ISSN 0253—2778

中国科学技术大学学报

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

(SUPPLEMENT)

(增刊)

1987

中国科学技术大学学报

增　　刊

第17卷　（总第57期）

目　　录

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

VOl.17 (Sum No. 57)

CONTENTS

中国科学技术大学学报 JCUST 87001

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

单连通微分流形的定向性

徐森林

（数学系）

定义 1 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 微分流形，$\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\mu\}$ 为微分构造，$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 为局部坐标系．如果存在 $\mathscr{D}_1'\subset\mathscr{D}$ 满足

（1） $\bigcup\limits_{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in D_1'} U_\alpha=M$；

（2）对任何 $(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$，$\{x^i\}\in\mathscr{D}_1'$，$(U_\beta,\ \varphi_\beta)$，$\{y^i\}\in\mathscr{D}_1'$，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$，有

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}>0,\quad (x^1,\cdots,x^n)\in\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta),$$

则称微分流形 $(M,\ \mathscr{D})$ 为可定向的．

一个可定向流形 $(M,\ \mathscr{D})$ 的一个定向是满足（1）和（2）且关于（2）具有最大性的 $\mathscr{D}_1\supset\mathscr{D}$．所谓最大性（3）是：如果 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$，且它与任何 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1$ 满足上述条件（2），则 $(U,\ \varphi)\in\mathscr{D}_1$．以 $\mathscr{D}_1$ 为定向的定向流形，记作 $(M,\mathscr{D},\mathscr{D}_1)$．如果 $(M,\mathscr{D})$ 不是可定向的，则称它为不可定向的微分流形．

易见，满足定义1中条件（1）和（2）的 $\mathscr{D}_1'$ 唯一确定了 $\mathscr{D}_1=\{(U,\varphi)\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}$，它与 $\mathscr{D}_1'$ 中的元素满足条件（2）$\}$，使得 $\mathscr{D}_1'\subset\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}$ 和 $(M,\mathscr{D},\mathscr{D}_1)$ 为一个定向流形．

设 $\rho:R^n\to R^n$，$y=\rho(x)$，其中 $y^i=x^i\ (i=1,\cdots,n-1)$，$y^n=-x^n$．于是，$\mathscr{D}_2=\{(U,\rho\circ\varphi)\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1\}$ 为 $(M,\mathscr{D})$ 的另一定向．更进一步，如果 M 连通，则恰有两个如上所述的

1985年12月15日收到．

定向[1]。

引理 1 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 可定向的微分流形，以 $\mathscr{D}_1$ 为其定向，(U,φ) 为 M 的道路连通的局部坐标系。若存在 $p\in M$ 和 $(U_1,\varphi_1)\in\mathscr{D}_1$，使得 $p\in U\cap U_1$ 且 Jacobi 行列式 $J_{\varphi\circ\varphi^{-1}}(p)>0$，则 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$。

证 设 (U_1',φ_1')，$(U_1'',\varphi_1'')\in\mathscr{D}_1$，$x\in U\cap U_1'\cap U_1''$。由 $\mathscr{D}_1$ 为 M 的一个定向，有 $J_{\varphi_1''\circ\varphi_1'}(x)>0$。再根据 $J_{\varphi_1''\circ\varphi_1^{-1}}(x)=J_{\varphi_1''\circ\varphi_1'^{-1}}(x)\cdot J_{\varphi_1'\circ\varphi^{-1}}(x)$ 得到 $J_{\varphi_1''\circ\varphi^{-1}}(x)$ 和 $J_{\varphi_1'\circ\varphi^{-1}}(x)$ 有相同的符号。构造函数 $J_\varphi(x)=\mathrm{sgn}J_{\varphi_1'\circ\varphi^{-1}}(x)$，$x\in U$。显然，$J_\varphi(x)$ 是局部为常值 1 或 -1 的函数。从 U 的道路连通性和连续函数的零值定理可知，$J_\varphi(x)$ 为常值 1 或 -1 的函数。因为 $J_\varphi(p)=\mathrm{sgn}J_{\varphi_1\circ\varphi^{-1}}(p)=1$，所以 $J_\varphi(x)=1$，$x\in U$。这就证明了 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$。

定理 1 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 微分流形，则 $(M,\mathscr{D})$ 不可定向 $\langle\Longrightarrow\rangle$ 存在道路连通的局部坐标系 $\{(U_i,\varphi_i)\in\mathscr{D}\mid i=1,\cdots,k\}$ 和 $p_k\in U_k\cap U_1$，$p_i\in U_i\cap U_{i+1}$，$i=1,\cdots,k-1$，满足 $J_{\varphi_{i+1}\circ\varphi_i^{-1}}(p_i)>0$ 和 $J_{\varphi_1\circ\varphi_k^{-1}}(p_k)<0$。

证 $(\langle\Longrightarrow)$ 假设 $(M,\mathscr{D})$ 为可定向的 n 维 C^∞ 微分流形，$\mathscr{D}_1$ 为其定向。取 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$，使得 $p_1\in U\cap U_1$，且 $J_{\varphi_1\circ\varphi^{-1}}(p_1)>0$（否则用 $(U_i,\rho\circ\varphi_i)$ 代替 (U_i,φ_i)）。由引理 1，$(U_1,\varphi_1)\in\mathscr{D}_1$，又因为 $J_{\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}}(p_2)>0$，同理可知 $(U_2,\varphi_2)\in\mathscr{D}_1$。依次类推得到 $(U_i,\varphi_i)\in\mathscr{D}_1$，$i=1,\cdots,k$。但是，根据题设，$J_{\varphi_1\circ\varphi_k^{-1}}(p_k)<0$ 必有 $(U_k,\varphi_k)\bar{\in}\mathscr{D}_1$，矛盾。

$(\Longrightarrow\rangle)$ 设 $(M,\mathscr{D})$ 不可定向，则至少有一道路连通分支作为 $(M,\mathscr{D})$ 的 C^∞ 正则开子流形是不可定向的。不失一般性，设 M 是道路连通的。固定点 $p\in M$，对任何 $x\in M$，则存在连结 p 和 x 的道路 f_{px}：$[0,1]\to M$。因为 $f_{px}([0,1])\subset M$ 为紧致集合，所以存在道路连通的局部坐标系 $(U_i^x,\varphi_i^x)\in\mathscr{D}$，$i=1,\cdots,k(x)$，使得 $f_{px}([0,1])\subset\bigcup_{i=1}^{k(x)}U_i^x$。且有 $p_i^x\in f_{px}([0,1])\cap U_i^x\cap U_{i+1}^x$，$i=1,\cdots,k(x)-1$，$p\in U_1^x$，$x\in U_{k(x)}^x$，$J_{\varphi_{i+1}^x\circ(\varphi_i^x)^{-1}}(p_i^x)>0$。令 $\mathscr{D}_1'=\{(U_i^x,\varphi_i^x)\mid x\in M,\ i=1,\cdots,k(x)\}$，从 $\bigcup_{x\in M}\bigcup_{i=1}^{k(x)}U_i^x=M$ 以及 $(M,\mathscr{D})$ 不可定向可知，必有 $a,b\in M$，使得 $J_{\varphi_i^a\circ(\varphi_j^b)^{-1}}(c)<0$，其中 $c\in U_i^a\cap U_j^b$。于是，(U_i^a,φ_i^a)，$\cdots$，(U_1^a,φ_1^a)，(U_1^b,φ_1^b)，$\cdots$，(U_j^b,φ_j^b)，$p_{i-1}^a,\cdots,p_1^a,p_1^b,\cdots,p_{j-1}^b$，$c$ 满足定理中右边的条件。

定义 2 设 $X,\tilde{X}$ 为拓扑空间，π：$\tilde{X}\to X$ 为连续的满映射。如果对每个点 $x\in X$，都有 x 的开邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 可表为 $\tilde{X}$ 中若干互不相交的开集 V_α 的并，并且对于每个 α，$\pi|_{V_\alpha}$：$V_\alpha\to U$ 为同胚，则称 π 为复盖映射，$\tilde{X}$ 为复盖空间，简记为 $(\tilde{X},X,\pi)$，其中满足上述条件的 U 称为基本开邻域，X 称为底空间。如果对任何 U，指标 α 的个数总是 m，则称此复盖空间是 m 层的。

定义 3 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 微分流形，$\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\mu\}$ 为其微分构造，记 $U_\alpha\times R(\alpha\in\mu)$ 的不交并为 $\coprod_{\alpha\in\mu}U_\alpha\times R$，由 $\tau_1=\{V\mid V$ 为 $U_\alpha\times R$ 的开集，$\alpha\in\mu\}$ 为拓扑基唯一确

定了 $\coprod_{\alpha\in\mu} U_\alpha\times R$ 的一个拓扑 τ，使得 $\left(\coprod_{\alpha\in\mu} U_\alpha\times R,\tau\right)$ 为 Hausdorff 拓扑空间.

设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}\in\mathscr{D}$, $(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}\in\mathscr{D}$，如果 $p\in U_\alpha, q\in U_\beta$；且 $p=q$, $\eta=\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)\xi$，则称 (p,ξ) 等价于 (q,η)，记作 $(p,\xi)\sim(q,\eta)$. 容易验证，$\sim$ 是一等价关系. 记商集合 $\left(\coprod_{\alpha\in\mu} U_\alpha\times R\right)\Big/\sim=\det M$，商拓扑为 $\tau_\sim$，于是，$(\det M,\tau_\sim)$ 为商拓扑空间. 我们定义 ψ_α: $U_\alpha\times R\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\times R$, $\psi_\alpha(p,\xi)=(\varphi_\alpha(p),\xi)=(x^1,\cdots,x^n,\xi)$. 显然，$\psi_\alpha$ 为同胚；同样可定义 ψ_β: $U_\beta\times R\to\varphi_\beta(U_\beta)\times R$, $\varphi_\beta(q,\eta)=(\varphi_\beta(q),\eta)=(y^1,\cdots,y^n,\eta)$，而 ψ_β 为同胚. 此外，还可看出 $y^1,\cdots,y^n$ 为 $x^1,\cdots,x^n$ 的 C^∞ 函数，η 为 $x^1,\cdots,x^n,\xi$ 的 C^∞ 函数. 这就证明了 $\widetilde{\mathscr{D}}'=\{(U_\alpha\times R,\psi_\alpha)\mid\alpha\in\mu\}$ 为 $\det M$ 的一个微分构造的基，它唯一确定了 $\det M$ 上的一个微分构造 $\widetilde{\mathscr{D}}$，使得 $(\det M,\widetilde{\mathscr{D}})$ 为 $n+1$ 维 C^∞ 微分流形.

现在，在 $\det M-\{(p,0)\mid p\in U_\alpha\subset M,\ \alpha\in\mu\}$ 中再引进一个等价关系：如果 $\xi_1\cdot\xi_2>0$，则称 (p,ξ_1) 等价于 (p,ξ_2)，记作 $(p,\xi_1)\backsim(p,\xi_2)$. 设此等价关系下的商拓扑空间为 $(S^\circ(M),\tau_\backsim)$，其中 $S^\circ(M)=(\det M-\{(p,0)\mid p\in U_\alpha\subset M,\ \alpha\in\mu\})/\backsim$，$\tau_\backsim$ 为商拓扑. 仔细验证可以知道，$S^\circ(M)$ 为 M 上的 2 层复盖空间，记复盖映射为 π: $S^\circ(M)\to M$, $\pi([(p,\xi)])=p$，（$[(p,\xi)]$ 表示 (p,ξ) 在 $\backsim$ 下的等价类）.

引理 2 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 连通的微分流形，则 $S^0(M)$ 至多只有两个连通分支.

证 根据定义 3，$S^0(M)$ 的每个连通分支都为其开集. 此外，因为 $S^0(M)$ 与 M 局部微分同胚，它也是一个 n 维流形. 设 C_1 为 $S^0(M)$ 的任一连通分支，显然 $\pi(C_1)$ 为 M 的开集，下面证明 $\pi(C_1)=M$.（反证）假设 $\pi(C_1)\subsetneqq M$，则存在 $p_0\in M-\pi(C_1)$ 及 $p_n\in\pi(C_1)$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=p_0$. 选取 p_0 的连通基本坐标开邻域 U, $\pi^{-1}(U)=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\phi$, $\pi|_{V_1}$: $V_1\to U$ 和 $\pi|_{V_2}$: $V_2\to U$ 为同胚，于是 V_1 和 V_2 也是连通的. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=p_0$，存在 $p_{n_0}\in U$, $p'_{n_0}\in V_1$, $p''_{n_0}\in V_2$，使得 $\pi(\tilde{p}'_{n_0})=\pi(\tilde{p}''_{n_0})=p_{n_0}$. 从 $p_{n_0}\in\pi(C_1)$ 可推出 $\tilde{p}''_{n_0}\in C_1$ 或 $\tilde{p}''_{n_0}\in C_1$，不妨设 $\tilde{p}'_{n_0}\in C_1$. 再根据 V_1 的的连通性和 C_1 为连通分支，我们可以得到 $V_1\subset C_1$，所以 $p_0\in U=\pi(V_1)\subset\pi(C_1)$，这与 $p_0\bar{\in}\pi(C_1)$ 相矛盾.

