第50卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol. 50,No. 2
2020年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2020
文章编号:0253-2778(2020)02-0128-04

$\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模

胡 月,周 珺,赵志兵

(安徽大学数学科学学院,安徽合肥 230601)

摘要:定义了 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,证明了一个模是 $\mathscr{X}$-Gorentein 投射的当且仅当其是某个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模的直和项.并讨论了 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模的其他一些性质.部分结论推广或加强了强 Gorenstein 投射模的一些结果.

关键词:Gorenstein 投射模;强 Gorenstein 投射模;$\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模;$\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模

中图分类号:O154.2 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2020.02.007

2010 Mathematics Subject Classification:Primary 16D80; Secondary 16E30

引用格式:胡月,周珺,赵志兵. $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模[J]. 中国科学技术大学学报,2020,50(2):128-131.
HU Yue, ZHOU Jun, ZHAO Zhibing. $\mathscr{X}$-strongly Gorenstein modules[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020,50(2):128-131.

$\mathscr{X}$-strongly Gorenstein modules

HU Yue, ZHOU Jun, ZHAO Zhibing

(*School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei* 230601, *China*)

Abstract: The notion of $\mathscr{X}$-strongly Gorenstein projective module was defined. It was proved that a module is $\mathscr{X}$-Gorenstein projective if and only if it is a direct summand of some $\mathscr{X}$-strongly Gorenstein projective module. Furthermore, some basic properties of $\mathscr{X}$-strongly Gorenstein modules were obtained. And some results about strongly Gorenstein modules were generalized or strengthened.

Key words: Gorenstein projective modules; strong Gorenstein projective modules; $\mathscr{X}$-Gorenstein projective modules; $\mathscr{X}$-strongly Gorenstein projective module

0 引言

作为有限生成投射模的推广,Auslander 和 Bridger[1]在双边 Noether 环上定义了 G-维数为 0 的模,利用此模类,类似于投射维数定义了模的 Gorenstein 维数,推广了 Auslander-Buchbaum 方程,并证明了一个双边的 Noether 环是 Gorenstein 环当且仅当该环上的所有有限生成模的 Gorenstein 维数有限. Enochs 和 Jenda[2]对一般环上的一般模定义了 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 投射维数. Christensen[3]证明了 Noether 环上有限生成模是 Gorenstein 投射模当且仅当它是 G-维数为 0 的模. 这样,Gorenstein 同调代数逐渐建立和发展起来. 经过几十年的发展,关于 Gorenstein 同调代数的研究已经达到了很高的水平,研究的范围也在不断地扩大. 一些经典同调代数中的结果都在 Gorenstein 同

收稿日期:2019-05-29;**修回日期**:2019-07-24

基金项目:国家自然科学基金(11571329),安徽省自然科学基金(1708085MA01),安徽省高校自然科学研究重点项目(KJ2019A0007)资助.

作者简介:胡月,女,1993 年生,硕士. 研究方向:同调代数理论. E-mail:1804352597@qq.com

通讯作者:赵志兵,博士/讲师. E-mail: zbzhao@ahu.edu.cn

调代数中均有相应的结果(参见文献[4-6]),Gorenstein 同调模及其相关的同调维数均是相对同调代数,特别是 Gorenstein 同调代数的重要研究对象.

本文假设环 R 为一个带有单位元的结合环,R-模均指左 R-模. Bennis 和 Ouarghi[7] 介绍了 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模,统一了一些重要的同调模类,包括经典的投射模、Gorenstein 投射模和强 Gorenstein 平坦模[8]等,其中 $\mathscr{X}$ 为包含投射模类的左 R-模类. 用 R-Mod 表示所有左 R-模构成的范畴,分别用 $P(R)$ 和 $GP(R)$ 表示所有投射左 R-模和 Gorenstein 投射左 R-模构成的类. 本文关于"左模"的结果均有相应的"右模"结果.

定义 0.1　设 $\mathscr{X}$ 是一个包含所有投射模的左 R-模类,左 R-模 G 被称为 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模,如果存在下述正合列

$$\mathbf{P}:=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$$

对任意的 $X\in\mathscr{X}$,$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{P},X)$ 仍是正合的,且 $G\cong\mathrm{Ker}(P_0\to P^0)$.

注 0.1　① 取 $\mathscr{X}$ 为投射左 R-模类,则 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模即为 Gorenstein 投射模.

② 取 $\mathscr{X}$ 为平坦左 R-模类,则 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模即为强 Gorenstein 平坦模[8].

