+\delta+\gamma)ES_1^{(n)}(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}ES_2^{(n)}(t)}{\mathrm{d}t}=\gamma ES_1^{(n)}(t)-ES_2^{(n)}(t).\end{cases}$$

上述方程组的不动点将对我们的推导产生影响，下面令这两个方程左端等于0，求出相应的不动点，记其为 $u^{(n)}$，$v^{(n)}$，同时记 $\dfrac{u^{(n)}}{n}$ 和 $\dfrac{v^{(n)}}{n}$ 为 $S_1^{(n)}$ 和 $S_2^{(n)}$，可以得到

$$\begin{cases}S_1^{(n)}=\dfrac{\gamma\lambda-(1+\delta+\gamma)}{\gamma\lambda(1+\gamma)},\\ S_2^{(n)}=\dfrac{\gamma\lambda-(1+\delta+\gamma)}{\lambda(1+\gamma)}.\end{cases}$$

假设当前时刻 $t=t_0$ 时，状态为

$$\frac{S_1^{(n)}(t_0)}{n}=k_1S_1^{(n)},\ \frac{S_2^{(n)}(t_0)}{n}=k_2S_2^{(n)}.$$

式中，$0<k_1,k_2<1$. 则 $S_i^{(n)}(t_0)=nk_iS_i^{(n)}$，$i=1,2$. 为方便叙述，我们记

$$p_1^+=nk_2\lambda(1-k_1S_1^{(n)}-k_2S_2^{(n)})S_2^{(n)},$$
$$p_1^-=nk_1(1+\delta)S_1^{(n)},$$
$$p_2^+=nk_1\gamma S_1^{(n)},p_2^-=nk_2S_2^{(n)}.$$

则此后该接触过程状态变化速率为

$(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\to(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t)-1)$，以速率 p_2^- 转变；

$(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\to(S_1^{(n)}(t)-1,S_2^{(n)}(t))$，以速率 p_1^- 转变；

$(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\to(S_1^{(n)}(t)-1,S_2^{(n)}(t)+1)$，以速率 p_2^+ 转变；

$(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\to(S_1^{(n)}(t)+1,S_2^{(n)}(t))$，以速率 p_1^+ 转变.

在此引入记号：

$$B(\delta_1,\eta_1;\delta_2,\eta_2)=:\{(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\in Z^2:$$
$$\delta_inS_i^{(n)}\leqslant S_i^{(n)}(t)\leqslant\eta_inS_i^{(n)},i=1,2\}.$$

取 $b_1,b_2<1$，再取 a_1,a_2，使 $a_i<b_i$，$i=1,2$，但 $|b_i-a_i|\to 0$，$i=1,2$. 令 $(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\in B(a_1,b_1;a_2,b_2)$，$0<a_i<b_i<1$，$i=1,2$. 此时我们引入 C_n 上的生灭过程 $X^{(n)}(t)=(X_1^{(n)}(t),X_2^{(n)}(t))$，来完成接触过程以指数时间存活情形的证明. 为方便叙述，记

$$q_1^+=a_2\lambda(1-b_1S_1^{(n)}-b_2S_2^{(n)})S_2^{(n)},$$
$$q_1^-=b_1(1+\delta+\gamma)S_1^{(n)},$$
$$q_2^+=a_1\gamma S_1^{(n)},q_2^-=a_2S_2^{(n)}.$$

令此生灭过程 $X^{(n)}(t)$ 的运行机制为

$(X_1^{(n)}(t),X_2^{(n)}(t))\to(X_1^{(n)}(t)+1,X_2^{(n)}(t))$，以速率 nq_1^+ 转变；

$(X_1^{(n)}(t),X_2^{(n)}(t))\to(X_1^{(n)}(t)-1,X_2^{(n)}(t))$，以速率 nq_1^- 转变；

$(X_1^{(n)}(t),X_2^{(n)}(t))\to(X_1^{(n)}(t)-1,X_2^{(n)}(t)+1)$，以速率 nq_2^+ 转变；

$(X_1^{(n)}(t),X_2^{(n)}(t))\to(X_1^{(n)}(t)-1,X_2^{(n)}(t)-1)$，以速率 nq_2^- 转变.