（反证）假设 $S^0(M)$ 至少有三个不同的连通分支 C_1, C_2 和 C_3. 由上述证得 $\pi(C_1)=\pi(C_2)=\pi(C_3)=M$，所以对任何 $p\in M$, $\pi^{-1}(p)$ 至少有三个不同的点组成，这与 $\pi^{-1}(p)$ 恰有两点组成相矛盾. 因而就证明了 $S^0(M)$ 至多只有两个连通分支.

注 1 因为 $S^0(M)$ 为 n 维流形，故连通分支与道路连通分支相一致.

引理 3 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 连通的微分流形，则 M 可定向 $\Longleftrightarrow S^0(M)$ 恰有两个连通分支.

证 （$\Longrightarrow$）设 M 可定向，$\mathscr{D}_1$ 为其定向，则存在 M 的连通的基本坐标开邻域族 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1\mid\alpha\in\nu\}$，使得 $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha=M$, $\pi^{-1}(U_\alpha)=V_{\alpha1}\cup V_{\alpha2}$, $V_{\alpha1}\cap V_{\alpha2}=\phi$, $\pi|_{V_{\alpha1}}$: $V_{\alpha1}\to U_\alpha$ 和 $\pi|_{V_{\alpha2}}$: $V_{\alpha2}\to U_\alpha$ 为同胚，其中 $V_{\alpha1}=\{[(p,\xi)]\mid\xi>0\}$, $V_{\alpha2}=\{[(p,\xi)]\mid\xi<0\}$. 因为 M 为连通流形，因而道路连通，易见 $\bigcup\limits_\alpha V_{\alpha1}$ 和 $\bigcup\limits_\alpha V_{\alpha2}$ 也都连通.（反证）如果 $S^0(M)=\left(\bigcup\limits_\alpha V_{\alpha1}\right)\cup$

$\left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha 2}\right)$连通，则存在在$\sim$下的等价类$[\tilde{p}_0]\in V_{\alpha 1}\cap V_{\beta 2}$. 设$\pi(\tilde{p}_0)=p_0$，$(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$和$(U_\beta,\varphi_\beta)$，$\{y^i\}$为相应的坐标系，而$\tilde{p}_0$在$U_\alpha\times R$中坐标为$(x^1,\cdots,x^n,\xi)$，在$U_\beta\times R$中坐标为$(y^1,\cdots,y^n,\eta)$，$\eta=\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)\cdot\xi$，由$\xi\cdot\eta<0$推出$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)\Big|_{p_0}<0$，这与$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)>0$相矛盾. 所以$S^0(M)$恰有两个连通分支.

($\Leftarrow$) 设$S^0(M)$恰有两个连通分支C_1和C_2. 选取M的连通的基本坐标开邻域族$\mathscr{D}_1'=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}\mid\alpha\in\nu\}$使得$\bigcup_\alpha U_\alpha=M$，且相应的$V_{\alpha 1}\subset C_1$. 易见，对任何两个$\mathscr{D}_1'$中的坐标邻域，由于$\xi\cdot\eta>0$及$\eta=\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)\xi$得到$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)>0$. 于是，$\mathscr{D}_1'$确定了$M$的一个定向$\mathscr{D}_1$，而$(M,\mathscr{D},\mathscr{D}_1)$是以$\mathscr{D}_1$为定向的微分流形.

引理 4 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞的连通的微分流形. 则M不可定向$\Leftrightarrow S^0(M)$只有一个连通分支.

证 这是引理3的直接推论.

定义 4 如果拓扑空间(X,τ)是道路连通的，且X中的任何闭道路f_1：$I=[0,1]\to X$，$f(0)=f(1)=p_0$都同伦于常值道路f_0：$I\to X$，$f_0(t)=p_0$，即存在连续映射F：$I\times I\to X$使得$F(t,0)=f_0(t)=p_0$，$F(t,1)=f_1(t)$和$F(0,s)=F(1,s)=p_0$，则称此拓扑空间(X,τ)为单连通的.

定理 2 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞的单连通的微分流形，则$(M,\mathscr{D})$是可定向的.

证 (反证) 假设$(M,\mathscr{D})$是不可定向的，由引理4和注1，$S^0(M)$只有一个道路连通分支. 任取$p_0\in M$，则$\pi^{-1}(p_0)=\{\tilde{p}_0',\tilde{p}_0''\mid\tilde{p}_0'\neq\tilde{p}_0''\}$. 于是存在连结$\tilde{p}_0'$和$\tilde{p}_0''$的道路$\tilde{f}_1$：$I\to S^0(M)$，$\tilde{f}_1(0)=\tilde{p}_0'$，$\tilde{f}_1(1)=\tilde{p}_0''$. 记$f_1=\pi\circ\tilde{f}_1$，显然，$f_1(0)=\pi\circ\tilde{f}_1(0)=\pi(\tilde{p}_0')=p_0$，$f_1(1)=\pi\circ\tilde{f}_1(1)=\pi(\tilde{p}_0'')=p_0$，即$f_1$：$I\to M$是以$p_0$为起点和终点的闭道路. 又因为$M$是单连通的，故存在同伦$F$：$I\times I\to M$，使得$F(t,0)=f_0(t)=p_0$，$F(t,1)=f_1(t)$，$F(0,s)=F(1,s)=p_0$.

现构造F的升腾$\tilde{F}$：$I\times I\to S^0(M)$ (即$\tilde{F}$连续，且$\pi\circ\tilde{F}=F$) 如下. 对于给定的F，首先定义$\tilde{F}(0,0)=\tilde{p}_0$. 由$F$连续和$I\times I$的紧致性，可以选取$I$的一个足够细的分割：

$$t_0<t_1<\cdots<t_m$$
$$s_0<s_1<\cdots<s_n$$

使得每个矩形

$$I_i\times I_j=[t_{i-1},t_i]\times[s_{j-1},s_j],\quad i=1,\cdots,m;\quad j=1,\cdots,n,$$

都被F映到复盖空间$S^0(M)$的某个基本坐标邻域中. 以下逐步定义F的升腾$\tilde{F}$：先从矩形$I_1\times J_1$开始，然后是$I_i\times J_1$，$i=2,\cdots,m$；再是$I_i\times J_2$，$i=1,\cdots,m$；$\cdots$，最后是$I_i\times J_n$，$i=1,\cdots,m$.

对于给定的i_0和j_0，假定$\tilde{F}$在$A=\left(\bigcup_{\substack{1\le j<j_0\\1\le i\le m}} I_i\times J_j\right)\cup\left(\bigcup_{\substack{i=i_0\\1\le j<j_0}} I_i\times J_{j_0}\right)$上已经定义.

现在着手在 $I_{i_0}\times J_{j_0}$ 上定义 $\tilde{F}$. 在M中选取一个连通的基本坐标邻域 $U\supset F(I_{i_0}\times J_{j_0})$, $\pi^{-1}(U)=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\phi$, $\pi|_{V_1}$: $V_1\to U$ 和 $\pi|_{V_2}$: $V_2\to U$ 为同胚. $\tilde{F}$ 在集合 $B=A\cap(I_{i_0}\times J_{j_0})$ 上已有定义，而集合B恰为矩形 $I_{i_0}\times J_{j_0}$ 的左边和底边的并，因而是连通的. 从而 $\tilde{F}(B)$ 是连通的，所以它应当完全包含在 V_1 或者 V_2 中，不妨设 $\tilde{F}(B)\subset V_1$.

因为 $\tilde{F}$ 是 $F|_A$ 上的一个升腾，所以当 $(t,s)\in B$ 时，

$$\pi|_{V_1}(\tilde{F}(t,s))=\pi(\tilde{F}(t,s))=F(t,s)$$

从而 $\tilde{F}(t,s)=(\pi|_{V_1})^{-1}(F(t,s))$. 因此，当 $(t,s)\in I_{i_0}\times J_{j_0}$ 时，定义 $\tilde{F}(t,s)=(\pi|_{V_1})^{-1}(F(t,s))$. 这样，便将 $\tilde{F}$ 延拓到 $I_{i_0}\times J_{j_0}$ 上了. 根据拼合引理，延拓以后的映射是连续的. 按照这种方式继续下去，我们在 $I\times I$ 上定义了 $\tilde{F}$，且它是F的升腾，即 $\pi\circ\tilde{F}=F$.

由于 $\pi\circ\tilde{F}(0,s)=F(0,s)=p_0$，故 $\tilde{F}(0\times I)\subset\pi^{-1}(x_0)$. 因为 $0\times I$ 连通和 $\tilde{F}$ 连续，所以 $\tilde{F}(0\times I)$ 也是连通的. 但是，集合 $\pi^{-1}(p_0)$ 恰有两点组成，它是离散的. 由 $\tilde{F}(0,0)=\tilde{p}_0'$ 可知 $\tilde{F}(0\times I)=\{\tilde{p}_0'\}$；类似地，$\pi\circ\tilde{F}(t,0)=F(t,0)=f_0(t)=p_0$，故 $\tilde{F}(I\times 0)\subset\pi^{-1}(p_0)$，$\tilde{F}(I\times 0)=\{\tilde{p}_0'\}$；$\pi\circ\tilde{F}(1,s)=F(1,s)=p_0$，故 $\tilde{F}(1\times I)\subset\pi^{-1}(p_0)$，$\tilde{F}(1\times I)=\{\tilde{p}_0'\}$.

再证 $\tilde{F}(t,1)=\tilde{f}_1(t)$，由上述，$\tilde{F}(0,1)=\tilde{p}_0=\tilde{f}_1(0)$. 假设对于所有的 t，$0\leqslant t\leqslant t_i$，有 $\tilde{F}(t,1)=\tilde{f}_1(t)$. 设 V_1 如前，因为 $\tilde{F}(t_i,1)=\tilde{f}(t_i)\in V_1$，并且 $\tilde{F}([t_i,t_{i+1}]\times 1)$ 和 $\tilde{f}_1([t_i,t_{i+1}])$ 连通，故 $\tilde{F}([t_i,t_{i+1}]\times 1)\subset V_1$，$\tilde{f}_1([t_i,t_{i+1}])\subset V_1$，于是当 $t\in[t_i,t_{i+1}]$ 时，

$$\tilde{F}(t,1)=(\pi|_{V_1})^{-1}(F(t,1))=(\pi|_{V_1})^{-1}(f_1(t)=\tilde{f}_1(t)$$

如此继续下去，得到 $\tilde{F}(t,1)=\tilde{f}_1(t)$，$t\in[0,1]$. 由此，有 $\tilde{p}_0'{}'=\tilde{f}_1(1)=\tilde{F}(1,1)=\tilde{p}_0'$，这与 $\tilde{p}_0'\neq\tilde{p}_0'{}'$ 相矛盾. 于是就证明了 $(M,\mathscr{D})$ 是可定向的.

注 2 $\tilde{F}$ 是连结 $\tilde{f}_0=\tilde{F}(,0)$ 和 $\tilde{f}_1=\tilde{F}(,1)$ 的同伦. 只要 $\tilde{F}(0,0)$ 给定，$\tilde{F}$ 唯一确定.

参 考 文 献

[1] 徐森林，流形和 Stokes 定理，人民教育出版社，1983，253-254.

The Orientability of a Simply Connected Manifold

Xu Senlin

(Department of Mathematics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87002

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

网络图论中的几个问题

王树禾 刘根泉

(数学系) (电子电工教研室)

正规树是 Bryant 1959年[5]提出的电网络中的重要概念，多年来，一直沿用物理型定义来寻求正规树．本文给出正规树的数学模型，并建立了求取正规树的有效算法和正规树存在的充分必要条件．

开关网络的综合，目前常用的矩阵化程序[2]得到的结果未必唯一，本文给出综合唯一性和同构性的充分必要条件，而且判定这些条件的时间复杂度是多项式的，在理论上，建立了两图同构的必要条件．

另外，我们给出均匀 2 —树的概念和有效算法．

1 正规树及其存在性

定义 1 给定连通图G，$E_i\subset E(G)$，$i=1,2,3,4$；$E_i\cap E_j=\phi$，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leq 4$；且T是满足下列条件的G之生成树：

$$E_1\subseteq E(T),\ E_2\cap E(T)=\phi$$

$$|E_3\cap E(T)|-|E_4\cap E(T)|=\max$$

则称T为G的关于边子集E_1,E_2,E_3,E_4的正规树．

定义 2 设$V_i\subset V(G)$，$V_i\neq\phi$；$V_i\cap V_j=\phi$，$i\neq j$，$1\leq i,j\leq k$，则称图$G'(V',E')$为$G(V,E)$关于伙顶$V_1,V_2,V_3\cdots,V_k$的伙顶图，其中

$$V'(G')=(V(G)-\bigcup_{i=1}^{k}V_i)\cup\{V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_k\}$$

1986年5月13日收到．

$$E'(G')=E(G)-\bigcup_{i=1}^{k}E(G[V_i])$$

G' 中的关联关系与G中的关联关系一致，只是当 G' 中的边G在中与V_i 中的顶关联时，在 G' 中变为与伙顶V_i 相关联.

定理 1 连通图G存在关于E_1，E_2,E_3,E_4 的正规树的充分必要条件是$G_2=G-E_2$连通，且$G[E_1]$ 是林.

