

# 使用三角网格上的样条求解带有非齐次边界的 PDE

汪志华<sup>1,2,3</sup>, 康红梅<sup>1,4</sup>

(1. 中国科学技术大学数学科学学院, 安徽合肥 230026; 2. 上海财经大学浙江学院公共基础部, 浙江金华, 321013;  
3. 安庆师范大学数理学院, 安徽安庆 246133; 4. 苏州大学数学科学学院, 江苏苏州 215006)

**摘要:** 对于带有齐次边界的 PDE 问题, 可以在基于 II 型三角剖分的样条空间  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  上直接进行求解. 对于带有非齐次边界的 PDE 问题, 由于  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基函数在边界上全部退化零, 因此如果仍然在  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  上进行求解, 得到的解通常是不收敛的. 针对这一问题, 在基于 II 型三角剖分的样条空间  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  与  $S_{2}^{1}(\Delta_{mn}^{(2)})$  上, 将  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基函数与  $S_{2}^{1}(\Delta_{mn}^{(2)})$  中那些支撑中心位于参数域边界之外所有的基函数合在一起构成了一组混合样条基函数, 并通过这组混合样条函数对带有非齐次边界的 PDE 问题进行求解. 实验结果表明这个方法得到解是收敛的.

**关键词:** 基于 II 型三角剖分的样条函数; 非齐次边界; 偏微分方程

**中图分类号:** TP391.41 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.0253-2778.2020.07.005

**2010 Mathematics Subject Classification:** 65D11

**引用格式:** 汪志华, 康红梅. 使用三角网格上的样条求解带有非齐次边界的 PDE[J]. 中国科学技术大学学报, 2020, 50(7):901-905.

WANG Zhihua, KANG Hongmei. Using splines on triangular mesh to solve PDE with nonhomogeneous boundary[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020, 50(7):901-905.

## Using splines on triangular mesh to solve PDE with nonhomogeneous boundary

WANG Zhihua<sup>1,2,3</sup>, KANG Hongmei<sup>1,4</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;  
2. Department of Public Foundation, Shanghai University of Finance and Economics Zhejiang College, Jinhua 321013, China;  
3. School of Mathematics and Physics, Anqing Normal University, Anqing 246011, China;  
4. School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou 215006, China)

**Abstract:** The spline spaces  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  defined on type II regular triangulation are directly used to solve the PDE problems with homogeneous boundary. For the PDE problems with nonhomogeneous boundary, the solutions obtained usually do not satisfy the convergence properties if they are still solved in the spline spaces  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$ , because the basis functions of  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  vanish on the boundary of the parameter domain. Here, based on the spline spaces  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  and  $S_{2}^{1}(\Delta_{mn}^{(2)})$  defined on type II regular triangulation, a set of blended spline basis functions were formed by combining the basis functions of  $S_{2}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  with the basis functions of  $S_{2}^{1}(\Delta_{mn}^{(2)})$  whose support centers are all outside the boundary of the parameter domain. The blended spline functions were used to solve the PDE problem with nonhomogeneous boundary. Experiment results show that the solutions obtained by this method are convergent.

**Key words:** spline functions based on type II triangulation; nonhomogeneous boundary; PDE

## 0 引言

在复杂几何物体的建模、数值逼近, 特别是在有限元分析等领域中, 三角剖分上的多项式样条广受欢迎. 与张量积形式的样条相比较, 三角剖分上的样条有着更大的拓扑灵活性, 同时具有更少的自由度, 即在同样光滑度要求下, 其基函数的次数要求更低. 传统的有限元空间通常定义在一个没有悬挂点的三角剖分上. 当构造满足一定光滑度的有限

元空间时, 可以通过提高基函数的次数来达到约束条件, 如利用五次多项式使其具有足够的自由度满足全局的  $C^1$  连续性的 Argyis 元方法. 但考虑到高次多项式在实际应用中的各种局限, 另一种方法则更为可行, 其思路是将当前的每个单元进一步剖分成更小的三角形, 从而达到  $C^1$  连续性约束. Hsieh-Clough-Tocher (HCT) 三角形元将一个三角形元剖分成三个子三角形, 从而满足  $C^1$  连续性. Powell-Sabin B 样条是  $C^1$  连续的二次样条, 它通过将每个