③ 取 $\mathscr{X}$ 为左 R-模类,则 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模即为经典的投射模.

下面我们将定义 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,讨论了 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模的一些简单性质,并得到一个左 R-模是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模当且仅当它是某个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射的直和项.

1　$\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模

下面的定义实际上是文献[9]中强 Gorenstein 投射模的一个推广的情形.

定义 1.1　设 $\mathscr{X}$ 是一个包含所有投射模的左 R-模类,左 R-模 G 被称为 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,如果存在下述正合列

$$\mathbf{P}:=\cdots\to P\to P\to P\to P\to\cdots$$

使得对任意的 $X\in\mathscr{X}$,均有 $\mathrm{Hom}_A(\mathbf{P},X)$ 仍然是正合的,且 $G\cong\mathrm{Ker}(P\to P)$,其中正合列 $\mathbf{P}$ 称为 G 的一个 $\mathscr{X}$-强完全投射分解.

注 1.1　① 若取 $\mathscr{X}$ 为 $P(R)$,则 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模即为通常的强 Gorenstein-投射模.

② 每个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模. 反过来,一般情况下,$\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模未必是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模(参见文献[9,例 2.13],此时 $\mathscr{X}$ 取投射左 R-模类).

命题 1.1　每一个投射模都是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模.

证明　设 P 是一个投射左 R-模,考虑如下的正合列

$$\mathbf{P}:=\cdots\to P\oplus P\xrightarrow{f}P\oplus P\xrightarrow{f}P\oplus P\to\cdots$$

$$(x,y)\to(0,x)$$

则 $\mathrm{Ker}\,f=\mathrm{Im}\,f\cong P$.

对于一个左 R-模 $X\in\mathscr{X}$,用 $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ 函子作用上述的正合列,可得如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P\oplus P,X) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(f,X)"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}(P\oplus P,X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P,X)\oplus\mathrm{Hom}(P,X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P,X)\oplus\mathrm{Hom}(P,X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

因为交换图中下面一行是正合的,从而得到上面一行亦正合,故命题得证.

对于任意的左 R-模 M,M 的 $\mathscr{X}$-维数定义为 $\mathscr{X}\text{-}\dim(M)=\mathrm{Inf}\{n\mid$ 存在 $\mathscr{X}$-分解 $0\to X_n\to\cdots\to X_1\to X_0\to M\to 0$,其中每个 $X_i\in\mathscr{X}$,$i=0,1,2,\cdots,n\}$,若没有这样的 n 存在,我们称 M 的 $\mathscr{X}$-维数为 ∞,记为 $\mathscr{X}\text{-}\dim(M)=\infty$. 类似于强 Gorenstein 投射模的性质,关于 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模的等价刻画,我们有

命题 1.2　$M\in R$-Mod,则下列表述等价:

①M 是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模;

②存在短正合列 $0\to M\to P\to M\to 0$,其中 $P\in P(R)$. 且对任意的 $X\in\mathscr{X}$,均有 $\mathrm{Ext}_R^n(M,X)=0$,$n>0$;

③存在短正合列 $0\to M\to P\to M\to 0$,其中 $P\in P(R)$. 且对任意具有有限 $\mathscr{X}$-维数的 R-模 X',均有 $\mathrm{Ext}_R^n(M,X')=0$,$n>0$.

证明　根据 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模的定义,①⇒②,③⇒①是显然的.

只需证②⇒③.

设 $\mathscr{X}\text{-}\dim(X')=m<\infty$. 由定义知存在正合列

$$0\to X_m\to X_{m-1}\to\cdots\to X_1\to X_0\to X'\to 0,$$

其中 $X_i\in\mathscr{X}$,$i=1,\cdots,m$. 所以此时有 $\mathrm{Ext}_R^n(M,X_m)=0$,$n>0$. 又由维数转移法可知,对任意的 $j>0$,$0=\mathrm{Ext}_R^{m+j}(M,X_m)\cong\mathrm{Ext}_R^j(M,X')$. 故 $\mathrm{Ext}_R^n(M,X')=0$,$n>0$.

命题 1.3　若 $\{G\}_{i\in I}$ 为一簇 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein

投射模,则$\bigoplus_{i\in I}G_i$ 是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模.

证明 假设对每个 $i\in I$,G_i 均是一个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,则对每个 G_i,均存在一个 $\mathscr{X}$-强完全投射分解,设为 $\mathbf{P}_i$. 容易证明$\bigoplus_{i\in I}\mathbf{P}_i$是$\bigoplus_{i\in I}G_i$的一个 $\mathscr{X}$-强完全投射分解,从而根据定义 1.1,$\bigoplus_{i\in I}G_i$ 是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模.