又由 $0<a_i<k_i<b_i<1$，$i=1,2$，所以经过放缩可得

$$p_1^-<nq_i^-<nq_i^+<p_i^+,\ i=1,2.$$

结合上述不等式，利用马氏性耦合可以得到如下引理：

引理 3.2 若接触过程与生灭过程各点初始状态相同，即完全图上所有个体处于全感染状态，当 $(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\in B(a_1,b_1;a_2,b_2)$ 时，在耦合的意义下，上述生灭过程 $X^{(n)}(t)$ 的半感染个体数目与全感染个体数目均始终不大于接触过程 $S^{(n)}(t)$ 的半感染个体数目与全感染个体数目，即：

$$\forall t\in[0,\tau],\begin{cases}X_1^{(n)}(t)\leqslant S_1^{(n)}(t),\\ X_2^{(n)}(t)\leqslant S_2^{(n)}(t).\end{cases}$$

其中，

$$\tau=\inf_t\{(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\notin B(a_1,b_1;a_2,b_2)\}.$$

定理 3.1　$\forall m_i\geqslant 0, i=1,2$，给定时刻 $t>0$，若 $X_i^{(n)}(0)=m_i$，其中 $m_i\in[na_iS_i^{(n)},nb_iS_i^{(n)}]$，则存在常数 $c_0=c_0(t)>0$，使得 $P(X_i^{(n)}(t)\leqslant m_i)\leqslant \mathrm{e}^{-c_0(t)n}$.

证明

$$P(X_1^{(n)}(t)\leqslant m_1)=P(-\theta X_1^{(n)}(t)\geqslant -\theta m_1)=P(\mathrm{e}^{-\theta X_1^{(n)}}\geqslant \mathrm{e}^{-\theta m_1}).$$

利用 Markov 不等式，可对上式进行放缩，有

$$P(\mathrm{e}^{-\theta X_1^{(n)}(t)}\geqslant \mathrm{e}^{-\theta m_1})\leqslant \mathrm{e}^{\theta m_1}E\mathrm{e}^{-\theta X_1^{(n)}(t)}\tag{2}$$

接下来，利用 Hille-Yosida 定理求解 $E\mathrm{e}^{-\theta X_1^{(n)}(t)}$，可列出下列等式：

$$\frac{\mathrm{d}E\mathrm{e}^{-\theta X_1^{(n)}(t)}}{\mathrm{d}t}=E(nq_1^+(\mathrm{e}^{-\theta(X_1^{(n)}(t)+1)}-\mathrm{e}^{-\theta X_1^{(n)}(t)}))+E(nq_1^-(\mathrm{e}^{-\theta(X_1^{(n)}(t)-1)}-\mathrm{e}^{-\theta X_1^{(n)}(t)})).$$

令 $H(t)=E\mathrm{e}^{-\theta X_1^{(n)}(t)}$，上式即可转化为

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}=nq_1^+H(t)(\mathrm{e}^{-\theta}-1)+nq_1^-H(t)(\mathrm{e}^{\theta}-1),$$

再由 $X_1^{(n)}(0)=m_1$，可得

$$H(t)=\mathrm{e}^{t(nq_1^+\mathrm{e}^{-\theta}+nq_1^-\mathrm{e}^{\theta}-nq_1^+-nq_1^-)}\mathrm{e}^{-\theta m_1}\tag{3}$$

至此我们得到了 $H(t)$ 即 $E\mathrm{e}^{-\theta X_1^{(n)}(t)}$ 的表达式(3)，将(3)代入(2)，便可完成这一步放缩，得到

$$P(X_1^{(n)}(t)\leqslant m_1)\leqslant \mathrm{e}^{nt(q_1^+\mathrm{e}^{-\theta}+q_1^-\mathrm{e}^{\theta}-q_1^+-q_1^-)}\tag{4}$$

为方便计，不妨设

$$G(\theta)=n(q_1^+\mathrm{e}^{-\theta}+q_1^-\mathrm{e}^{\theta}-q_1^+-q_1^-),$$

并令 $\frac{\mathrm{d}G(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，可得 $\theta=\frac{1}{2}\ln\frac{q_1^+}{q_1^-}$，代入式(4)得 $G(\theta)<0$.