证 若G_2 连通，$G[E_1]$为林，设此林中之树为T_1，T_2，…，T_t，令G'_2 是G_2 的关于伙顶$V(T_1)$，$V(T_2)$，…，$V(T_t)$ 的伙顶图，显然G'_2 仍连通，设T_0 是G'_2 的生成树，又设 $|T_i|=q_i\geqslant 1$，$i=0,1,2,\cdots,t$。则 $T=G\left[E(T_0)\cup\bigcup_{i=1}^{t}E(T_i)\right]$ 是G_2 的连通子图，又$|T|=|G_2|=|G|$，

$$\|T\|=\sum_{i=0}^{t}\|T_i\|=\left\{\left[|G_2|-\sum_{i=1}^{t}(q_i-1)\right]-1\right\}+\sum_{i=1}^{t}(q_i-1)=|G_2|-1=|T|-1$$

即T是边数比顶数少 1 的 G_2 的连通生成子图，所以T是 G_2 的含 E_1 一切边的生成树，但不含E_2 中的边.

令$\mathscr{T}$是 G_2 的含 E_1 一切边的生成树集合，取 $T'\in\mathscr{T}$，满足

$$|E_3\cap E(T')|-|E_4\cap E(T')|=\max_{T\in\mathscr{T}}\{|E_3\cap E(T)|-|E_4\cap E(T)|\}$$

则 T' 为G的正规树.

反之，若已知 T' 为G的正规树，则 $E_2\cap E(T')=\phi$，$E_1\subseteq E(T')$，故 $G_2=G-E_2$ 有生成树 T'，所以 G_2 连通，且 $G[E_1]$ 是 T' 之子图，是林. 定理 1 证毕.

我们可以用 DFS 算法判定 $G-E_2$ 是否连通，用“逐次删叶法”判定 $G[E_1]$ 是否为林（我们把树也称林），所以判别定理 1 中条件是否具备的时间复杂度为$O(|E|)$.

2 求正规树的算法

定理 2 若连通图G的关于V_1，V_2，…，V_k 的伙顶图为 G'，T' 为G' 的生成树，$G[V_i]$的生成树为 T_i，则

$$T=G\left[E(T')\cup\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k}E(T_i)\right]$$

是G的生成树.

证 因$V(G)$ 的每个顶皆与$E(T')\cup\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k}E(T_i)$ 中的边相关联，故T是G的生成子图，且显然T连通. 又

$$|T'|-1=|E(T')|$$
$$|T_i|-1=|E(T_i)|$$

$$|T|=|T'|+\sum_{i=1}^{k}|T_i|-k$$

$$\|T\| = |E(T')| + \sum_{i=1}^{k} |E(T_i)| = |T'| - 1 + \sum_{i=1}^{k} (|T_i| - 1) = |T| - 1$$

所以T是G的生成树，定理 2 证毕.

算法 1 求正规树的算法。假设定理 1 的条件具备，求G的关于E_1，E_2，E_3，E_4的正规树的算法如下：

（1）作 $G_2 = G - E_2$，$E_5 = E(G) - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant 4} E_i$.

（2）设 $G[E_1] = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant t} T_i$，$T_1$，$T_2$，$\cdots T_t$ 为两两无公共顶的树，作G_2关于伙顶$V(T_1)$，$\cdots$，$V(T_t)$的伙顶图G'_2，取$G_4 = G'_2 - E_4 - E_5$.

（3）用 DFS 判定G_4是否连通：(a) 是，转（4）；(b) 否，转（5）.

（4）用 DFS 求得G_4之生成树$T^{(4)}$，则

$$T = G\left[E(T^4) \cup \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant t} E(T_i)\right]$$，即为所求之正规树，止.

（5）(a) 用 DFS 求得G_4的连通分支$G_1^{(4)}$，$\cdots$，$G_\omega^{(4)}$ $(\omega \geqslant 2)$；(b) 求G_4的生成林$\{T'_1, T'_2, \cdots, T'_\omega\}$；(c) 求$G'_2$关于伙顶$V(G_1^{(4)})$，$\cdots$，$V(G_\omega^{(4)})$的伙顶图$G'_4$；(d) 求$G'_4 - E_4$的生成林$\{T''_1, \cdots, T''_m\}$；(e) 求$G'_2$关于伙顶$V(T''_1)$，$\cdots$，$V(T''_m)$的伙顶图$G''_2$；(f) 求$G'_2{}'$的生成树$T''$.

则

$$T = G\left[\bigcup_{i=1}^{m} E(T''_i) \cup \bigcup_{i=1}^{\omega} E(T'_i) \cup \bigcup_{i=1}^{t} E(T_i) \cup E(T'')\right]$$

即为正规树，止.

算法 1 的正确性可由定理 2 证明之. 它是时间复杂性为$O(|E(G)|)$的有效算法.

3 k—树组

W. R. Durm 和陈树柏 1968 年[2]提出如下概念：G为连通图，T为其生成树，从T上删除$k-1$条边 $(k \geqslant 2)$ 后得到k个子树T_1，T_2，$\cdots$，T_k组成的林称为T的k-树. $V(T_1)$，$\cdots$，$V(T_k)$称为G的关于k-树$F = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} T_i$的顶划分，相应于此顶划分的$k$-树集合称为对应于这个顶划分的$k$-树组.

G中全体k-树个数$\tau_k(G)$和对应于顶划分V_1，$\cdots$，V_k的k-树组中k-树的个数$\tau_k(G, V_1, \cdots, V_k)$非常之大，我们给出下面公式

$$\tau_k(G) = \binom{|G| - 1}{k - 1} \det B_f B_f^T$$

$$\tau_k(G, V_1, \cdots, V_k) = \prod_{i=1}^{k} \det B_f^{(i)} B_f^{(i)T}$$

其中B_f是G定向后的基本关联矩阵，$B_f^{(i)}$是G定向后$G[V_i]$的基本关联矩阵$i=1,2,\cdots,k$. 证明从略.

定理 3 $V_1, V_2, \cdots V_k$是图G关于k-树F的顶划分的充分必要条件是$G[V_i]$ ($i=1,2,\cdots,k$) 为连通图.

证 若$V_1, V_2, \cdots, V_k$是G关于k-树F的顶划分，则F中的k个子树分别是$G[V_i]$的生成树，$i=1,2,\cdots,k$，所以$G[V_i]$是连通图.

反之，若$G[V_i]$是连通图，令G'是G的关于伙顶$V_1, \cdots, V_k$的伙顶图，其生成树是T'，又设$G[V_i]$的生成树是T_i，由定理 2，

$$T=G\left[E(T')\cup\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k}E(T_i)\right]$$

是G的生成树，故$F=T-E(T')$为T的一个k-树，$V_1, \cdots, V_k$是关于此k-树的G之顶划分，定理 3 证毕.

4 均匀2-树及其算法

定义 3 设$F=\dot{\bigcup}_{1\leqslant i\leqslant k}T_i$是树$T$的$k$树，其中$T_i$与$T_j$ ($i\neq j$) 是无公共顶的树. 使得

$$\sum_{i=1}^{k}\left[|T_i|-\frac{\sum_{i=1}^{k}|T_i|}{k}\right]^2=\min$$

的T的k-树称为T的均匀k-树.

注意，(i) 顶数的方差与边数的方差

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\|T_i\|-\frac{\sum_{i=1}^{k}\|T_i\|}{k}\right]^2$$

的极小性是等价的；(ii) 均匀k-树显然存在，但未必唯一，例如$K_{1,n}$的均匀2-树有n个；(iii) 均匀k-树问题是一般均匀划分问题（属于NPC）的特殊情形.

算法 2 求均匀2-树的收缩算法.

(1) 对每顶$v\in V(T)$，令$w(v)=1$.

(2) 选取$u,v\in V(T)$，使得$w(v)=\min\{w(v)\,|\,d_T(v)=1\}$，且$uv\in E(T)$，$d_T(u)\neq 1$. 令$w(u)\leftarrow w(v)+w(u)$，$T\leftarrow T-v$，转 (2).

(3) (2) 中u不存在，止，这时得到的唯一一条边为e，T-e即为所求之均匀2-树.

上述算法的时间复杂度是$O(|T|)$.

定理 4 算法 2 在$O(|T|)$时间内得到T的均匀2-树.

证 显然上述算法在$O(|T|)$时间内止，且得到唯一的一条边e. 下证T-e确为均匀2-树.

事实上，若T为星，其2-树皆同构，定理 4 显然成立；若T不与星同构. 这时T的2-树之子树T_1，T_2或者$|T_1|>1$，$|T_2|>1$，或者$|T_1|=1$，$|T_2|>1$，或者$|T_1|>1$，$|T_2|=1$.

下面证明 $|T_1|=1$，或 $|T_2|=1$ 时不是均匀2-树．设 $|T_1|=1$，$|T_2|>1$（$|T_2|=1$，$|T_1|>1$ 同理而证），方差为

$$\mu_2^{(1)}=\left(|T|-1-\frac{|T|}{2}\right)^2+\left(\frac{|T|}{2}-1\right)^2=2\left(\frac{|T|}{2}-1\right)^2$$

而 $|T_1|>1$，$|T_2|>1$ 时的方差为

$$\mu_2^{(2)}=\left(|T_1|-\frac{|T|}{2}\right)^2+\left(|T_2|-\frac{|T|}{2}\right)^2=|T_1|^2+|T_2|^2-\frac{|T|^2}{2}$$

下面证明 $\mu_2^{(1)}>\mu_2^{(2)}$．事实上，因 $\mu_2^{(2)}$ 中 $|T_1|>1$，$|T_2|>1$，故

$$|T|(|T_2|-1)>(|T_2|+1)(|T_2|-1)$$

于是

$$|T|^2-2|T|+2>|T|^2-2|T_2||T|+2|T_2|^2$$
$$|T|^2-2|T|+2>(|T|-|T_2|)^2+|T_2|^2$$
$$|T|^2-2|T|+2>|T_1|^2+|T_2|^2$$

从而得证 $\mu_2^{(1)}>\mu_2^{(2)}$．

同理可证，在执行算法过程中得到的树 T' 上权最小的叶与其邻顶在同一子树上，从而完成定理 4 之证明．

不妨设 $T'\not\cong$star，于是

$$\mu'^{(1)}_2=\left(|T|-w_0-\frac{|T|}{2}\right)^2+\left(\frac{|T|}{2}-w_0\right)^2=2\left(\frac{|T|}{2}-w_0\right)^2$$

$$\mu'^{(2)}_2=\left(W_1-\frac{|T|}{2}\right)^2+\left(W_2-\frac{|T|}{2}\right)^2=W_1^2+W_2^2-\frac{|T|^2}{2}.$$

其中 w_0 是 T' 叶之最小权，$W_1+W_2=|T|$，$W_i>w_0\geqslant 1$，$i=1,2$．为证明 $\mu'^{(1)}_2>\mu'^{(2)}_2$，只需证

$$|T|^2-2w_0|T|+2w_0^2>W_1^2+W_2^2$$

事实上，因 $W_i>w_0>1$，$W_1+W_2=|T|$，故

$$|T|(W_2-w_0)>(W_2+w_0)(W_2-w_0).$$
$$|T|^2-2|T|w_0>|T|^2-2|T|W_2+2W_2^2-2w_0^2$$

即到 $|T|^2-2|T|w_0+2w_0^2>(|T|-W_2)^2+W_2^2=W_1^2+W_2^2$，定理 4 证毕．

5 SC 开关网络的唯一性

满足给定开关函数 f_{ab} 的 SC 开关网络未必唯一（指标志图），甚至可能不同构．我们来建立唯一性和同构性的充分必要条件．我们的结果亦适用于多触点的 SP 开关网络．

SC 综合的方法之一是下列的矩阵化程序：

（i）由 f_{ab} 构作路矩阵 $P(G)$；

（ii）在 $P(G)$ 右侧添加元素皆 1 的列，得 $P(G)$ 的镶边矩阵 $\tilde{P}(G)$；

（iii）在 0－1 二元域上对 $\tilde{P}$ 进行行的初等变换得到基本圈阵 $C_f(G_0)$，$G_0=G+ab$；

（iv）由 $C_f(G_0)$ 求得基本割集阵 $S_f(G_0)$；

（v）由 $S_f(G_0)$ 求得关联阵 $B(G_0)$；

(vi) 由 $B(G_0)$ 画出 G，即为所求之开关网络。

定理 5 满足 f_{ab} 的开关网络唯一的充分必要条件是 $G_0=G+ab$，是3连通图。其中 G 是用上述矩阵程序得到的图。

证 设 $G'\neq G$，但 G' 也满足 f_{ab}，故 $P(G)=P(G')$，从而 $C_f(G+ab)=C_f(G'+ab)$。由 Whitney 定理[3]，即两个图是2-同构的充分必要条件是两图边集间一一对应，使得两图的圈一一对应，对应圈的边一一对应。于是 $G+ab$ 与 $G'+ab$ 是2-同构的。但若 G_0 是3连通图，由2-同构定义，G_0 无2-同构图，与 G_0 和 $G'+ab$ 2-同构矛盾，故 $G=G'$。