命题 1.4 一个左 R-模 M 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的,当且仅当它是某个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模的直和项.

证明 由于 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模是 $\mathscr{X}$-投射模,根据文献[10,命题 2.6],$\mathscr{X}$-投射模类是保直和项的,因而我们只需证明必要性.

令 M 是一个 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模,则存在一个 $\mathscr{X}$-完全投射分解:

$$\mathbf{P}:=\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1^P}P_0\xrightarrow{d_0^P}P_{-1}\xrightarrow{d_{-1}^P}P_{-2}\longrightarrow\cdots$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(d_0^P)$.

对于任意的 $m\in\mathbf{Z}$,记 $\sum^m\mathbf{P}$ 为利用正合列 $\mathbf{P}$ 通过增加指标 m 而得到的正合序列,其中 $(\sum^m\mathbf{P})_i=P_{i-m}$,微分 $d_i^{\sum^m\mathbf{P}}=d_{i-m}^P$.

现考虑如下正合序列:

$$Q=\bigoplus_{m\in Z}(\sum^m\mathbf{P})=\cdots\longrightarrow Q=\bigoplus P_i\xrightarrow{\oplus d_i^P}Q=\bigoplus P_i\xrightarrow{\oplus d_i^P}Q=\bigoplus P_i\xrightarrow{\oplus d_i^P}\cdots$$

因为 $\mathrm{Im}(\oplus d_i)\cong\oplus\mathrm{Im}\, d_i$,所以 M 是 $\mathrm{Im}(\oplus d_i)$的直和项.

对于任意的 $X\in\mathscr{X}$,有

$$\mathrm{Hom}(Q,X)=\mathrm{Hom}(\bigoplus_{m\in Z}(\sum^m\mathbf{P}),X)\cong\prod_{m\in Z}\mathrm{Hom}(\sum^m\mathbf{P},X).$$

由于对每个 $m\in\mathbf{Z}$,$\mathrm{Hom}(\sum^m\mathbf{P},X)$ 均是正合的,因而 $\mathrm{Hom}(Q,X)$也是正合的. 因此,Q 是$\oplus\ \mathrm{Im}\ d_i$ 的一个 $\mathscr{X}$-强完全投射分解,故$\oplus\ \mathrm{Im}\ d_i$ 是一个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,而 M 是其一个直和项. 命题得证.

回想一个 R-模类 $\mathscr{C}$ 称为投射预解类指的是对于一个 R-模短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$,若 $C\in\mathscr{C}$,则 $A\in\mathscr{C}$ 当且仅当 $B\in\mathscr{C}$. 一般的,由所有 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模构成的类不是投射预解类. 事实上,假设所有 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模构成的类是投射预解类. 设 M 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射的而非 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射的(这样的模是存在的),于是由上述命题,存在 $\mathscr{X}$-投射 R-模 N 使得 $N\oplus M$ 为一个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,根据命题 1.3,$T=M\oplus N\oplus M\oplus N\oplus\cdots$是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射的,考虑正合列 $0\to M\to M\oplus T\to T\to 0$,由于 $M\oplus T\cong T$,从而有正合列 $0\to M\to T\to T\to 0$,故 M 是一个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,矛盾! 我们有如下的结果:

命题 1.5 设 $0\to N\to M\to Q\to 0$ 为 R-Mod 中的一短正合列,且 Q 为一投射左R-模,则 N 为 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模当且仅当 M 为 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模.

证明 必要性:如果 N 为 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,则根据命题 1.3,$M\cong N\oplus Q$ 为 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模.

充分性:若 $M\cong N\oplus P$ 为 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,则存在正合列 $0\to N\oplus Q\to P\to N\oplus Q\to 0$,其中 P 为一投射左R-模. 考虑 $N\oplus Q\to P$ 和 $N\oplus Q\to N$ 的推出图:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & N\oplus Q \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N\oplus Q \arrow[r, equal] \arrow[d] & N\oplus Q \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由于 N 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模(它是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模的直和项),所以利用第三列,可得 Q'是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模,从而 $\mathrm{Ext}_R^1(Q',Q)=0$. 于是,正合列 $0\to Q\to P\to Q'\to 0$ 是可裂的,故 Q'是投射模. 现考虑 $Q'\to N\oplus Q$ 和 $N\to N\oplus Q$ 的拉回图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q'' \arrow[r] \arrow[d] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & N\oplus Q \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

于是得到正合列 $0\to N\to Q''\to N\to 0$ 且 Q''是投射

模. 由于 N 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模,故对任意的 $T\in\mathscr{X}$ 和所有的 $i\geqslant 1$,均有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,T)=0$. 从而根据命题 1.2②,N 是一个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模.