记 $G(\theta)=-c_{01}$，结合式(4)可得

$$P(X_1^{(n)}(t)\leqslant m_1)\leqslant \mathrm{e}^{-c_{01}(t)n}.$$

同理，

$$P(X_2^{(n)}(t)\leqslant m_2)\leqslant \mathrm{e}^{-c_{02}(t)n}.$$

综上所述，当 $X_i^{(n)}(0)=m_i, i=1,2$ 时，存在常数 $c_{0i}>0$，使得

$$P(X_i^{(n)}(t)\leqslant m_i)\leqslant \mathrm{e}^{-c_{0i}(t)n},$$

取 $c_0=\min\{c_{01},c_{02}\}$，从而由上式易得

$$P(X_i^{(n)}(t)\leqslant m_i)\leqslant \mathrm{e}^{-c_0(t)n}.$$

下面设定一系列区域：

$$U(\varepsilon,\eta):=\{(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t)\in Z^2:S_1^{(n)}(t)\geqslant n\varepsilon S_1^{(n)}\text{ 或 }S_2^{(n)}(t)\geqslant n\eta S_2^{(n)}\},$$

$$V(\varepsilon,\eta):=\{(X_1^{(n)}(t),X_2^{(n)}(t)\in Z^2:X_1^{(n)}(t)\geqslant n\varepsilon S_1^{(n)}\text{ 或 }X_2^{(n)}(t)\geqslant n\eta S_2^{(n)}\}.$$

则有如下引理：

引理 3.3　$\exists\tau>0, c_3'>0$，使得

$$P((S_1^{(n)}(t_0+\tau),S_2^{(n)}(t_0+\tau))\in U(k_1,k_2)\mid(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\in U(k_1,k_2))\geqslant 1-\mathrm{e}^{-c_3'}.$$

证明　首先进行 τ 的选取，令

$$L^{(n)}(t)=S_1^{(n)}(t)+S_2^{(n)}(t),$$

易知 $L^{(n)}(t)$ 每次最多变化 1 个单位或者不变. 设 T 为等待变化所发生的时间，则 T 服从参数为 $c(t)$ 的指数分布，其中，

$$c(t)=(1+\delta+\gamma)S_1^{(n)}(t)+S_2^{(n)}(t)+(n-S_1^{(n)}(t)-S_1^{(n)}(t))\frac{\lambda}{n}S_2^{(n)}(t).$$

由 $0\leqslant S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t)\leqslant n$ 可得

$$c(t)\leqslant n+(1+\delta+\gamma)n+n\cdot\frac{\lambda}{n}\cdot n=(2+\delta+\gamma+\lambda)n.$$

令 $d=\min\{k_1-a_1,b_1-k_1,k_2-a_2,b_2-k_2\}$，因 $L^{(n)}(t)$ 最多变化 1 个单位，则 $L^{(n)}(t)$ 至少需发生 nd 次变化才能到达边界. 从而令 $\tau=\frac{d}{2(2+\delta+\gamma+\lambda)}$，记 $T_1(n)$ 为 C_n 中粒子逃出限制区域所需时间，下证在 τ 时间内逃离所限制区域为小概率事件：

$$P(T_1(n)\leqslant\tau)\leqslant \mathrm{e}^{-c_3'n}.$$

令 $R^{(n)}(\tau)$ 为数目发生变化的次数，则有

$$P(T_1(n)\leqslant\tau)=P(R^{(n)}(\tau)\geqslant nd)=P(\mathrm{e}^{\theta R^{(n)}(\tau)}\geqslant \mathrm{e}^{\theta nd}),$$

对其应用 Markov 不等式进行缩放，即可得到

$$P(T_1(n)\leqslant\tau)\leqslant \mathrm{e}^{-\theta nd}E(\mathrm{e}^{\theta R^{(n)}(\tau)})\tag{5}$$