若满足 f_{ab} 的 SC 开关网络是唯一的，但 G_0 非3连通图，这时 G_0 有两个顶组成的分离集 S，在 S 处执行2-同构之翻转运算，得 G_0 之2-同构图 $G'_0=\bar{G}+ab$，显然 $G_0\neq\bar{G}+ab$，$G\neq\bar{G}$，$P(\bar{G})$ 是 $P(G)$ 经某些列的交换而得，从而 $\bar{G}$ 组成的 SC 亦满足 f_{ab}，与满足 f_{ab} 的网络唯一相违，故 $\kappa(G_0)\geqslant 3$，定理5证毕。

6 SC 的同构唯一性

定义 4 一个图的图示能画成平面几何轴对称或中心对称图形时，称图 G 为对称图。

若 G 是连通对称图，我们把 G 与对称轴的交点重合成一点 O 得图 G'，$O\in V(G')$（图示为中心对称者必能使其图示呈轴对称）。下面仍把 G' 记成 G。

若 G 是以 a，b 为二端点的二端图，且 G 是以 a，b 为对称点的对称图，把 a 画在左，b 画在右，线段 ab 之中点为 O 点，且使 G' 之图示与 ab 之中垂线仅交于一点 O。

显然 $\kappa(G_0)\geqslant 2$，§5讨论了 $\kappa(G_0)\geqslant 3$ 的情形，现讨论 $\kappa(G_0)=2$ 的情形。

定理 6 满足开关函数 f_{ab} 的 SC 开关网络不唯一但却为同构唯一的充分必要条件是 $\kappa(G_0)=2$，且对任何由两顶组成的 G_0 之分离集 $\{u_1,u_2\}$，G_1 与 G_2 中至少有一个是以 u_1，u_2 为对称顶对的对称图。其中 $G_0=G+ab$，G 是由矩阵程序得到的，且 $G_0=G_1\cup G_2$，$V(G_1)\cap V(G_2)=\{u_1,u_2\}$。

证 若满足 f_{ab} 的开关网络不唯一但为同构唯一的，由定理5，$\kappa(G_0)\leqslant 2$，又 $\kappa(G_0)\geqslant 2$，故 $\kappa(G_0)=2$；又若对任何由两顶组成的 G_0 之分离集 $\{u_1,u_2\}$，定理6所称的那种 G_1 与 G_2 皆非关于 u_1，u_2 为对称顶对的对称图，令 $\bar{G}_0$ 是 G_0 在 u_1，u_2 处翻转 G_1 所得之图，则 $\bar{G}_0=\bar{G}+ab$ 中的 $\bar{G}$ 亦满足 f_{ab}，且 $G\not\cong\bar{G}$，与满足 f_{ab} 的开关网络为同构唯一相违。

反之，若 G_0 中对任何由两顶组成的分离集 $\{u_1,u_2\}$，G_1 与 G_2 中至少一个是以 u_1，u_2 为对称顶对的对称图，且 $\kappa(G_0)=2$，由定理5知，满足 f_{ab} 的开关网络不唯一，但这时满足 f_{ab} 的开关网络添加边 ab 后皆2-同构，因为 C_f 是相同的。设 $\bar{G}$ 是满足 f_{ab} 的另一开关网络，从而 $\bar{G}_0=\bar{G}+ab\simeq G+ab=G_0$，$G\simeq\bar{G}$。定理6证毕。

定理 7 若 a，b 是连通对称图 G 中的对称顶对，则存在从 a 到 b 的一条最短路 $P(a,b)$，在 G 的对称图示中，$P(a,b)$ 也呈对称形。

证 设 $P=\{P_1(a,b),P_2(a,b),\cdots,P_k(a,b)\}$ 是 G 中从 a 到 b 的最短路集合，且每个 $P_i(a,b)$，在 G 的对称图示中，皆非对称形，即在 G 的对称图形中，$P_i(a,b)$ 上的左，右两段 $P_i(a,o)$，$P_i(o,b)$ 不对称，则在 G 的对称形中，可以找到 $P_i(o,b)$ 的对称形 $P'_i(a,o)$ 和 $P_i(a,o)$ 的对称形 $P'_i(o,b)$，于是 $P'_i(a,o)\cup P_i(o,b)$ 与 $P_i(a,o)\cup P'_i(o,b)$ 是 G 的对称形中的对称路，设

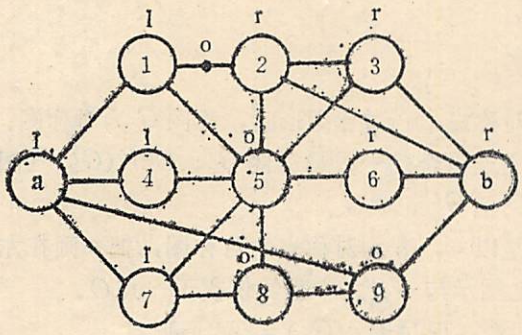
$$\|P'_i(a,o)\| = \|P_i(o,b)\| = l_1$$
$$\|P_i(a,o)\| = \|P'_i(o,b)\| = l_2$$

由于 $P_i(a,b)$ 是最短路，必有 $l_1 = l_2$，进而 $P_i(a,o) \cup P'_i(o,b)$ 也是G的对称形中的最短路，且是对称的，与P中路皆非G的对称图示中的对称形矛盾，至此定理 7 证毕.

推论 设G是关于 a，b 为对称顶对的连通对称图，$P = \{P_1(a,b), P_2(a,b), \cdots, P_k(a,b)\}$ 是G中从 a 到 b 的最短路集合，则子图 $G_P = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} P_i(a,b)$ 及 $\bar{G}_P = G - E(G_P)$ 皆为在G的对称图示上的对称形.

上面推论用来判定一些图不是关于 a，b 为对称顶对的对称图时，是很方便的.

例 下面的图是以 a，b 为对称顶对的对称图吗？



解 假设G是以 a，b 为对称顶的对称图，$P = \{a9b\}$对称中心与顶 9 重合.

令 $G_1 = G - E(a9b)$，在 G_1 中最短路集合为 $P^{(1)} = \{a12b\}$，由推论知对称中心O在边 12上，且 1 与 2 分别为 l（左）型顶与 r 型（右型）顶.

令 $G_2 = G_1 - E(G_{P^{(1)}}^{(1)})$，在 G_2 中 a 到 b 的最短路集合 $P^{(2)} = \{a456b, a453b, a753b, a756b\}$. $G_{P^{(2)}}^{(2)}$ 的对称中心O在 5，于是 4 与 7 为 l 型，3 与 6 为 r 型.

现有 r 型与 l 型顶各四个，O型顶两个，8 这个寡顶不会是 r 型或 l 型，必为O型. 但这时与 8 关联的非OO型边只一条（78），这是不可能的. 故知G不是关于 a，b 为对称顶对的对称图.

值得指出的是，判定图是否关于 a，b 为对称顶对的对称图的问题与两图是否同构的问题在算法的时间复杂性意义下是等价的. 我们这里实质上给出了一个 $G_1 \cong G_2$ 的必要条件.

参 考 文 献

[1] Even, S., Graph Algorithms, Maryland Computer Science Press, New York, 1979, 53—68.

[2] 陈树柏，网络图论及其应用，科学出版社，1982，441—475.

[3] Syslo, M.M., The Theory and Applications of Greph, Fourth International Conference, 1980, 577—588.

[4] Garey, M. R., Johnson, J. S., Computers and Intractability, Freeman, Son Francisco, 1979, 193—228.

[5] Bryant, P. R., *Proc. of IEE*, 106C, 1959, 174—188.

Some Graph Problems in the Electrical Networks

Wang Shuhe

(Department of Mathematics)

Liu Genquan

(Division of Electrical Engineering and Electronics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87003

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

关于解大型线性系统的多参数松弛法

李 绍 疆

（数 学 系）

[1]、[2]中讨论了双参数松弛法，本文把它推广到一般形式的多参数松弛法，使双参数松弛法成为其简单情形，并包含了他们的主要结果。

1 多参数松弛法的构造

设线性方程组

$$Ax=b \tag{1}$$

其中A为$n\times n$方阵，b为n维向量。设A作如下分解：

$$A=D\oplus(-E_1)\oplus(-E_2)\oplus\cdots\oplus(-E_l)\oplus(-E_1^*)\oplus\cdots\oplus(-E_l^*) \tag{2}$$

$l\geqslant 1$，E_i，$E_i^*\in C^{n\times n}$的元素，$E_i\cap E_j=0$，$E_i^*\cap E_j=0$，$E_i^*\cap E_j^*=0$，$i\neq j$；$D\cap E_i^*=0$，$D\cap E_i=0$，$i=1,2,\cdots,l$，D为对角线矩阵或对角块矩阵，$\oplus$表示直和。

构造迭代法 设$\left(D-\sum_{i=1}^{l}\alpha_iE_i\right)$为可逆，

$$\left(D-\sum_{i=1}^{l}\alpha_iE_i\right)x^{(n+1)}=(P_0D-P_1E_1-P_2E_2-\cdots-P_lE_l-P_{l+1}E_1^*-P_{l+2}E_2^*-\cdots-P_{2l}E_l^*)x^{(n)}+qb \tag{3}$$

要使迭代法相容，当$\{x^{(n)}\}$收敛，即$\lim x^{(n)}=x^*$时，$\left(D-\sum_{i=1}^{l}\alpha_iE_i-P_0D+\sum_{i=1}^{l}P_iE_i+\right.$

1986年5月14日.

$\sum_{i=1}^{l} P_{l+i} E_i^*\Big) x^* = qb$，令 $P_0 = 1-q$，$P_i = \alpha_i - q$，$i=1,2,\cdots,l$，$P_{l+1} = -q,\cdots,P_{2l} = -q$，

得多参数松弛法：

$$\Big(D - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i E_i\Big) x^{(n+1)} = \Big((1-q)D - \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i - q) E_i + q \sum_{i=1}^{l} E_i^*\Big) x^{(n)} + qb \tag{4}$$

因$\Big(D - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i E_i\Big)$阵可逆，得多参数迭代矩阵为

$$\mathscr{L}_{\alpha_i,q} = \Big(D - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i E_i\Big)^{-1} \Big((1-q)D - \sum_{j=1}^{l} (\alpha_i - q) E_i + q \sum_{j=1}^{l} E_i^*\Big) \tag{5}$$

2 谱半径的表达式

定理 1 设 A,D 为 Hermite 阵，$\mathscr{L}_{\alpha_i,q} v = \lambda v$，其中 $|\lambda| = \rho(\mathscr{L}_{\alpha_i,q})$，$v \neq 0$，则

$$(\rho(\mathscr{L}_{\alpha_i,q}))^2 = \frac{((\mathscr{D}v,v) - q(Av,v))^2 + \left|\left(\left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \bar{H}_i\right)v,v\right)\right|^2}{((\mathscr{D}v,v) + q(Av,v))^2 + \left|\left(\left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \bar{H}_i\right)v,v\right)\right|^2} \tag{6}$$

其中 $\mathscr{D} = (2-q)D - \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i - q) H_i$，$H_i = E_i + E_i^*$，$\bar{H}_i = E_i - E_i^*$，$i=1,2,\cdots,l$。

证明 由假设

$$\mathscr{L}_{\alpha_i,q} v = \lambda v$$

由（5）式得

$$\lambda\Big(D - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i E_i\Big) v = \Big((1-q)D - \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i - q) E_i + q \sum_{i=1}^{l} E_i^*\Big) v \tag{7}$$

设

$$H_i = E_i + E_i^*,\ \bar{H}_i = E_i - E_i^*,\ i=1,2,\cdots,l \tag{8}$$

则

$$D - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i E_i = \frac{1}{2}\Big\{\mathscr{D} + qA - \Big(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \bar{H}_i\Big)\Big\} \tag{9}$$

其中

$$\mathscr{D} = (2-q)D - \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i - q) \bar{H}_i$$

$$(1-q)D - \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i - q) E_i + q \sum_{i=1}^{l} E_i^* = D - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i E_i - qA = \frac{1}{2}\Big\{\mathscr{D} - qA - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \bar{H}_i\Big\} \tag{10}$$

由（9）、（10）式，（7）式可化为

$$\lambda\left(\mathscr{D}+qA-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\bar{H}_i\right)v=\left(\mathscr{D}-qA-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\bar{H}_i\right)v$$

两边对 v 作内积后可得

$$\lambda=\frac{(\mathscr{D}v,v)-q(Av,v)-\left(\left(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\bar{H}_i\right)v,\ v\right)}{(\mathscr{D}v,v)+q(Av,v)-\left(\left(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\bar{H}_i\right)v,\ v\right)}$$

由假设知，A，D是Hermite矩阵，及$\bar{H}_i$的性质即可推得（6）.

推论 设A为Hermite正定阵，若$q>0$，则当$\mathscr{D}$是Hermite正定时，多参数松弛法收敛。当$\mathscr{D}$是Hermite负定时，（4）式发散；若$q<0$，则当$\mathscr{D}$为Hermite正定时，（4）式发散，而$\mathscr{D}$负定时，（4）式收敛.