注 1.2　根据上述命题充分性的证明,若有 R-Mod 中的可裂短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$,且有 B 是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射的,$C\in\mathscr{X}$,则有 C 是投射的.

命题 1.6　设 R 为交换环,Q 为投射 R-模. 若 M 是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模,则 $M\otimes_R Q$ 也是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模.

证明　若 M 为 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模, 由定义知存在短正合列 $0\to M\to P\to M\to 0$, 其中 $P\in P(R)$,且对任意的 $X\in\mathscr{X}$, $i>0$, $\mathrm{Ext}_R^i(M, X)=0$. 故可得下述短正合列

$$0\to M\otimes_R Q\to P\otimes_R Q\to M\otimes_R Q\to 0,$$

又因为 R 为交换环, 所以 $P\otimes_R Q\in P(R)$.

则对任意的 $i>0$, $X\in\mathscr{X}$, 均有

$$\mathrm{Ext}_R^i(M\otimes_R Q, X)\cong \mathrm{Hom}(Q, \mathrm{Ext}_R^i(M, X))=0.$$

故由 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模的等价命题知 $M\otimes_R Q$ 也为 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模.

命题 1.7　设 K 是一个域,且 R 是一个交换 K-代数. 若 Q 是一个可数生成自由左 R-模,则 M 是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模当且仅当 $M\otimes_R Q$ 是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射模.

证明　必要性利用命题 1.6 可得.

下证充分性. 因为 $M\otimes_R Q$ 是一个 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射 R-模,故存在正合列 $0\to M\otimes_R Q\to P\to M\otimes_R Q\to 0$,其中 P 是投射 R-模. 考虑由 $P\to M\otimes_R Q$ 和 $M\otimes_R(Q\oplus Q)\to M\otimes_R Q$ 得到的拉回图:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M\otimes_R Q \arrow[r, equal] \arrow[d] & M\otimes_R Q \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M\otimes_R Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & T \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_R Q(N\oplus Q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M\otimes_R Q \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_R Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由命题 1.5 可知 T 是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射的,且有正合列 $0\to M\otimes_R Q\otimes_R Q\to T\otimes_R Q\to P\otimes_R Q\to 0$. 因 Q 是可数生成自由模,从而有

$$Q\otimes_R Q=\varinjlim(Q\otimes R^n)\cong Q,$$

于是有正合列 $0\to M\otimes_R Q\to T\otimes_R Q\to P\otimes_R Q\to 0$.

考虑正合列 $0\to M\to T\to C\to 0$,利用函子 $-\otimes_R Q$ 作用,得到 $C\otimes_R Q\cong P\otimes_R Q$ 是投射的,因此由文献[11]中第二节的定理 3 得到 C 是投射的. 再由命题 1.5 可知 M 是 $\mathscr{X}$-强 Gorenstein 投射的.

参考文献(References)

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable module theory[J]. Mem Amer Math Soc, 1969, 94:1-20.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Math Z, 1995, 220: 611-633.

[3] CHRISTENSEN L W. Gorenstein Dimensions[M]. Berlin: Springer, 2000.

[4] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. J Pure Appl Algebra, 2004, 189: 167-193.

[5] BENNIS D, MAHDOU N. Gorensten global dimensions[J]. Pro Amer Math Soc, 2010, 138: 461-465.

[6] LI Z W, ZHANG P. A construction of Gorenstein-projective modules[J]. J Algebra, 2010, 323: 1802-1812.

[7] BENNIS D, OUARGHI K. $\mathscr{X}$-Gorenstein projective modules[J]. Inter Math Forum, 2010, 5(10): 487-491.

[8] DING N Q, LI Y L, MAO L X. Strongly Gorenstein flat modules[J]. J Aust Math Soc, 2009, 86: 323-338.

[9] BENNIS D, MAHDOU N. Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules[J]. J Pure App Algebra, 2007, 210: 435-445.

[10] WANG J, XU X W, ZHAO Z B. $\mathscr{X}$-Gorenstein projective dimensions[DB/OL]. [2019-05-01]. https://arxiv.org/abs/1801.09127.

[11] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京: 高等教育出版社,1998.