下面求解 $E(\mathrm{e}^{\theta R^{(n)}(\tau)})$，为方便计，设 $H^{(n)}(t)=E\mathrm{e}^{\theta R^{(n)}(\tau)}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}H^{(n)}(t)}{\mathrm{d}\tau}=n(2+\delta+\gamma+\lambda)\cdot(E\mathrm{e}^{\theta(R^{(n)}(\tau)+1)}-E\mathrm{e}^{\theta R^{(n)}(\tau)})=n(2+\delta+\gamma+\lambda)(\mathrm{e}^{\theta}-1)H^{(n)}(\tau),$$

由初值条件 $H^{(n)}(0)=E\mathrm{e}^{\theta R^{(n)}(0)}=1$，则

$$H^{(n)}(t)=\mathrm{e}^{n(2+\delta+\gamma+\lambda)(\mathrm{e}^{\theta}-1)\tau}=\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\theta}-1)\frac{nd}{2}},$$

将上式带入式(5)，则有

$$P(T_1(n)\leqslant\tau)\leqslant \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\theta}-2\theta-1)\frac{nd}{2}}\leqslant \mathrm{e}^{(1-2\ln 2)\frac{nd}{2}}.$$

为方便计，定义事件如下：

$$A(t)=\{(X_1^{(n)}(t),X_2^{(n)}(t))\notin V(k_1,k_2)\},$$

$$B(t)=\{(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\notin B(a_1,b_1;a_2,b_2)\},$$

$$C(t)=\{(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t))\notin U(k_1,k_2)\}.$$

则由定理 3.1 可得：$\exists c'_1>0$，使得

$$P(A(t_0+\tau))\leqslant \mathrm{e}^{-c'_1 n},$$

从而存在 $c'_2>0$，使得 $P(B(t_0+\tau))\leqslant \mathrm{e}^{-c'_2 n}$，结合上两式知，存在 $c'_3>0$，，使得

$$P(A(t_0+\tau)\cup B(t_0+\tau))\leqslant \mathrm{e}^{-c'_1 n}+\mathrm{e}^{-c'_2 n}\leqslant \mathrm{e}^{-c'_3 n},$$

$$P(\overline{A}(t_0+\tau)\cap \overline{B}(t_0+\tau))\geqslant 1-\mathrm{e}^{-c'_3 n}.$$

结合引理 3.1 可得

$$P(\overline{C}(t_0+\tau))\geqslant 1-\mathrm{e}^{-c'_3 n},$$

$$P(\overline{C}(t_0+\tau)\mid S_i^{(n)}(t_0)=nk_iS_i^{(n)})\geqslant 1-\mathrm{e}^{-c'_3 n},i=1,2,$$

$$P(\overline{C}(t_0+\tau)\mid \overline{C}(t_0))\geqslant 1-\mathrm{e}^{-c'_3 n}.$$

引理得证.

当 n 充分大时，接触过程在 $[t_0,t_0+\tau]$ 内以高概率依旧限制在 $B(a_1,b_1;a_2,b_2)$ 内. 记 $S^{(n)}[t_1,t_2]:=\{(S_1^{(n)}(t),S_2^{(n)}(t)):t\in[t_1,t_2]\}$，将以 $[t_0,t_0+\mathrm{e}^{c'_3 n/2}]$ 间隔 τ 分割为 $\dfrac{\mathrm{e}^{c'_3 n/2}}{\tau}$ 份，即每一份为

$$[t_0+n\tau,t_0+(n+1)\tau],n=0,1,\cdots,\frac{\mathrm{e}^{c'_3 n/2}}{\tau}-1.$$

令 $S_i^{(n)}(t_0+n\tau)=nk_iS_i^{(n)}$，则可得

$$\lim_{n\to\infty}P(S^{(n)}[t_0,t_0+\mathrm{e}^{c'_3 n/2}]\subset U(k_1,k_2))\geqslant \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mathrm{e}^{c'_3 n/2}}{\tau}\mathrm{e}^{-c'_3 n/2}\right)\geqslant \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mathrm{e}^{c'_3 n/2}}{\tau}\right)=1 \quad (6)$$

从而推出，在此情况下，随着完全图的度数趋于无穷，接触过程在指数时间内高概率存活，即存在某常数 C，使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\eta_{c^{cn}}\neq(0,0))=1.$$

4 对数时间灭绝情形证明

在本节中，我们利用分支过程证明当 $\lambda<\lambda_c$ 时，接触过程将以对数时间 $C\ln n$ 灭绝.