**收稿日期:** 2020-04-20; **修回日期:** 2020-06-08

**基金项目:** 安徽省高校自然科学研究重点项目 (KJ2018A0363, KJ2019A580), 国家自然科学基金青年基金 (11871447, 11801393), 江苏省自然科学基金 (BK20180831) 资助.

**作者简介:** 汪志华, 男, 1979 年生, 博士生/讲师, 研究方向: 计算几何. E-mail: zhihuaw@mail.ustc.edu.cn

**通讯作者:** 康红梅, 博士/副教授. E-mail: khm@suda.edu.cn

单元剖分成 6 个小三角形来满足  $C^1$  连续性要求<sup>[1-2]</sup>. 等几何分析是当前的研究热点之一. Speleers 等构造了分层 Powell-Sabin B 样条, 并探讨了其在等几何分析中的应用<sup>[3-4]</sup>.

对于任意的三角剖分, 定义在其上的样条空间的维数仍是研究难点之一, 到目前为止, 这一问题并没有得到解决, 因为它不仅与剖分的拓扑性质有关, 而且依赖于剖分的几何信息. 在实际应用中, 考虑任意剖分上的样条不是一个经济的选择. 这是因为定义其上的样条空间的基函数难以构造, 而且通常伴随的是次数较高的代价, 这既加大了计算的复杂度, 同时又给样条的控制带来了挑战. 目前, 发展较为成熟的有两类规则的三角剖分: I 型三角剖分与 II 型三角剖分. 文献[5]详细地研究了这两类剖分.

文献[6,9]将层次 B 样条的构造方法推广到规则三角剖分之上, 得到一个具有嵌套结构的二元 B 样条空间序列, 并利用这一样条空间序列进行了曲面拟合及求解椭圆微分方程. 对带有齐次边界的 PDE 问题, 我们通常可以直接在规则 II 型三角剖分上的样条空间  $S_{\frac{1}{2}}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  进行求解. 由于样条空间  $S_{\frac{1}{2}}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  中所有的基函数在正方形区域  $D = [0, 1] \otimes [0, 1]$  的边界上全部退化零, 因而对于带有非齐次边界的 PDE 问题, 如果仍然在样条空间  $S_{\frac{1}{2}}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  上直接进行求解, 则得到的解一般是不收敛的. 本文将针对这一问题进行讨论. 考虑到  $S_{\frac{1}{2}}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  中所有支撑中心在边界之外的基函数在边界上均有支撑, 即在边界上均不为零, 因此, 我们的思路是把这些基函数与  $S_{\frac{1}{2}}^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基函数合在一起, 构成一个新的混合样条空间  $\bar{B}$ , 然后用它求解带有非齐次边界的 PDE 问题.

### 1 规则 II 型三角剖分上的样条

在本节中, 我们简单地介绍一下规则 II 型三角剖分上的样条空间的构造, 详情则请参看文献[5].

所谓的 II 型三角剖分是将一个均匀矩形剖分的每个小矩形单元两条对角线均连接起来而形成的三角剖分, 如图 1 所示. 设单位正方形区域  $D = [0, 1] \otimes [0, 1]$ , 通常区域  $D$  上的 II 型三角剖分记为  $\Delta_{mn}^{(2)}$ , 剖分线分别为

$$\begin{aligned} mx &= i, i = 1, \dots, m - 1; \\ ny &= j, j = 1, \dots, n - 1; \\ ny - mx &= h_1, h_1 = -n + 1, \dots, m - 1; \\ ny + mx &= h_2, h_2 = 1, \dots, m + n - 1. \end{aligned}$$

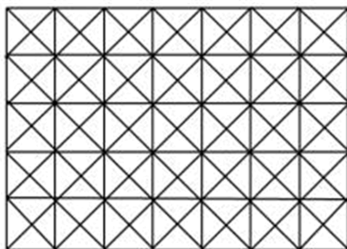


图 1 II 型三角剖分  
Fig. 1 Type II triangulation

将定义在 II 型三角剖分上的样条函数空间记为  $S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(2)})$ , 这里的  $k$  与  $\mu$  分别是样条的次数与光滑度.  $S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(2)})$  的构造及维数问题在文献[5-9]中均有详细的讨论, 这里不再赘述.