3 两个收敛性定理

定理 2 设A为既约L阵[4]，令$\bar{E}_i=D^{-1}E_i$，$\bar{E}_i^*=D^{-1}{}_i^*$，$i=1,2,\cdots,l$，$J=\sum_{i=1}^{l}(E_i+E_i^*)$，若$\alpha_i>0$，$1\geqslant q\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant l}\{\alpha_i\}$，则Jacobi方法收敛时，多参数松弛法（4）收敛，且有

$$\rho(\mathscr{L}_{\alpha_i,q})<1-q(1-\rho(J))$$

证明 由（5）式得

$$\mathscr{L}_{\alpha_i,q}=\left(I-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\bar{E}_i\right)^{-1}\left((1-q)I-\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i-q)\bar{E}_i+q\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*\right)$$

$\because$ $1\geqslant q\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant l}\{\alpha_i\}$，由定理的条件不难验证$\mathscr{L}_{\alpha_i,q}\geqslant 0$是非负元矩阵，而且既约，因此有$\lambda=\rho(\mathscr{L}_{\alpha_i,q})$是$\mathscr{L}_{\alpha_i,q}$的特征值，

$$\lambda\left(I-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\bar{E}_i\right)v=\left((1-q)I-\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i-q)\bar{E}_i+q\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*\right)v$$

$$\frac{\lambda-1+q}{q}v=\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i\lambda-\alpha_i+q}{q}\bar{E}_i+\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*\right)v$$

记 $\frac{\lambda-1++q}{q}v=Rv$，其中$R=\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i\lambda-\alpha_i+q}{q}\bar{E}_i+\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*$，因此$\rho(R)\geqslant\frac{\lambda-1+q}{q}$.

当$\alpha_i>0$，$i=1,2,\cdots,l$时，$\frac{\alpha_i(\lambda-1)+q}{q}\geqslant 1$，令

$$\gamma=\max_{1\leqslant i\leqslant l}\{\alpha_i\}\leqslant 1，得$$

$$R\leqslant\frac{\gamma(\lambda-1)+q}{q}\left(\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i+\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*\right)=\frac{\gamma(\lambda-1)+q}{q}J$$

于是

$$\frac{\lambda-1+q}{q}\leqslant\rho(R)\leqslant\frac{\gamma(\lambda-1)+q}{q}\rho(J)$$

显然可得

$$\rho(J)\geqslant\frac{\lambda-1+q}{\gamma(\lambda-1)+q}\geqslant 1$$

这与 Jacobi 方法收敛相矛盾.

下面估计 $\rho(\mathscr{L}_{\alpha_i,q})$ 的上界.

设 $\lambda=\rho(\mathscr{L}_{\alpha_i,q})<1$，由

$$(\lambda-1+q)v=\left(\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i\lambda-\alpha_i+q)\bar{E}_i+q\sum\bar{E}_i^*\right)v$$

若记

$$\bar{R}=\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i\lambda-\alpha_i+q)\bar{E}_i+q\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*$$

上式可写为

$$(\lambda-1+q)v=\bar{R}v$$

显然 $\bar{R}<qJ$. 由非负矩阵的理论得

$$\lambda-1+q\leqslant\rho(\bar{R})<q\rho(J)$$

因此

$$\lambda<1-q+q\rho(J)=1-q(1-\rho(J))$$

定理 3 设 A 为既约 L 阵，若 $\alpha_i>0$，且 $\max\limits_i\{\alpha_i\}=\gamma<q<1$，则当 SOR 方法 $(0<\omega=<1)$ 收敛时，多参数松弛法（4）收敛.

证 设 $\mathscr{L}_q=\left(I-q\sum\limits_{i=1}^{l}\bar{E}_i\right)^{-1}\left((1-q)I+q\sum\limits_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*\right)$

令 $M=(1-q)I+q\sum\limits_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*$，$L_1=q\sum\limits_{i=1}^{l}\bar{E}_i$，由于 A 为既约 L 阵，$\mathscr{L}_q\geqslant 0$，是非负元矩阵，且既约，同理，$\mathscr{L}_{\alpha_i,q}\geqslant 0$ 是非负元矩阵，且既约，因此存在 $\lambda=\rho(\mathscr{L}_{\alpha_i,q})$ 是 $\mathscr{L}_{\alpha_i,q}$ 的特征值，v 是对应的特征向量，即

$$\lambda v=\mathscr{L}_{\alpha_i,q}v$$

$$\lambda v=\left(I-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\bar{E}_i\right)^{-1}\left((1-q)I-\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i-q)\bar{E}_i+q\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*\right)v$$

$$\lambda\left(I-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\bar{E}_i\right)v=\left((1-q)I-\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i-q)\bar{E}_i+q\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*\right)v$$

设 $\lambda\geqslant 1$，移项得

$$\left(\lambda I-\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i\lambda-\alpha_i+q)\bar{E}_i\right)v=\left((1-q)I+q\sum_{i=1}^{l}\bar{E}_i^*\right)v$$

记 $$L_2=\sum_{i=1}^{l}\left(\alpha_i+\frac{q-\alpha_i}{\lambda}\right)\bar{E}_i$$

得 $$\lambda(I-L_2)v=Mv,\quad \lambda v=(I-L_2)^{-1}Mv$$

其中 L_2 是非负元矩阵，且是既约的，由于 $\lambda\geqslant 1$，$(I-L_2)^{-1}M\leqslant(I-L_1)^{-1}M$，立即可得

$$1\leqslant\lambda\leqslant\rho((I-L_2)^{-1}M\leqslant\rho((I-L_1)^{-1}M)=\rho(\mathscr{L}_q)$$

这与假设矛盾，定理得证.

参 考 文 献

[1] 匡蛟勋，上海师范学院学报，1983年第4期，1-11.

[2] 李樊璋、徐庆璋，关于解大线性系统双参数法的推广，上海师范学院，数值代数研究报告，1984.6，5:1-11.

[3] Varga, R. S., Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962, 85.

[4] Young, D. M., Iterative Solution of Large Linear System, Academic Press, New York and London, 1971, 42.

On the Multi-Parameter Overrelaxation Method for Numerical Solution of Large Linear Systems

Li Shaojiang

(Department of Methmaties)

中国科学技术大学学报 JCUST 87004

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

Iterates of Bernstein Polynomials Over Triangles

Li Ping

(*Department of Mathematis*)

1 Introduction

Let T be an arbitrarily given triangle with three vertices T_1, T_2 and T_3. It is well known that any point $p \in T$ can be uniquely expressed by its barycentric coordinates (u, v, w), i.e.,

$$P = uT_1 + vT_2 + wT_3$$

such that $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ and $u + v + w = 1$. Identifying P with its barycentric coordinates, we write $P = (u, v, w)$. Clearly, $T_1 = (1,0,0)$, $T_2 = (0,1,0)$, $T_3 = (0,0,1)$.

Let f be a function defined on T. The n-th Bernstein polynomial associated with f is given by

$$B_n(f;P) := \sum_{i+j+k=n} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) J^n_{i,j,k}(P) \tag{1}$$

where

$$J^n_{i,j,k}(P) := \frac{n!}{i!\,j!\,k!} u^i v^j w^k \tag{2}$$

are the n-th Bernstein basis polynomials. T is called the domain triangle of $B_n(f;P)$.

1987年4月17日收到。

Obviously, B_n is an operator which transforms each function f defined on T into its Bernstein polynomials. For a positive integer m, we define the iterate $B_n^{(m)}(f)$ by $B^{(m-1)}_n(B_n(f))$. Let $f\epsilon C(T)$, the collection of continuous functions defined on T. It is proved[1] that if m is independent of n, then $B_n^{(m)}(f;P)$ converge to the linear function which interpolates f at T_1, T_2 and T_3 as m goes to infinity.

In present paper, we shall determine the uniform limit of the iterates $B_n^{(m)}(f)$ as m tend to infinity both in the case that $\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=0$ and $\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\infty$. And then we shall prove the saturation theorem of Bernstein polynomials.

2 Notation and lemma

we express the set of functions defined on T by $C^r(T)$ in which the functions have continuous partial derivatives up to r order. For simplicity, we define the operator D by

$$D:=\left(\frac{\partial}{\partial u},\ \frac{\partial}{\partial v},\ \frac{\partial}{\partial w}\right)^t$$

where the t express the transpose.

Lemma 1 Let $f\epsilon C^1(T)$. Then for any points P_1, $P_2\epsilon T$ with $P_1=(u_1, v_1, w_1)$ and $P_2=(u_2, v_2, w_2)$, there exists a real number $r\epsilon(0,1)$ such that

$$f(P_1)=f(P_2)+(P_1-P_2)Df(P^*) \tag{3}$$

where

$$P_1-P_2:=(u_1-u_2, v_1-v_2, w_1-w_2)$$
$$P^*:=(1-r)P_2+rP_1$$

Proof Consider the funtion $g(t)$ defined in $[0,1]$

$$g(t):=f[P_2+t(P_1-P_2)] \tag{4}$$

By Taylor's theorem with the exact remainder, we have

$$g(1)=g(0)+g'(r) \tag{5}$$

where $0<r<1$. In virtue of (4), we can rewrite (5) in the form of (3).

For a function f defined on T, if there exists a constant M such that

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant M|P_1-P_2|$$

then it is called that $f\epsilon\mathrm{Lip}(T)$, where $P_1, P_2\epsilon T$ with $P_i=(u_i, v_i, w_i)$, $i=1,2$ and

$$|P_1-P_2|:=[(u_1-u_2]^2+(v_1-v_2)^2+(w_1-w_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

If $f\epsilon C'(T)$ and there exists a constant M such that

$$|(P_2-P_1)[(Df(P_3)-Df(P_4)]|\leqslant M|P_2-P_1||P_3-P_4|$$

for any points P_1, P_2, P_3 and P_4 in T, then it is called that $f\epsilon\mathrm{Lip}'(T)$. we can also prove that if $f\epsilon C^2(T)$, then $f\epsilon\mathrm{Lip}^1(T)$.

Lemma 2 Let $f \in \mathrm{Lip}^1(T)$, then there exists a constant M such that

$$\left| B_n(f;P) - f(P) \right| \leqslant \frac{M}{n}\left[u(1-u) + v(1-v) + w(1-w) \right]$$

Proof Write $P_{i,j,k}$ for $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)$, $(i+j+k=n)$. For $P_{i,j,k}$ and $P=(u,v,w)$, according to lemma 1, there exists a real number $r \in (0,1)$ such that

$$\begin{aligned} f(P_{i,j,k}) &= f(P) + (P_{i,j,k} - P) Df(P^*) \\ &= f(P) + (P_{i,j,k} - P) Df(P) \\ &\quad + (P_{i,j,k} - P)(Df(P^*) - Df(P)) \end{aligned} \tag{6}$$

where $P^* = P + r(P_{i,j,k} - P)$. Multiplying both side of (6) by $J^n_{i,j,k}(P)$ and then adding up the result, we obtain

$$B_n(f;P) = f(P) + \sum_{i+j+k=n} (P_{i,j,k} - P)\left[Df(P^*) - Df(P) \right] J^n_{i,j,k}(P) \tag{7}$$

because linear functions are invariant under B_n.

Since $f \in \mathrm{Lip}^1(\mathrm{T})$, there exists a constant M such that

$$|(P_{i,j,k} - P)[Df(P^*) - Df(P)]| \leqslant M|P_{i,j,k} - P||P^* - P| \leqslant M|P_{i,j,k} - P|^2$$

Hence from (7) we have

$$\begin{aligned} |B_n(f;P) - f(P)| &\leqslant M \sum_{i+j+k=n} |P_{i,j,k} - P|^2 J^n_{i,j,k}(P) \\ &= M \sum_{i+j+k=n} \left[\left(\frac{i}{n} - u\right)^2 + \left(\frac{j}{n} - v\right)^2 + \left(\frac{k}{n} - w\right)^2 \right] J^n_{i,j,k}(P) \end{aligned} \tag{8}$$

It is easy to verify

$$\sum_{i+j+k=n} \left(\frac{i}{n} - u\right)^2 J^n_{i,j,k}(P) = \frac{u(-u)}{n}$$

Similar equalities hold for the last two sum formula in the right-side of (8). This completes lema 2.

3 Uniform limit of the iterates $B_n^{(m)}(f)$

Theorem 1 Let $f \in \mathrm{Lip}^1(T)$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = 0$. Then we have

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(m)}(f;P) = f(P)$$

uniformly on T.

proof According to lemma 2, there exists a constant M such that

$$\left| B_n(f;P) - f(P) \right| \leqslant \frac{M}{n}\left[u(1-u) + v(1-v) + w(1-w) \right]$$

By the linearity and positivity of the operator B_n and the familiar equalities

$$B_n(r(1-r);P)=\left(1-\frac{1}{n}\right)r(1-r),\quad r=u,v,w, \tag{9}$$

we get

$$\left|B_n^{k+1}(f;P)-B_n^k(f;P)\right|\leqslant\frac{M}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\left[u(1-u)+v(1-v)+w(1-w)\right]$$

$k=0,1,2,\cdots$. Thus we have

$$\left|B_n^m(f;P)-f(P)\right|=\left|\sum_{k=1}^{m}\left[B_n^k(f;P)-B_n^{k-1}(f;P)\right]\right|$$

$$\leq\frac{M}{n}\left[u(1-u)+v(1-v)+w(1-w)\right]\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

$$\leq\frac{3M}{4}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right]$$

Since $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=0$, it is obvious that $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right]=0$.

This gives theorem 1.