4.1 分支过程

分支过程是一种描述一组粒子的分裂或灭亡过程的数学模型. 与接触过程不同的是，在每个点上，分支过程可以存在着多个个体. 我们依旧假设其个体可能的状态为健康、半感染、全感染.

在时刻 $t=0$ 时，图上所有点均存在一个全感染个体. 随着时间的变化，半感染个体和全感染个体分别以速率 $1+\delta$ 和 1 变为健康状态；半感染个体以速率 γ 变为全感染状态；对于任意给定的一个全感染个体，其在任意一个点上以速率 $\dfrac{\lambda}{n}$ 产生一个半感染个体.

在本文中，我们将分支过程位置 i 处的状态记为 $\xi_t(i)=(\theta_t(i),\rho_t(i)),i\in C_n$，其中 $\theta_t(i)$ 为半感染个体数目，$\rho_t(i)$ 为全感染个体数目. 其速率变化如下所示：

$(\theta_t(i),\rho_t(i))\to(\theta_t(i)-1,\rho_t(i))$，以速率 $(1+\delta)\theta_t(i)$ 转变；

$(\theta_t(i),\rho_t(i))\to(\theta_t(i),\rho_t(i)-1)$，以速率 $\rho_t(i)$ 转变；

$(\theta_t(i),\rho_t(i))\to(\theta_t(i)+1,\rho_t(i))$，以速率 $\dfrac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_t(i)$ 转变；

$(\theta_t(i),\rho_t(i))\to(\theta_t(i)-1,\rho_t(i)+1)$，以速率 $\gamma\theta_t(i)$ 转变.

4.2 主要证明

引理 4.1 若分支过程与接触过程各点初始状态相同，则在耦合意义下，分支过程的半感染个体数目 $\theta_t(i)$ 与全感染个体数目 $\rho_t(i)$ 均始终不小于接触过程的半感染个体数目 $\mu_t(i)$ 与全感染个体数目 $\zeta_t(i)$，即 $\forall t>0$，$\begin{cases}\mu_t(i)\leqslant\theta_t(i),\\ \zeta_t(i)\leqslant\rho_t(i).\end{cases}$

引理 4.1 的详细证明见附录.

定理 4.1 当 $\lambda<\lambda_c$ 时，存在某常数 C，使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\xi_{C\ln n}=(0,0))=1.$$

证明 由 Hille-Yosida 定理，可得

$$\frac{\mathrm{d}E\theta_t(i)}{\mathrm{d}t}=\lambda E\rho_t(i)-(1+\delta+\gamma)E\theta_t(i) \quad (7)$$

同理，对于 $\rho_t(i)$，有

$$\frac{\mathrm{d}E\rho_t(i)}{\mathrm{d}t}=\gamma E\theta_t(i)-E\rho_t(i) \quad (8)$$

下求 $E\theta_t(i)$ 和 $E\rho_t(i)$：

$$\begin{pmatrix}E\theta_t(i)\\ E\rho_t(i)\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}-(1+\delta+\gamma) & \lambda\\ \gamma & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\theta_t(i)\\ E\rho_t(i)\end{pmatrix},$$

设 $B=\begin{pmatrix}-(1+\delta+\gamma) & \lambda\\ \gamma & -1\end{pmatrix}$，$A=1+\delta+\gamma$，则 $B=\begin{pmatrix}-A & \lambda\\ \gamma & -1\end{pmatrix}$. 于是，可求得 B 的特征多项式：

$$|\lambda_0E-B|=\lambda_0^2+(A+1)\lambda_0+A-\gamma\lambda,$$

令

$$\lambda_0^2+(A+1)\lambda_0+A-\gamma\lambda=0,$$

可得 B 的两个特征根：

$$\lambda_1=\frac{-(A+1)+\sqrt{\Delta}}{2},\lambda_2=\frac{-(A+1)-\sqrt{\Delta}}{2},$$