命题 1.1<sup>[5]</sup>  $S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(2)})$  的维数公式为

$$\begin{aligned} \dim S_k^\mu(\Delta_{mn}^{(2)}) &= \binom{k+2}{2} + \\ &\quad (3m+3n-4) \binom{k-\mu+1}{2} + \\ &\quad mn \binom{k-2\mu}{2} + (m-1)(n-1) d_k^\mu(4), \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} d_k^\mu(4) &= \frac{1}{2} \left( k - \mu - \left( \frac{\mu+1}{3} \right) \right)_+ \cdot \\ &\quad (3k - 5\mu + 3 \left( \frac{\mu+1}{3} \right) + 1). \end{aligned}$$

要使得基函数具有局部支撑性, 样条函数的次数  $k$  与光滑度  $\mu$  应满足约束  $k > \frac{4\mu+1}{3}$ .

在上述约束条件下,  $S_{\frac{1}{2}}^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  与  $S_{\frac{1}{2}}^2(\Delta_{mn}^{(2)})$  是应用中最为感兴趣的样条空间. 为了讨论的需要, 我们简单地介绍一下样条空间  $S_{\frac{1}{2}}^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  中具有局部支撑的基函数的构造过程.  $B(x, y)$  为样条空间  $S_{\frac{1}{2}}^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  中的一个基函数, 图 2 为它的支撑集、Bézier 纵标及其图像. 其支撑集是如图 2(a) 中的八边形  $Q$ , 其中心为  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .  $B(x, y)$  关于  $x=0, y=0, x+y=0, x-y=0$  对称. 图 2(a) 还给出了一些三角形上的 Bézier 纵标, 根据对称性可以得到其他三角形内的 Bézier 纵标.

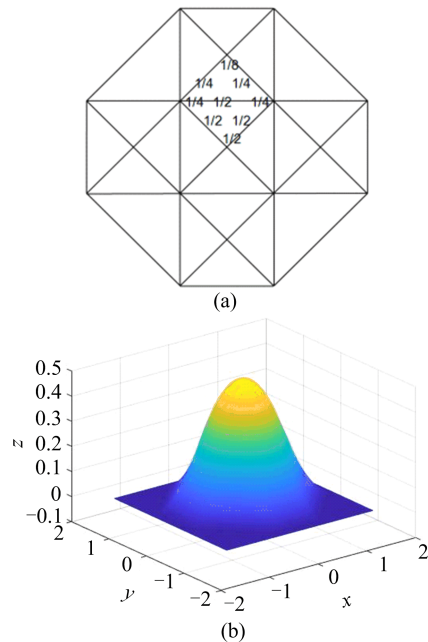


图 2 基函数  $B(x, y)$  的支撑集  $Q$  (a) 和图像 (b)  
Fig. 2 The support  $Q$  (a) and the graph (b) of the basis function  $B(x, y)$

现在将  $B(x, y)$  平移得到  $B_{ij}(x, y)$  :

$$B_{ij}(x, y) = B(mx - i + \frac{1}{2}, ny - j + \frac{1}{2}).$$

记

$$\begin{cases} B = \{B_{ij}(x, y) : (i, j) \in E, (i, j) \neq (i_0, j_0)\}, \\ E = \{(i, j) : i = 0, 1, \dots, m + 1; j = 0, 1, \dots, n + 1\} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $(i_0, j_0)$  为  $E$  中任意一个指标. 由于

$\#B = (m + 2)(n + 2) - 1 = \dim S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$ , 再考虑到  $B$  中函数是线性无关的, 因此  $B$  中的全体函数就构成了样条空间  $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  的一组基函数.

$S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  是指定义如下的样条空间<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)}) = \{s \in S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)}) : s(0, \cdot) = 0, \\ s(1, \cdot) = 0, s(\cdot, 0) = 0, s(\cdot, 1) = 0\} \end{cases} \quad (2)$$

将  $B_{ij}(x, y)$  经过适当的线性组合可以得到

$S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基函数. 令  $\tilde{B}_{i,j}(x, y) \in S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$ , 定义如下:

$$\begin{cases} \tilde{B}_{1,1}(x, y) = B_{1,1}(x, y) - B_{0,1}(x, y) - \\ B_{1,0}(x, y) + B_{0,0}(x, y), \\ \tilde{B}_{m,1}(x, y) = B_{m,1}(x, y) - B_{m+1,1}(x, y) - \\ B_{m,0}(x, y) + B_{m+1,0}(x, y), \\ \tilde{B}_{1,n}(x, y) = B_{1,n}(x, y) - B_{0,n}(x, y) - \\ B_{1,n+1}(x, y) + B_{0,n+1}(x, y), \\ \tilde{B}_{m,n}(x, y) = B_{m,n}(x, y) - B_{m,n+1}(x, y) - \\ B_{m+1,n}(x, y) + B_{m+1,n+1}(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_{i,1}(x, y) = B_{i,1}(x, y) - B_{i,0}(x, y), \\ \tilde{B}_{i,n}(x, y) = B_{i,n}(x, y) - B_{i,n+1}(x, y), \\ \tilde{B}_{1,j}(x, y) = B_{1,j}(x, y) - B_{0,j}(x, y), \\ \tilde{B}_{m,j}(x, y) = B_{m,j}(x, y) - B_{m+1,j}(x, y), \\ i = 2, \dots, m - 1, \\ j = 2, \dots, n - 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \tilde{B}_{i,j}(x, y) = B_{i,j}(x, y), \\ i = 2, \dots, m - 1, j = 2, \dots, n - 1 \end{cases} \quad (5)$$

式 (3) ~ (5) 所定义的样条分别称为空间  $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的角样条、边样条和内部样条. 图 3 给出了这三类样条的支撑.

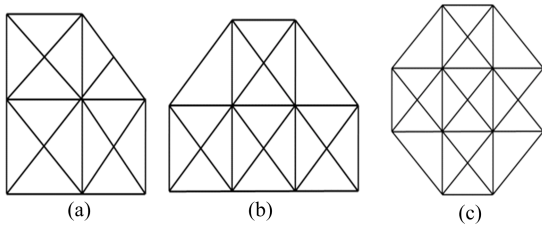


图 3  $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的角样条 (a)、边样条 (b) 与内部样条 (c) 的支撑  
Fig. 3 The supports of corner spline (a), edge spline (b) and inner spline (c) in  $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$

空间  $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的维数为

$$\dim S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)}) = mn - 1.$$

于是  $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基函数可以定义如下:

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \{\tilde{B}_{i,j}(x, y) : (i, j) \in E, (i, j) \neq (i_0, j_0)\}, \\ \tilde{E} &= \{(i, j) : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

这里  $(i_0, j_0)$  是  $\tilde{E}$  中任意一个指标.

从  $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基函数的构造可以看出, 其基函数在  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  边界上全部退化为零.

## 2 基于 II 型三角剖分的混合 B 样条基函数

本节对带有非齐次边界的 PDE 求解问题展开讨论. 我们的思路是将  $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基函数与  $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  中那些支撑中心在  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  边界之外的基函数 (支撑中心在如图 4 所示的红色圆点处的基函数) 合在一起, 张成一个新的混合样条空间, 然后用它对带有非齐次边界的 PDE 问题进行求解.

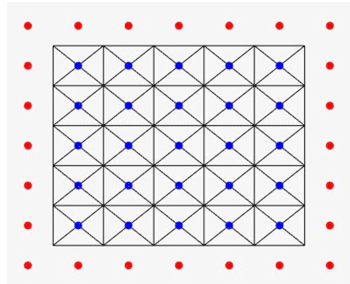


图 4  $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基函数的支撑中心 (红色圆点及蓝色圆点)  
Fig. 4 The support centers of the basis functions of  $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  (red and blue dots)

记  $S_2^1(\Delta_{mn}^{(2)})$  中支撑中心在单位正方形区域  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  边界之外的基函数构成的集合为  $\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$ , 其中,

$$\tilde{B}_1 = \{B_{i,j}(x, y) : i = 0, 1, \dots, m + 1, j = 0, n + 1\},$$

$$\tilde{B}_2 = \{B_{i,j}(x, y) : i = 0, m + 1, j = 1, \dots, n\}.$$

将  $\tilde{B}$  与  $\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$  合并, 记为  $\bar{B}$ , 即

$$\bar{B} = \tilde{B} \cup \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2.$$

现在, 我们证明  $\bar{B}$  中的函数线性无关.