Theorem 2 Let $f\in\mathrm{Lip}^1(T)$ and $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\infty$. Then we have

$$\lim_{n\to\infty}B_n^m(f;P)=uf(T_1)+vf(T_2)+wf(T_3)$$

uniformly on T.

proof According to lemma 1 expending $f(T_1)$, $f(T_2)$ and $f(T_3)$ at points $P_{i,j,k}$, we obtain

$$f(T_t)=f(P_{i,j,k})+(T_t-P_{i,j,k})Df(P_{i,j,k})$$
$$+(T_t-P_{i,j,k})[Df(P_t^*)-Df(P_{i,j,k})] \tag{10}$$

where

$$P_t^*:=P_{i,j,k}+r_t(T_t-P_{i,j,k}),\quad 0<r_t<1,t=1,2,3.$$

Since $\frac{i}{n}T_1+\frac{j}{n}T_2+\frac{k}{n}T_3=P_{i,j,k}$, from (10) we have

$$\frac{i}{n}f(T_1)+\frac{j}{n}f(T_2)+\frac{k}{n}f(T_3)-f(P_{i,j,k})$$

$$=\sum_{t=1}^{3}\frac{e_t}{n}(T_t-P_{i,j,k})\left[Df(P_t^*)-Df(P_{i,j,k})\right]$$

where $e_1=i$, $e_2=j$ and $e_3=k$. Because $f\in\mathrm{Lip}^1(T)$, there exists a constant M such that

$$|(T_t-P_{i,j,k})[Df(P_t^*)-Df(P_{i,j,k})]|\leqslant M|T_t-P_{i,j,k}||P_t^*-P_{i,j,k}|\leqslant M|T_t-P_{i,j,k}|^2$$

thus we have

$$\left|\frac{i}{n}f(T_1)+\frac{j}{n}f(T_2)+\frac{k}{n}f(T_3)-f(P_{i,j,k})\right|$$

$$\leqslant M\sum_{t=1}^{3}\frac{c_t}{n}\left|T_t-P_{i,j,k}\right|^2=M\left[\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)+\frac{j}{n}\left(1-\frac{j}{n}\right)+\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right]$$

Hence we get

$$|uf(T_1)+vf(T_2)+wf(T_3)-B_n^{(m)}(f;P)|$$
$$\leqslant M[u(1-u)+v(1-v)+w(1-w)]$$

By using the properties of Bernstein polynomials and (9), we get

$$|uf(T_1)+vf(T_2)+wf(T_3)-B_n^{(m)}(f;P)|$$
$$\leqslant M\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-1}[u(1-u)+v(1-v)+w(1-w]$$
$$\leqslant\frac{3M}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-1} \tag{11}$$

for all $P\in T$. Since $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\infty$, it is easy to know that

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-1}=0 \tag{12}$$

Theorem 2 follows (11) and (12).

the following theorem shows that the condition $f\in\mathrm{Lip}^1(T)$ can be replaced by $f\in C(T)$.

Theorem 3 Let $f\in C(T)$. we have

(a) If $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=0$, them $\lim\limits_{n\to\infty}B_n^{(m)}(f;P)=f(P)$ uniformly on T.

(b) If $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\infty$, then

$$\lim_{n\to\infty}B_n^{(m)}(f;P)=uf(T_1)+vf(T_2)+wf(T_3)$$

uniformly on T.

Proof Because the convergence of Bernstein polynomials, for an arbitrarily positive number ε, there exists a positive integer k such that

$$|f(P)-g(P)|\leqslant\varepsilon,\ \text{for all } P\in T$$

where

$$g(P)=B_k(f;P)$$

clearly, $g\in C^2(T)$, hence $g\in\mathrm{Lip}^1(T)$.

If $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=0$, then in virtue of theorem 1, there exists a positive integer N_1 *such* that

$$|B_n^{(m)}(g;P)-g(P)|\leqslant\varepsilon$$

for all $P\in T$ and $n\geqslant N_1$. thus we have

$$|B_n^{(m)}(f;P)-f(P)|\leqslant|B_n^{(m)}(f;P)-B_n^{(m)}(g;P)|$$
$$+|B_n^{(m)}(g;P)-g(P)|+|g(P)-f(P)|$$
$$\leqslant 3\varepsilon$$

for all $P\in T$ and $n\geqslant N_1$. Hence we get (a) in theorem 3.

If $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\infty$, then according to theorem 2, there exists a positive integer N_2 such that

$$|B_n^{(m)}(g;P)-ug(T_1)-vg(T_2)-wg(T_3)|\leqslant\varepsilon$$

for all $P\in T$ and $n\geqslant N_2$. Since the function g interpolates f at T_1, T_2 and T_3, we have

$$|B_n^{(m)}(f;P)-uf(T_1)-vf(T_2)-wf(T_3)|$$
$$=|B_n^{(m)}(f;P)-ug(T_1)-vg(T_2)-wg(T_3)|$$
$$\leqslant|B_n^{(m)}(f;P)-B_n^{(m)}(g;P)|+|B_n^{(m)}(g;P)-ug(T_1)-vg(T_2)-wg(T_3)|$$
$$\leqslant 2\varepsilon$$

for all $P\in T$ and $n\geqslant N_2$. this gives (b) in theorem 3.

4 An application of theorem 3

When f is an univavariant function defined on $[0,1]$, the saturation theorem was given in[2]. For $f\in C(T)$, we have a similar theorem.

Theorem 4 Let $f\in C(T)$. then the equality

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(f;P)-f(P)]=0$$

holds for all $P\in T$ if and only if f is linear on T.

Proof Clearly the condition that f is linear is sufficient. we only need to prove the necessarity. Set

$$a_n:=\sup n|B_n(f;P)-f(P)| \tag{13}$$

where the sup is taken over all $P\in T$. If there exists n such that $a_n=0$, then we know that f is a fixed point of the operator B_n. Hence f is linear on T. Without loss of generality, we suppose that $a_n>0$ for $n=1,2,3,\cdots$. From (13) we have

$$|B_n(f;P)-f(P)|\leqslant\frac{a_n}{n}$$

for all $P\in T$. thus we obtain

$$|B_n^{(k+1)}(f;P)-B_n^{(k)}(f;P)|\leqslant\frac{a_n}{n},\ k=0,1,2,\cdots, \tag{14}$$

for all $P\in T$. Let

$$m:=n\left[\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

there $\left[\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ is the integral part of $\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}$

romF (14), it is easy to get

$$|B_n^{(m)}(f;P)-f(P)|\leqslant\frac{m}{n}a_n \tag{15}$$

for all $P\in T$. Since $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ and

$$\left[\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]a_n\leqslant\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}a_n=(a_n)^{\frac{1}{2}}$$

we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}=\infty$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]a_n=0$$

In virtue of (15) and theorem 3 we get theorem 4.

The author is sincerely grateful to Professor Chang Gengzhe for his directions.

Refereces

[1] Chang, G. and Feng, Y., KEXUE TONGBAO, 31 (1986), 157—160.
[2] Lorrentz, G. G., 谢庭藩、施咸亮译,函数逼近论,上海科学技术出版社,1981, 130-138.

三角域上Bernstein多项式的迭代

李 平

(数 学 系)

中国科学技术大学学报 JCUST 87005

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

广义 Asgeirsson 中量公式

葛 南 祥

（数学系）

1 引言

由于方程本身的原因，超双曲型方程的研究较零散且难于系统进行．本世纪三十年代，Asgeirsson 对超双曲型齐次方程

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}=0$$

得出了 Asgeirsson 中量公式，并用所得结果讨论了它的 Cauchy 问题与特征问题．对

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}-c^2u=f(x,y)$$

的相应问题，最近，刘家沛在[1]中讨论了 $m=3$ 的情况．本文证明了方程

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}=f(x,y) \tag{1}$$

的 Asgeirsson 中量定理及中量公式的推广形式．

2 定理的证明

先说明记号：

1987 年 4 月 17 日收到．

$$(V):\ \sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant r^2,\quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leqslant s^2;$$

$$(S_1):\ \sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r^2,\quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leqslant s^2;$$

$$(S_2):\ \sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2<r^2,\quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=s^2.$$

(V) 为 $2m$ 维空间中的有界闭子集，(S_1)，(S_2) 为其边界．取 u 为（1）式在 (V) 上的正规解，

$$M(r,s)=\int_{\Omega_\beta}\cdots\int_{\Omega_\alpha}\cdots\int u(x_i^0+r\alpha_i;\ y_i^0+s\beta_i)\,d\Omega_\alpha d\Omega_\beta$$

$$f_1(r,s)=\int_{\Omega_\beta}\cdots\int_{\Omega_\alpha}\cdots\int f(x_i^0+r\alpha_i;\ y_i^0+s\beta_i)\,d\Omega_\alpha d\Omega_\beta$$

式中，$x_i-x_i^0=r\alpha_i$，$(1\leqslant i\leqslant m)$，$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2=1$

$$y_i-y_i^0=s\beta_i\ \ (1\leqslant i\leqslant m)\quad \sum_{i=1}^{m}\beta_i^2=1$$

Ω_α，Ω_β 为 m 维空间中的单位超球面．称 $M(r,s)$ 为（1）在 (V) 上的正规解 u 的广义 Asgeirsson 中量．

先导出 $M(r,s)$ 所适合的偏微分方程

$$Lu=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2u}{\partial y_i^2}$$

$$\widetilde{L}v=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2v}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2v}{\partial y_i^2}$$

由于

$$vLu-u\widetilde{L}v=\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i}-u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\right]$$

上式在 (V) 上积分，并用 stokes 公式，得到

$$\int_V\cdots\int(vLu-u\widetilde{L}v)\,dV=\int_{(S)}\cdots\int\left[\sum_{i=1}^{m}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\alpha_i-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{m}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i}-u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\beta_i\right]dS \tag{2}$$

在（2）式中，取 u 为（1）在 (V) 上的正规解，$v=1$，得

$$\int_V\cdots\int f\,dV=\int_{S_1}\cdots\int\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\alpha_i-\frac{\partial u}{\partial y_i}\beta_i\right)dS,$$

$$+\int_{S_2}\cdots\int\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\alpha_i-\frac{\partial u}{\partial y_i}\beta_i\right)dS_2 \tag{3}$$

注意到，(S_1) 上 $\alpha_i=\dfrac{x_i-x_i^0}{r}$，$\beta_i=0$，$1\leqslant i\leqslant m$

(S_2) 上 $\beta_i=\dfrac{y_i-y_i^0}{S}$，$\alpha_i=0$，$1\leqslant i\leqslant m$

（3）式右端为

$$r^{m-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^s\sigma^{m-1}M(r,\sigma)\,d\sigma-S^{m-1}\frac{\partial}{\partial s}\int_0^r\rho^{m-1}M(\rho,s)\,d\rho$$

（3）式左端即

$$\int_0^s\sigma^{m-1}\int_0^r\rho^{m-1}f_1(\rho,\sigma)\,d\rho d\sigma$$

因此，（3）式变成

$$\int_0^s\sigma^{m-1}\left(\int_0^r\rho^{m-1}f_1(\rho,\sigma)\,d\rho\right)d\sigma=r^{m-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^s\sigma^{m-1}M(r,\sigma)\,d\sigma$$

$$-S^{m-1}\frac{\partial}{\partial s}\int_0^r\rho^{m-1}M(\rho,s)\,d\rho$$

上式两端作用以 $\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial s}$，得

$$\frac{\partial^2M}{\partial r^2}-\frac{\partial^2M}{\partial s^2}+\frac{m-1}{r}\frac{\partial M}{\partial r}-\frac{m-1}{s}\frac{\partial M}{\partial s}=f_1(r,s) \tag{4}$$

下面，考虑（4）式的两个奇型 Cauchy 问题的解

$$\mathrm{I}\begin{cases}\dfrac{\partial^2M}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2M}{\partial s^2}+\dfrac{m-1}{r}\dfrac{\partial M}{\partial r}-\dfrac{m-1}{s}\dfrac{\partial M}{\partial s}=f_1(r,s)\ ,\ s>r>0\\ M|_{r=0}=g(s),\ s>r\geqslant0,\ g\in g^2\\ \left.\dfrac{\partial M}{\partial r}\right|_{r=0}=0\end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases}\dfrac{\partial^2M}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2M}{\partial s^2}+\dfrac{m-1}{r}\dfrac{\partial M}{\partial r}-\dfrac{m-1}{s}\dfrac{\partial M}{\partial s}=f_1(r,s),\ r>s>0\\ M|_{s=0}=h(r),\ r>s\geqslant0,\ h\in c^2,\ h(0)=g(0)\\ \left.\dfrac{\partial M}{\partial s}\right|_{s=0}=0\end{cases}$$

作变换 $\xi=\dfrac{r+s}{2}$，$\eta=\dfrac{r-s}{2}$，得

$$\frac{\partial^2M}{\partial\xi\partial\eta}+(m-1)\left(\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial M}{\partial\eta}-\frac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial M}{\partial\xi}\right)=f_1(\xi+\eta,\ \xi-\eta)$$

用 Riemann 方法解Ⅰ，Ⅱ。先求出方程

$$\frac{\partial^2M}{\partial\xi\partial\eta}+(m-1)\left(\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial M}{\partial\eta}-\frac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial M}{\partial\xi}\right)=0$$