其中，

$$\Delta=(A-1)^2+4\gamma\lambda,A=1+\delta+\gamma,$$

由常微分方程知识,可求得

$$E\rho_t(i)=c_1\exp(\lambda_1 t)+c_2\exp(\lambda_2 t),$$

其中，

$$c_1=\frac{\sqrt{\Delta}+\delta+3\gamma}{2(\lambda_1-\lambda_2)},c_2=\frac{\sqrt{\Delta}-\delta-3\gamma}{2(\lambda_1-\lambda_2)},$$

因

$$\lambda<\lambda_c=\frac{1+\delta+\gamma}{\gamma},$$

易得

$$\lambda_1<0,\lambda_2<0.$$

则有

$$c_1>0,c_2\leqslant 0,$$

于是有

$$E\rho_t(i)=c_1\exp(\lambda_1 t)+c_2\exp(\lambda_2 t)\leqslant c_1\exp(\lambda_1 t),$$

令 $t=t_1=\dfrac{4\ln n}{(\delta+\gamma+2)-\sqrt{(\delta+\gamma)^2+4\gamma\lambda}}$,

$$E\rho_t(i)\leqslant c_1\exp(\lambda_1 t)=\frac{c_1}{n^2} \tag{9}$$

对于 $E\theta_t(i)$，因 $\lambda_1>\lambda_2$,有

$$\begin{aligned}E\theta_t(i)=&\frac{1}{\gamma}(c_1\exp(\lambda_1 t)+c_2\exp(\lambda_2 t)+\\&c_1\lambda_1\exp(\lambda_1 t)+c_2\lambda_2\exp(\lambda_2 t))<\\&\frac{1}{\gamma}(c_1\exp(\lambda_1 t)+c_2\lambda_2\exp(\lambda_2 t))<\\&\frac{c_1+c_2\lambda_2}{\gamma}\exp(\lambda_1 t)=\frac{c_1+c_2\lambda_2}{n^2\gamma}\end{aligned} \tag{10}$$

即

$$E\rho_t(i)\leqslant\frac{c_1}{n^2},E\theta_t(i)<\frac{c_1+c_2\lambda_2}{n^2\gamma} \tag{11}$$

则利用 Markov 不等式,对每个固定点 i 有

$$\left.\begin{aligned}P_n(\theta_t(i)\geqslant 1)\leqslant E\theta_t(i)<\frac{c_1}{n^2},\\P_n(\rho_t(i)\geqslant 1)\leqslant E\rho_t(i)<\frac{c_1+c_2\lambda_2}{n^2\gamma}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

则有

$$\begin{aligned}&P_n(\textstyle\bigcup_{i=1}^n\xi_t(i)>(0,0))\leqslant\\&\sum_{i=1}^n P_n(\theta_t(i)\geqslant 1)+\sum_{i=1}^n P_n(\rho_t(i)\geqslant 1)\leqslant\\&\frac{c_1}{n}+\frac{c_1+c_2\lambda_2}{n\gamma}\end{aligned} \tag{13}$$

即存在 $C=\dfrac{4}{(\delta+\gamma+2)-\sqrt{(\delta+\gamma)^2+4\gamma\lambda}}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\xi_{C\ln n}=(0,0))=1.$$

定理得证.

因分支过程在长时间内高概率对数时间灭绝，由引理 4.1 分支过程的半感染个体数目与全感染个体数目均始终不小于接触过程的半感染个体数目与全感染个体数目可知:接触过程也在长时间内高概率对数时间灭绝,即存在某常数 C,使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\xi_{C\ln n}=(0,0))=1.$$

参考文献(References)

[1] HARRIS T E. Contact interactions on a lattice[J]. The Annals of Probability, 1974, 2(6): 969-988.

[2] LIGGETT T M. Interacting Particle Systems[M]. New York: Springer, 1985.

[3] LIGGETT T M. Stochastic interacting systems: Contact, voter and exclusion processes[M]. New York: Springer, 1999.

[4] KRONE S. The two-stage contact process[J]. The Annals of Applied Probability, 1999, 9(2): 331-351.

[5] FOXALL E. New results for the two-stage contact process[J]. Journal of Applied Probability, 2015, 52(1): 258-268.