**命题 2.1** 上述集合  $\bar{B} = \tilde{B} \cup \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$  中的样条函数线性无关.

**证明** 令

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m+1} (a_{i,0} B_{i,0}(x, y) + a_{i,n+1} B_{i,n+1}(x, y)) + \\ &\sum_{j=1}^n (b_{0,j} B_{0,j}(x, y) + b_{m+1,j} B_{m+1,j}(x, y)) + \\ &\sum_{\substack{(i,j) \in \tilde{E} \\ (i,j) \neq (i_0,j_0)}} c_{i,j} \tilde{B}_{i,j}(x, y) = 0. \end{aligned}$$

注意到  $\tilde{B}_{i,j}(x, y)$  是  $S_2^{1,0}(\Delta_{mn}^{(2)})$  的基函数, 因此上式左边在  $(\cdot, 0)$  处  $\tilde{B}_{i,j}(x, y) = 0$ , 于是有

$$\sum_{i=0}^{m+1} a_{i,0} B_{i,0}(\cdot, 0) = 0.$$

而

$$\{B_{i,0}(\cdot, 0) : i = 0, 1, \dots, m + 1\}$$

又是线性无关的, 这意味着

$$a_{i,0} = 0, i = 0, 1, \dots, m + 1.$$

可类似得到

$$a_{i,n+1} = 0, i = 0, 1, \dots, m + 1$$

与

$$b_{0,j} = b_{m+1,j} = 0, j = 1, \dots, n + 1.$$

再考虑到  $\tilde{B}_{i,j}(x, y)$  是  $S_2^{1,0}(\Delta_{mm}^{(2)})$  的基函数, 因而  $c_{i,j} = 0$ . 证毕.

由于  $\#\bar{B} = (m + 2)(n + 2) - 1$ , 且  $\bar{B}$  中样条函数线性无关, 因而  $\bar{B}$  构成了基于 II 型三角剖分上带有  $C^1$  约束的二次样条空间的一组新的基函数, 我们称之为基于 II 型三角剖分的混合样条基函数. 我们将在由这一组混合样条基函数所张成的空间上对带有非齐次边界 PDE 问题求解.

### 3 带有非齐次边界的 PDE 问题

考虑下述满足 Dirichlet 边界的 Poisson 问题:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ on } \Omega, \\ u &= g \text{ on } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中,  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ . 我们讨论该方程的弱形式的解, 即在检验空间  $V$  中寻找一个函数  $u$ , 使得对任意的  $v \in V$  有

$$a(u, v) = F(v) \quad (7)$$

式中,  $a$  与  $F$  分别是定义如下的双线性函数与线性泛函:

$$\left. \begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega, \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

检验空间  $V$  取为 Dirichlet 边界的 Sobolev 空间  $H^1(\Omega)$ :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = g \text{ on } \partial\Omega\}.$$

由双线性形式诱导的能量范数定义如下:

$$\|v\|_E = \sqrt{a(u, v)} \quad (9)$$

现在, 我们给出有限元方程的具体计算方式.

第一步 对求解区域  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  进行规则 II 型三角剖分.

第二步 利用节 2 中基于 II 型三角剖分的混合样条基函数  $\bar{B}$  的构造方法, 得到检验函数空间  $\text{span } \bar{B}$ .

第三步 建立有限元方程组. 利用  $\bar{B}$  求解上述椭圆问题(7)的解, 即寻找一个  $u_h \in \text{span } \bar{B}$  使得对所有的检验函数  $v \in \text{span } \bar{B} \subset V$  有

$$a(u_h, v) = F(v) \quad (10)$$

设  $\text{span } \bar{B} = \{B_i\}_{i=1}^l$ ,  $l = (m + 2)(n + 2) - 1$  以及

$u_h = \sum_{i=1}^l c_i B_i$ , 于是问题(10)就转化为求解下述线性方程:  $LC = M$ . 其中,  $L$  是  $l \times l$  矩阵, 其元素为  $L(i, j) = a(B_i, B_j)$ ;  $M$  是有  $l$  个元素的列向量,  $M(i) = F(B_i)$ ;  $C = (c_1, \dots, c_l)$ .

在对求解区域  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  进行 II 型三角剖分得到网格  $T$  之后, 我们考虑基于残差的后验误差估计, 那么需要计算剖分上每个单元的后验误差. 网格  $T$  的单元  $K$  的后验误差定义为

$$\eta_K^2 = h_K^2 \|\Delta u + f\|_{L^2(K)}^2,$$

其中,  $h_K$  是单元  $K$  的直径. 所有单元上的后验误差

之和定义为网格  $T$  的后验误差, 即

$$\eta_T^2 = \sum_{K \in T} \eta_K^2 = \sum_{K \in T} (h_K^2 \|\Delta u + f\|_{L^2(K)}^2).$$

## 4 数值实验

例 4.1 考虑真解函数

$$u(x, y) = xy^2 + x^2y,$$

右端项  $f$  由方程(6)计算可得. 定义域为  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ .

表 1 例 4.1 的求解的数值结果  
Tab. 1 The solution of Example 4.1

DOF	$\ u - u_h\ _{L^2}$	CR	$\ u - u_h\ _{H^1}$	CR
16	0.00242194	—	0.0372678	—
36	0.000302742	3	0.00931695	2
100	3.78427E-5	3	0.00232924	2
324	4.73034E-6	3	0.000582309	2
1156	5.91293E-7	3	0.000145577	2

表 1 给出了不同层次上的  $L^2$  误差和  $H^1$  误差, 以及相应的收敛阶. 图 5(a)与(b)分别是真解与数值解的误差  $\|u - u_h\|_{L^2}$  与  $\|u - u_h\|_{H^1}$  随着自由度 (degree of freedom, DOF) 的变化. 从表 1 与图 5 可以看出, 数值解向真解快速收敛.

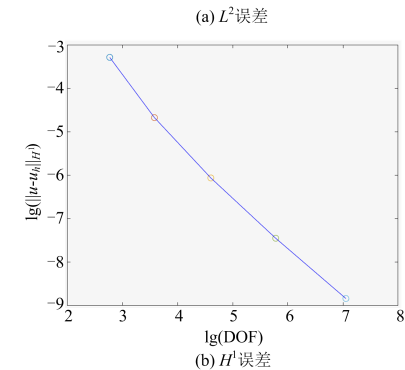
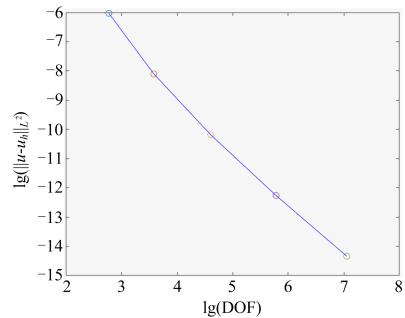


图 5 例 4.1 的收敛速度图像

Fig. 5 Convergence rate graph of Example 4.1

例 4.2 考虑真解函数

$$u(x, y) = \frac{1}{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 + 0.01},$$

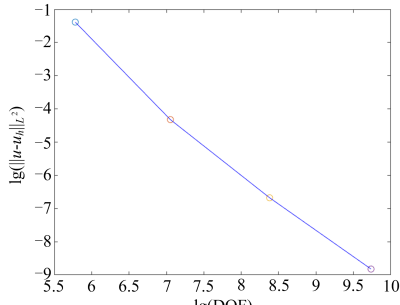
右端项  $f$  仍由方程(6)得到. 定义域为  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . 此函数在边界上不为零, 也即一个非齐次的边界问题.

表 2 给出了不同层次上的  $L^2$  误差和  $H^1$  误差以及相应的收敛阶. 图 6(a)与(b)分别是真解与数值解的误差  $\|u - u_h\|_{L^2}$  与  $\|u - u_h\|_{H^1}$  随着自

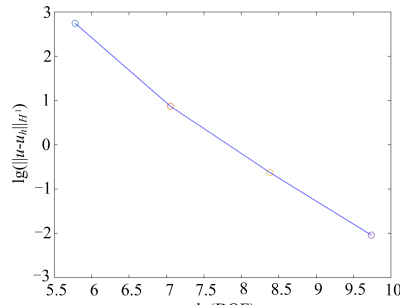
由度的变化. 从表 2 与图 6 可以看出, 数值解逐步变优, 向真解收敛.

表 2 例 4.2 的求解的数值结果  
Tab. 2 The solution of Example 4.2

DOF	$\ u - u_h\ _{L^2}$	CR	$\ u - u_h\ _{H^1}$	CR
324	0.250173	—	15.4755	—
1156	0.0132627	4.23748	2.38512	2.69785
4356	0.00125984	3.39607	0.535373	2.15545
16900	0.000147287	3.09653	0.130414	2.03745



(a)  $L^2$  误差



(b)  $H^1$  误差

图 6 例 4.2 的收敛速度图像

Fig. 6 Convergence rate graph of Example 4.2

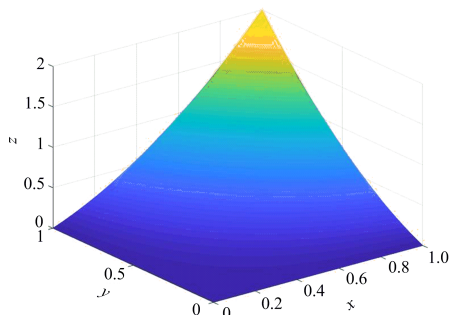


图 7 例 4.1 真解函数在  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  上的图像

Fig. 7 The graph of the true solution of Example 4.1 limited in  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