的 Riemann 函数，此即解下述问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta}+(m-1)\left(\dfrac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\xi}-\dfrac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\xi}\right)-(m-1)\dfrac{4\xi\eta}{(\xi^2-\eta^2)^2}M=0 \\ M(\xi,\eta_0;\ \xi_0,\eta_0)=\left(\dfrac{\xi^2-\eta_0^2}{\xi_0^2-\eta_0^2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \\ M(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0)=\left(\dfrac{\xi_0^2-\eta^2}{\xi_0^2-\eta_0^2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \end{cases}$$

上述问题的解

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\frac{(\xi_0^2-\eta^2)^{\frac{m-3}{2}}(\xi^2-\eta_0^2)^{\frac{m-3}{2}}(\xi^2-\eta^2)}{(\xi_0^2-\eta_0^2)^{m-2}}F\left(\frac{3-m}{2},\ \frac{3-m}{2},1,\sigma\right)$$

式中，F为超几何函数，

$$\sigma=\frac{(\xi_0^2-\xi^2)(\eta^2-\eta_0^2)}{(\xi^2-\eta_0^2)(\xi_0^2-\eta^2)}$$

利用迭加原理，I 可分解为

$$I_a\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta}+(m-1)\left(\dfrac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\eta}-\dfrac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\xi}\right)=0 \\ M(-\eta,\eta)=g(-2\eta) \\ \left(\dfrac{\partial M}{\partial\xi}+\dfrac{\partial M}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=-\eta}=0 \end{cases}$$

$$I_b\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta}+(m-1)\left(\dfrac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\eta}-\dfrac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\xi}\right)=f_1(\xi+\eta,\xi-\eta) \\ M(-\eta,\eta)=0 \\ \left(\dfrac{\partial M}{\partial\xi}+\dfrac{\partial M}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=-\eta}=0 \end{cases}$$

用下述辅助 Cauchy 问题解 I_a。这里 $\varepsilon>0$。

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta}+(m-1)\left(\dfrac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\eta}-\dfrac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\xi}\right)=0 \\ M(-\eta+\varepsilon,\eta)=g(-2\eta+\varepsilon) \\ \left(\dfrac{\partial M}{\partial\xi}+\dfrac{\partial M}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=-\eta+\varepsilon}=0 \end{cases}$$

用 Riemann 方法解（*）积分区域为

$$\{(\xi,\eta)\,|\,\xi+\eta\geqslant\varepsilon,\ \xi\leqslant\xi_0,\ \eta\leqslant\eta_0\}$$

$$\begin{aligned} M(\xi_0,\eta_0)=&\frac{1}{2}\left[(MR)\Big|_{\substack{\xi=-\eta_0+\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+(MR)\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=-\xi_0+\varepsilon}}\right] \\ &-\int_{-\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(R\frac{\partial M}{\partial\eta}-M\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)+aMR\right]d\eta-\right. \\ &\left.-\left[\frac{1}{2}\left(R\frac{\partial M}{\partial\xi}-M\frac{\partial R}{\partial\xi}\right)+bMR\right]d\xi\right\}_{\xi=-\eta+\varepsilon}. \end{aligned}$$

式中，$a=-\dfrac{(m-1)\eta}{\xi^2-\eta^2}$，$b=\dfrac{(m-1)\xi}{\xi^2-\eta^2}$

作变换

$$\eta^2=\eta_0^2+[(-\xi_0+\varepsilon)^2-\eta_0^2]x\cdot(\eta<0)$$

有
$$M(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\left[(MR)\Big|_{\substack{\xi=-\eta_0+\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+(MR)\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=-\xi_0+\varepsilon}}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left\{M\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial\xi}+\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)+(a+b)R\right]\right\}\frac{(\xi_0-\varepsilon)^2-\eta_0^2}{\sqrt{\eta_0^2+[(\xi_0-\varepsilon)^2-\eta_0^2]x}}dx$$

令 $\varepsilon\to0^+$，得到 I_a 的解

$$M_{I_a}(\xi_0,\eta_0)=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}g(2\sqrt{\eta_0^2+(\xi_0^2-\eta_0^2)x})dx$$

于是，有

$$M_{I_a}(r,s)=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}g(\sqrt{(r-s)^2+4rsx})dx$$

直接用 Riemann 方法，求得 I_b 的解

$$M_{I_b}(r,s)=\frac{1}{2}\int_{D_1}\int f_1(x,y)R\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2};\ \frac{r+s}{2},\ \frac{r-s}{2}\right)dxdy$$

$$D_1=\{(x,y)\,|\,x+y\leqslant r+s,\ x-y\leqslant r-s,\ x\geqslant0\}$$

所以，$M_I(r,s)=M_{I_a}(r,s)+M_{I_b}(r,s)$

$$=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}g(\sqrt{(r-s)^2+4rsx})dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{D_1}\int f_1(x,y)R\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2};\ \frac{r+s}{2},\ \frac{r-s}{2}\right)dxdy \qquad (5)$$

作如下变换：$r_1=s$，$s_1=r$，则问题Ⅱ成为Ⅰ型，但此时 f_1 符号改变．由（5）式，得

$$M_{II}(r,s)=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}h(\sqrt{(r-s)^2+4rsx})dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{D_2}\int f_1(x,y)R\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2};\ \frac{r+s}{2},\ \frac{r-s}{2}\right)dxdy$$

$$=M_{II_a}(r,s)+M_{II_b}(r,s)$$

$$D_2=\{(x,y)\,|\,x+y\leqslant r+s,\ x-y\geqslant r-s,\ y\geqslant0\}$$

下面，我们建立（1）的中量公式．$r=s$ 时，要求 $M_I(r,s)=M_{II}(r,s)$，此即

$$\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}[h(2r\sqrt{x})-g(2r\sqrt{x})]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{D_3}\int R\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2};\ r,0\right)f_1(x,y)dxdy \qquad (6)$$

$$D_3=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 2r\}$$

从而，我们得到

定理 设（V）为 R^{2m} 中 $x=(x_1,\cdots,x_m)$，$y=(y_1,\cdots,y_m)$ 的积空间中的闭单连通区域，$u(x,y)$ 为（1）式在（V）内的正规解，$(x_1^0,\cdots x_m^0;\ y_0^1,\cdots,y_m^0)$ 为（V）内任一点，t_0 为使区域

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2}\leqslant t_0$$

整个含在（V）内的正数，则，当 r,s 为适合 $r+s\leqslant t_0$ 的任一对正数时，u 在

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r^2,\quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=s^2$$

上的广义 Asgeirsson 中量为

$$M_{\mathrm{I}}(r,s)=M_{\mathrm{I}a}(r,s)+M_{\mathrm{I}b}(r,s)\qquad(s\geqslant r\geqslant 0)$$

$$M_{\mathrm{II}}(r,s)=M_{\mathrm{II}a}(r,s)+M_{\mathrm{II}b}(r,s)\qquad(r\geqslant s\geqslant 0)$$

且关于（1）式在（V）内的正规解 u，公式（6）成立。

3 公式的应用

作变换 $2r\sqrt{x}=\sqrt{t}$，$2r=\sqrt{\rho}$，则有

$$\int_0^{\rho}t^{\frac{m-3}{2}}(\rho-t)^{\frac{m-3}{2}}[h(\sqrt{t}-g(\sqrt{t})]dt$$

$$=\frac{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma(m-1)}\rho^{m-2}\int_{D_4}\int R\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2};\ \frac{\sqrt{\rho}}{2},\ 0\right)f_1(x,y)dxdy$$

$$D_4=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant\sqrt{\rho}\}$$

上式右端函数记为 $F(\rho)$。当 m 为奇数时，上式两边对 ρ 求导 $\frac{m-3}{2}$ 次，得

$$h(\sqrt{\rho}-g(\sqrt{\rho})=\frac{1}{\left(\frac{m-3}{2}\right)!}\rho^{\frac{3-m}{2}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{d^{\frac{m-3}{2}}F(\rho)}{d\rho^{\frac{m-3}{2}}}\right)\tag{7}$$

当 m 为偶数时，两边求导 $\frac{m-2}{2}$ 次，

$$\int_0^{\rho}\frac{t^{\frac{m-3}{2}}[h(\sqrt{t})-g\sqrt{t}]}{\sqrt{\rho-t}}dt=\frac{1}{\left(\frac{m-2}{2}\right)!}\ \frac{d^{\frac{m-2}{2}}F(\rho)}{d\rho^{\frac{m-2}{2}}}\tag{8}$$

（8）式为一 Abel 型积分方程，记其右端函数为 $F_1(\rho)$，则由（2），得

$$h(\sqrt{\rho})-g(\sqrt{\rho})=\frac{\rho^{\frac{3-m}{2}}}{\pi}\left[\int_0^{\rho}\frac{F_1'(t)}{\sqrt{\rho-t}}dt+F_1(0)\rho^{-\frac{1}{2}}\right]\tag{9}$$

在（7）、（9）中，令 $f\equiv 0$，则得到通常的 Asgeirsson 公式，因而，我们认为（7）、

（9）为通常 Asgeirsson 中量公式的推广形式.

有意思的是 $m=3$，且 u,f 均与 x_2,x_3 无关时，从以上公式出发，我们能够得到通常波动方程的 Poisson 公式. 更一般地，对于方程

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}=f(x,y)\quad(l<m)$$

只需对 u 取 $m-l$ 个虚自变量 $x_{l+1},\cdots,x_m$，即可导出类似于（7）、（9）的公式.

对陈祖墀老师的热情指导与鼓励表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] 刘家沛，数学年刊，8A，1987，94-101.
[2] 陈传璋等，积分方程理论及应用，上海科学技术出版社，1987年版，150-153.

On Generalized Asgeirsson's Mean Value Formula

Ge Nanxiang

(Department of Mathematics)

JCUST
87006

中国科学技术大学学报

增　刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部　　1987年12月

用场效应方法测量非晶硅中的隙态密度

吕智慧　陈宝珠　刘继周

（物　理　系）

1　引言

非晶硅能隙中的态密度分布 $N(E)$ 对材料的光电性能有着重大影响[1]，它的测量不仅可检验非晶硅的制备条件，而且也为改善非晶硅的光电性能提供了重要依据。

关于态密度在能隙中的分布形状和数值大小，目前在国际上仍然存在着较大的分歧[2]。虽然测量方法有好几种，但各有利弊，人们还在不断探索、验证 a-Si 中隙态密度分布的真实形式。场效应法虽然要求制备样品的条件比较苛刻，但它的最大优点则是能测量能隙中较宽能量区间的态密度分布，这是有些方法目前尚达不到的[3]。基于这一点，我们用场效应法来测量 a-si 中的隙态密度。

测量原理

基本原理是利用栅压对 a-Si 表面的电导调制效应来测量和计算隙态密度 $N(E)$ 的能量分布。

样品的 MOS 结构如图1所示。对于一个理想的 MOS 结构，当栅压 $V_G=0$ 时，能带应为平带（图2(a)），当栅压 V_G 为正值时，将产生一垂直于 SiO_2，a-Si 界面的电场。电场的存在，使得 SiO_2 两边产生等量但符号相反的两种电荷，即在 a-Si 中靠近界面的一薄层内产生负电荷，形成空间电荷区，反映在能带上则是能带向下弯曲，如图2(b) 所示。这

1986年10月11日收到。

意味着能隙中一些空态被电子填充。采用 Spear 的零温度统计，即认为费米能级 E_F 以下的态全是满的，E_F 以上的态全是空的。例如，未加栅压时，E_v 能级上的态是空的，当加一正栅压

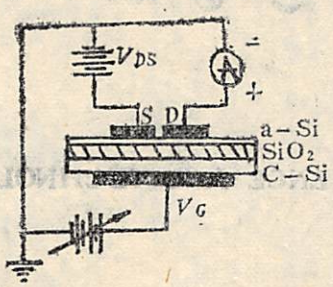
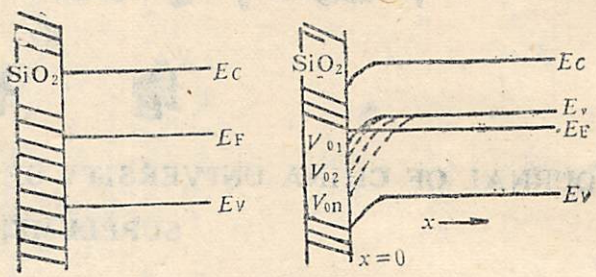


图 1　样品结构和测量线路图



(a) $V_G=0$　　(b) $V_G>0$

图 2　非晶硅加栅压前后的能带图

后，E_v 能级在表面层内向下弯曲到 V_{01} 处，此时 E_v 能级上的态已被电子填充。因此，正栅压不断增大的过程，也正是电子填充 E_F 以上空态的过程。那么空间电荷区电荷密度 $\rho(x)$ 应该是

$$\rho(x)=\int_{-\infty}^{\infty}N(E)\{f[E-eV(x)]-f(E)\}dE \tag{1}$$

其中，$N(E)$ 为态密度，$f(E)$ 为电子占据 E 态的几率，$V(x)$ 为坐标 x 处的表面势。由于采用了零温度统计，我们可近似认为空间电荷区感应的电子全部填充在隙态，即忽略电子对扩展态和表面态的填充。那么（1）式可简化为

$$\rho(x)=\int_{E_F}^{E_F+eV(x)}N(E)dE=\int_{E_F}^{E_F+eV(x)}\overline{N(E)}dE=\overline{N(E)}\cdot eV(x) \tag{2}$$