[6] XUE X F. The critical infection rate of the high-dimensional two-stage contact process[J]. Statistics and Probability Letters, 2018, 140: 115-125.

[7] PETERSON J. The contact process on the complete graph with random vertex-dependent infection rates[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2011, 121(3): 609-629.

附录

引理 4.1 证明 首先将接触过程和与分支过程按下述方式进行马氏性耦合，以 $\{(\mu_t(i),\zeta_t(i)),(\theta_t(i),\rho_t(i))\}$ 形式表示接触过程与分支过程的耦合，其中第一个分量 $(\mu_t(i),\zeta_t(i))$ 表示接触过程半感染个体数与全感染个体数的向量形式，第二个分量 $(\theta_t(i),\rho_t(i))$ 表示分支过程半感染个体数与全感染个体数的向量形式.

设 $\{(\mu_t(i),\zeta_t(i)),(\theta_t(i),\rho_t(i))\}$ 当前状态为 $\{(i,j),(k,l)\}$，其中 $i\leqslant k,j\leqslant l$. 则有以下耦合过程：

$\{(0,1),(0,1)\}\to\{(0,0),(0,0)\}$，以速率 1；

$\to\{(0,1),(1,1)\}$，以速率 $\lambda\sum_i\rho_t(i)$.

$\{(1,0),(0,0)\}\to\{(0,1),(0,1)\}$，以速率 γ；

$\to\{(0,0),(0,0)\}$，以速率 $1+\delta$；

$\to\{(1,0),(2,0)\}$，以速率 $\lambda\sum_i\rho_t(i)$.

$\{(0,0),(0,1)\}\to\{(0,0),(0,0)\}$，以速率 1；

$\to\{(0,0),(1,1)\}$，以速率 $\lambda\sum_i\rho_t(i)-\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j)$；

$\to\{(1,0),(1,1)\}$，以速率 $\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j)$.

$\{(0,0),(1,0)\}\to\{(0,0),(0,0)\}$，以速率 $1+\delta$；

$\to\{(0,0),(0,1)\}$，以速率 γ；

$\to\{(0,0),(2,0)\}$，以速率 $\lambda\sum_i\rho_t(i)-\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j)$；

$\to\{(1,0),(2,0)\}$，以速率 $\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j)$.

$\{(0,0),(1,1)\}\to\{(0,0),(0,1)\}$，以速率 $1+\delta$；

$\to\{(0,0),(0,2)\}$，以速率 γ；

$\to\{(0,0),(1,0)\}$，以速率 1；

$\to\{(0,0),(2,1)\}$，以速率 $\lambda\sum_i\rho_t(i)-\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j)$；

$\to\{(1,0),(2,1)\}$，以速率 $\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j)$.

$\{(0,1),(1,1)\}\to\{(0,1),(0,1)\}$，以速率 $1+\delta$；

$\to\{(0,1),(0,2)\}$，以速率 γ；

$\to\{(0,0),(1,0)\}$，以速率 1；

$\to\{(0,1),(2,1)\}$，以速率 $\lambda\sum_i\rho_t(i)$.

$\{(1,0),(1,1)\}\to\{(0,0),(0,1)\}$，以速率 $1+\delta$；

$\to\{(0,1),(0,2)\}$，以速率 γ；

$\to\{(1,0),(0,0)\}$，以速率 1；

$\to\{(1,0),(2,1)\}$，以速率 $\lambda\sum_i\rho_t(i)$.

$\{(0,0),(\theta_t(i),\rho_t(i))\}\to\{(0,0),(\theta_t(i)+1,\rho_t(i))\}$，以速率 $(1+\delta)\theta_t(i)$；

$\to\{(0,0),(\theta_t(i),\rho_t(i)+1)\}$，以速率 $\gamma\theta_t(i)$；

$\to\{(1,0),(\theta_t(i)+1,\rho_t(i))\}$，以速率 $\lambda\sum_i\rho_t(i)$；

$\to\{(0,0),(\theta_t(i)+1,\rho_t(i))\}$，以速率 $\lambda\sum_i\rho_t(i)-\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j)$；

$\to\{(0,0),(\theta_t(i),\rho_t(i)-1)\}$，以速率 $\rho_t(i)$.