图 7 给出了例 4.1 真解函数的图像, 此函数在  $\Omega$  边界  $0 < x \leq 1, y = 1$  以及  $0 < y \leq 1, x = 1$  上不为零. 图 8 给出了例 4.2 真解函数的图像, 此函数在  $\Omega$  的全体边界上都不为零. 这两个例子都是带有非齐次的边界问题. 由于样条空间  $S_{2,m,n}^{1,0}(\Delta_{m,n}^{(2)})$  中所有基函数在  $\Omega$  的边界上全部退化为零, 如果在  $S_{2,m,n}^{1,0}(\Delta_{m,n}^{(2)})$  中进行求解, 则得到数值解不可能收敛于真解, 至少在边界附近难以满足收敛要求. 而在基于本文所构造的混合样条空间上求解, 均可以得

到向真解收敛的数值解.

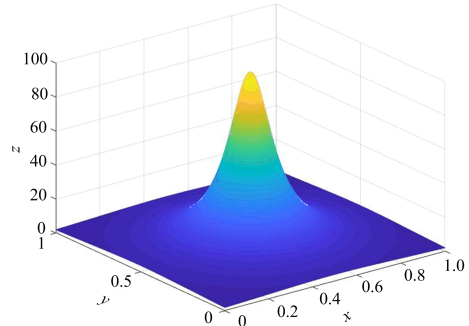


图 8 例 4.2 真解函数在  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  上的图像

Fig. 8 The graph of the true solution of Example 4.2 limited in  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

## 5 结论

本文考虑了基于 II 型三角剖分的样条空间  $S_{2,m,n}^{1,0}(\Delta_{m,n}^{(2)})$  与  $S_{2,m,n}^1(\Delta_{m,n}^{(2)})$ , 将  $S_{2,m,n}^{1,0}(\Delta_{m,n}^{(2)})$  的基函数与  $S_{2,m,n}^1(\Delta_{m,n}^{(2)})$  中支撑中心在边界之外的基函数合在一起构成了基于 II 型三角剖分的一组混合样条基函数, 并通过这组混合样条函数对带有非齐次边界的 PDE 问题进行求解. 数值实验表明, 本文方法可以得到向真解收敛的数值解, 从而解决了在  $S_{2,m,n}^1(\Delta_{m,n}^{(2)})$  上直接求解时难以得到收敛的数值解的问题.

无论是  $S_{2,m,n}^1(\Delta_{m,n}^{(2)})$  与  $S_{2,m,n}^{1,0}(\Delta_{m,n}^{(2)})$ , 还是本文所构造的混合样条空间, 它们的基函数都是全局线性无关的. 如何构造具有局部线性无关性质的基函数是我们的后续工作之一. 层次 T 网格上样条空间的构造是近年来的研究热点, 如何将层次 T 网格上样条函数的构造思想推广到 II 型三角剖分之上, 也是我们后续工作之一.

## 参考文献 (References)

- [1] POWELL M J D, SABIN M A. Piece-wise quadratic approximations on triangles [J]. ACM Trans Math Software, 1977, 3: 316-325.
- [2] PAUL D. On calculating normalized Powell-Sabin B-splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 15: 61-78.
- [3] SPELEERS H, DIERCKX P, VANDEWALLE S. Quasi-hierarchical Powell-Sabin B-splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26: 174-191.
- [4] SPELEERS H, MANNI C, FRANCESCA P, et al. Isogeometric analysis with Powell-Sabin splines for advection-diffusion-reaction problems [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2012, 221-222: 132-148.
- [5] WANG R. Multivariate Splines and Its Application [M]. Beijing: Science Publishers, 1994.
- [6] KANG H M, CHEN F L, DENG J S. Hierarchical B-splines on regular triangular partition [J]. Graphical Models, 2014, 76(5): 289-300.
- [7] 冯玉瑜, 曾芳玲, 邓建松. 样条函数与逼近论 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013.
- [8] QU K. Multivariate splines and some application [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2010.
- [9] KANG H M. Splines suitable for analysis and modeling [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2014.