$$
\begin{aligned}
\{(0,1),(\theta_t(i),\rho_t(i))\} &\to \{(0,1),(\theta_t(i)-1,\rho_t(i))\}\text{，以速率}(1+\delta)\theta_t(i);\\
&\to \{(0,1),(\theta_t(i)-1,\rho_t(i)+1)\}\text{，以速率 }\gamma\theta_t(i);\\
&\to \{(0,1),(\theta_t(i)+1,\rho_t(i))\}\text{，以速率 }\lambda\sum_i\rho_t(i);\\
&\to \{(0,0),(\theta_t(i),\rho_t(i)-1)\}\text{，以速率 }1;\\
&\to \{(0,1),(\theta_t(i),\rho_t(i)-1)\}\text{，以速率 }\rho_t(i).\\
\{(1,0),(\theta_t(i),\rho_t(i))\} &\to \{(1,0),(\theta_t(i)-1,\rho_t(i))\}\text{，以速率}(\theta_t(i)-1)(1+\delta);\\
&\to \{(0,0),(\theta_t(i)-1,\rho_t(i))\}\text{，以速率 }1+\delta;\\
&\to \{(1,0),(\theta_t(i)-1,\rho_t(i)+1)\}\text{，以速率}(\theta_t(i)-1)\gamma;\\
&\to \{(0,1),(\theta_t(i)-1,\rho_t(i)+1)\}\text{，以速率 }\gamma;\\
&\to \{(1,0),(\theta_t(i)+1,\rho_t(i))\}\text{，以速率 }\lambda\sum_i\rho_t(i);\\
&\to \{(1,0),(\theta_t(i),\rho_t(i)-1)\}\text{，以速率 }\rho_t(i);\\
\{(0,0),(0,\rho_t(i))\} &\to \{(0,0),(0,\rho_t(i)-1)\}\text{，以速率 }\rho_t(i);\\
&\to \{(0,0),(1,\rho_t(i))\}\text{，以速率 }\lambda\sum_i\rho_t(i)-\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j);\\
&\to \{(1,0),(1,\rho_t(i))\}\text{，以速率 }\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j).\\
\{(0,0),(\theta_t(i),0)\} &\to \{(0,0),(\theta_t(i)-1,1)\}\text{，以速率 }\gamma\theta_t(i);\\
&\to \{(0,0),(\theta_t(i)-1,0)\}\text{，以速率 }(1+\delta)\theta_t(i);\\
&\to \{(0,0),(\theta_t(i)+1,0)\}\text{，以速率 }\lambda\sum_i\rho_t(i)-\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j);\\
&\to \{(1,0),(\theta_t(i)+1,0)\}\text{，以速率 }\lambda\sum_{i\neq j}\zeta_t(j).\\
\{(1,0),(\theta_t(i),0)\} &\to \{(1,0),(\theta_t(i)+1,0)\}\text{，以速率 }\lambda\sum_j\rho_t(j);\\
&\to \{(0,1),(\theta_t(i)-1,1)\}\text{，以速率 }\gamma;\\
&\to \{(0,0),(\theta_t(i)-1,0)\}\text{，以速率 }1+\delta;\\
&\to \{(1,0),(\theta_t(i)-1,1)\}\text{，以速率 }(\theta_t(i)-1)\gamma;\\
&\to \{(1,0),(\theta_t(i)-1,0)\}\text{，以速率 }(1+\delta)(\theta_t(i)-1).\\
\{(0,1),(0,\rho_t(i))\} &\to \{(0,0),(0,\rho_t(i)-1)\}\text{，以速率 }1;\\
&\to \{(0,1),(1,\rho_t(i))\}\text{，以速率 }\lambda\sum_j\rho_t(j);\\
&\to \{(0,1),(0,\rho_t(i)-1)\}\text{，以速率 }\rho_t(i).
\end{aligned}
$$

在此耦合下，

$$
\begin{cases}
\mu_t(i)\leqslant\theta_t(i),\\
\zeta_t(i)\leqslant\rho_t(i).
\end{cases}
$$

即接触过程半感染个体数与全感染个体数均不大于分支过程半感染个体数与全感染个体数.证毕.