其中 $\overline{N(E)}$ 为 $E_F\to E_F+eV(x)$ 能量间的平均隙态密度。根据泊松方程（考虑一维情况）

$$\frac{\partial^2V(x)}{\partial x^2}=\frac{e}{\varepsilon_0\varepsilon_s}\rho(x)\text{（实用单位制）} \tag{3}$$

和边界条件：

$$\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x\geq h}=0 \tag{4}$$

$$\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{V_G-V_0}{d}\cdot\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_s} \tag{5}$$

解得

$$V(x)=V_0\exp\left[-\sqrt{\frac{e^2}{\varepsilon_0\varepsilon_s}\cdot\overline{N(E)}}\cdot x\right] \tag{6}$$

其中，ε_0，ε_s，ε_i 分别为真空、a-Si、SiO_2 的介电常数；h，d 分别为 a-Si 薄膜、SiO_2 层的厚度；V_0 为 $x=0$ 处的表面势。有人已算出，在扩展态导电的温度范围内，源漏之间的电流[4]为

$$I_{D_s}\doteq\frac{I_0}{h}\int_0^h\exp[eV(x)/kT]dx \tag{7}$$

其中，I_0 为 $V_G=0$ 时的 I_{DS} 值。将（6）式代入（7）式有

$$\begin{cases} V_0 = \dfrac{V_G \cdot \varepsilon_i / d \cdot \varepsilon_s}{\sqrt{\dfrac{e^2}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_s} \cdot \overline{N(E)}} + \dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_s \cdot d}} & (8) \\ I_{DS}(V_G) = \dfrac{I_0}{h}\int_0^h \exp\left[\dfrac{eV_0}{kT}\exp\left(-\sqrt{\dfrac{e^2}{\varepsilon_0\varepsilon_s} \cdot \overline{N(E)}} \cdot x\right)\right]dx & (9) \end{cases}$$

（8）、（9）式是计算$\overline{N(E)}$的基本公式．由两式看出，必须用自洽方法计算．即设一初值$\overline{N(E)}$，代入（8）、（9）式算出V_0和I_{DS}，将$I_{DS_{计算值}}$和$I_{DS_{实验值}}$比较，逐步逼近，一直到$I_{DS_{计算值}} = I_{DS_{实验值}}$为止．根据$I_{DS}-V_G$实验曲线上一系列实验点可算出相应的一系列$V_{0n}$和$\overline{N(E)}$，再根据$\overline{N(E)}$利用下式可算出$E_n$能级上态密度值

$$N(E_n) = \frac{\overline{N(E_F+eV_{0n})} \cdot eV_{0n} - \overline{N(E_F+eV_{0n-1})} \cdot eV_{0n-1}}{eV_{0n} - eV_{0n-1}} \tag{10}$$

从而可算出隙态密度在能隙中的能量分布。

3 样品结构测试线路

样品结构和测量线路如图1所示．在$10^{-3}\Omega$cm的单晶硅衬底上生长一层约1μm厚的高质量SiO_2层，在其上用辉光放电方法淀积一层（7000-8000Å）a—Si薄膜，然后蒸铝电极D和S．为了良好的欧姆接触，在衬底的另一面化学镀镍，作为栅极，用低温导电胶将银丝粘上作为电极引线．

测量过程中，V_{DS}为100V．样品室真空度2.5×10^{-5}乇，控温精度0.1K，测试温度恒定在50℃．电流用PF—28型国产静电计测量．

4 实验结果和讨论

实验结果如图3、图4所示．

①由图3看出，栅压在0-300V范围内，源漏之间电流I_{DS}随栅压的增大而迅速增加．在此范围内，I_{DS}值约变化六个数量级，这充分显示了栅压对a—Si表面强有力的电导调制作用．曲线形状和数值与国内外有关报道相一致．

②由图3看出，栅压在0-(-200V)范围内，源漏之间电流I_{DS}随栅压绝对值的增加几乎没有变化．这种情况在Spear的实验曲线和半导体所的实验曲线中也都出现．我们认为原因就在于SiO_2不是理想的绝缘层．实际的氧化层中不可避免的要带些正电荷（面电荷密度约$(10^{10}—10^{11})cm^{-2}$），这些正电荷同样会在a—Si表面层内感应出等量的负电荷，从而使得栅压$V_G=0$时，能带已向下有一定的弯曲（表面势V_0约0.1eV）．这种初始状况对正半周$I_{DS}—V_G$关系的测量影响不明显，但对负半周$I_{DS}—V_G$关系的测量来说，影响就比较大，因为负栅压加大的过程伴随着一个a—Si表面层电子耗尽的过程，在此过程中，负栅压加大，I_{DS}电流基本上变化不大或稍微变小．我们的负半周$I_{DS}—V_G$关系曲线也说明了这一点．

③图4是用计算机根据图3实验数据算出的隙态密度的能量分布曲线．曲线表明，越靠近能隙中央，态密度越小，我们的实验值为$6\times10^{17}cm^{-3}\cdot(eV)^{-1}$；越靠近能隙的两端，

即E_c、E_v方向，隙态密度越大。如右半部分，在$E-E_F=0.5$eV处（即$E_c-E=0.25$eV

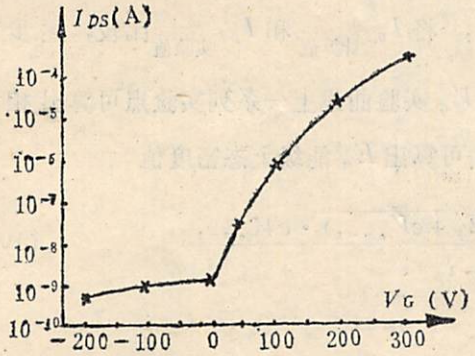


图 3 源漏电流I_{DS}与栅压V_G间的特性曲线

注：此曲线是栅压V_G每隔5V测一源漏电流I_{DS}而得到。

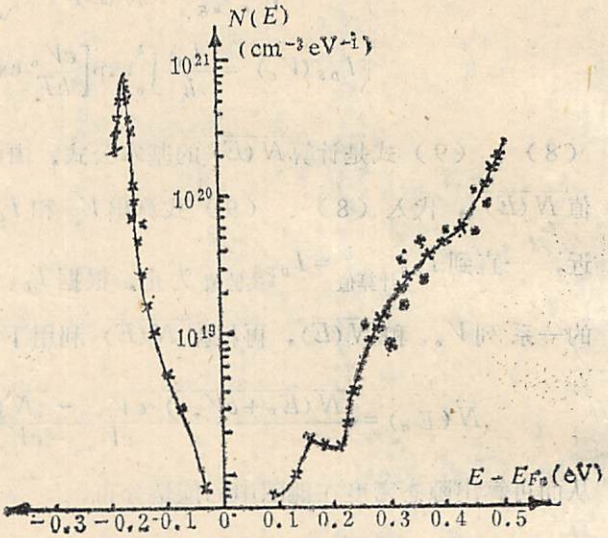


图 4 非晶硅隙态密度随能量的分布

淀积温度$T_D=300$℃

膜　厚$h=0.8\mu$m

测试温度$T=50$℃

处），隙态密度值为2×10^{20}cm$^{-3}\cdot$(eV)$^{-1}$。这种总的分布趋势与*CFO*的态密度分布模型基本一致。

④由图4曲线看出：右半部分在$E-E_F=0.15$eV处，态密度有一个小峰，峰值为1.9×10^{18}cm$^{-3}\cdot$(eV)$^{-1}$；左半部分在$E-E_F=-0.175$eV处，态密度有一个高峰，峰值为7×10^{20}cm$^{-3}\cdot$(eV)$^{-1}$。从我们测得的两个峰的座落位置看，我们的实验曲线又和改进的Davis-Mott模型相似[2]。

⑤将我们的整个实验曲线（左、右两部分）与Spear的实验曲线[5]比较，发现两个曲线不仅在形状上，而且在数值上几乎都完全相同。不同的是他们曲线右半部分的小峰位置在$E-E_F\doteq0.4$eV处。在样品制备中，吴志强、周阎金、刘洪图同志给予我们很大帮助，在此表示衷心的感谢！

参　考　文　献

[1] 韩汝琦，物理，8 (1979)，117.

[2] Nagels, P., Amorphous Semiconductor (ed by Brodsky M.H.), Springer-Verlag, Berlin, 1979年, 113—158.

[3] Mackenzie, K. D., Lecomber, P. G. and Spear, W.E., *Phil. Mag. B.*, 46 (1982), 377—389.

[4] Goodman, N.B., Fritzsche, H. and Ozaki, H., *J. Non-crystalline Solids*, 35—36 (1980), 599.

[5] Madan, A. L., Comber, P. G. and Spear, W. E., *J. Non-crystalline Solids*, 20 (1976), 239.

Determination of the Density of Gap States in Amorphous Silicon Using Field Effect Technique

Lu Zhihui Chen Baozhu Liu Jizhou

(Department of Physics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87007

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

三单色激光场驱动的四能级原子的共振荧光光谱分布*

罗耕贤 郭光灿

(物 理 系)

1 引言

无论是从量子光学理论研究，还是从激光光谱实验研究的角度来看，共振荧光都是令人感兴趣的课题．近年来的有关文献集中处理了二能级或三能级原子问题，然而对四能级原子系统的共振荧光问题却很少有人讨论．本文采用 Dressed 变换[1-3]，在一束强激光和二束弱激光作用下研究四能级原子体系的荧光光谱分布特征．

2 模型

如图1所示的系统（原子加三个外场），该原子受频率分别为 ω_α、ω_β 与 ω_γ 的三束近共振激光场作用．图中双线箭头表示强激光场感应的跃迁，单线箭头表示弱激光场感应的跃迁，波曲线箭头表示电偶极近似下允许的荧光跃迁．对此系统，令 $E_2-E_1\equiv\omega_0$ 及 $\frac{1}{2}(E_2+E_1)\equiv 0$，在旋波近似($RWA$)下，系统哈密顿量可写为

1987年3月12月收到．

* 中国科学院科学基金资助的课题．

$$H=\frac{1}{2}\omega_0(C_2^+C_2-C_1^+C_1)-E_0C_0^+C_0+E_3C_3^+C_3+\omega_\alpha\alpha^+\alpha$$
$$+\omega_\beta\beta^+\beta+\omega_\gamma\gamma^+\gamma+\varepsilon_\alpha(\alpha C_2^+C_1+\alpha^+C_1^+C_2)$$
$$+\varepsilon_\beta(\beta C_3^+C_2+\beta^+C_2^+C_3)+\varepsilon_\gamma(\gamma C_1^+C_0+\gamma^+C_0^+C_1)$$
$$+\sum_k\omega_k a_k^+a_k+\sum_k\varepsilon_k\{a_k(C_2^+C_1+C_3^+C_2+C_1^+C_0)+H.C.\}\qquad(\hbar=1)\quad(1)$$

式中 C_i^+ 和 $C_i(i=0,1,2)$ 分别对应禄原子第 i 能级的产生和消灭算符，α、β、γ和 α^+、β^+、γ^+ 分别对应频率为ω_α、ω_β、ω_γ 的驱动场的消灭算符和产生算符，ε_α、ε_β、ε_γ 分别为相应单色场与原子的耦合常数，a_k^+、a_k对应 k 模式荧光光子的产生和消灭算符，它们与原子的耦合常数是 ε_k（已假设荧光与原子不同能级对之间的耦合常数相同）.

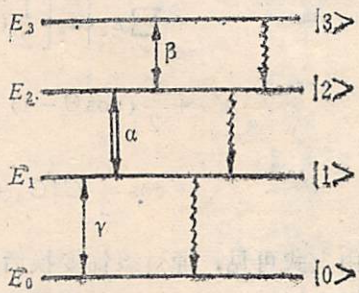


图 1 三单色激光场驱动的四能级原子

考虑到 ω_α 为强激光场，ω_β 和 ω_γ 为弱激光场，我们可以将（1）式写成

$$H=H_0+\sum_k\omega_k a_k^+a_k+H_k\qquad(2)$$

式中H_0 作为未受扰动的 Dressed 原子的哈密顿量，H_k 包括了两弱场的自由哈密顿量以及它们同原子的相互作用哈密顿量——作为 Dressed 原子体系的微扰项．这样

$$H_0=\frac{1}{2}\omega_0(C_+^2C_2-C_1^+C_1)-E_0C_0^+C_0+E_3C_3^+C_3+\omega_\alpha\alpha^+\alpha$$
$$+\varepsilon_\alpha(\alpha C_2^+C_1+\alpha^+C_1^+C_2)\qquad(3)$$

我们令 Dressed 变换为

$$T=\exp\{-\Theta(4N)^{-1/2}(\alpha C_2^+C_1-\alpha^+C_1^+C_2)\}\qquad(4)$$

式中，
$$N=\alpha^+\alpha+\frac{1}{2}(C_2^+C_2-C_1^+C_1)+\frac{1}{2},\quad \Theta=\mathrm{artg}\frac{2\varepsilon_\alpha N^{1/2}}{\omega_0-\omega_\alpha}$$

对（3）式进行 Dressed 变换，得到

$$\widetilde{H}_0=T^{-1}H_0T=\frac{1}{2}(\omega_\alpha-\Delta)(C_2^+C_2-C_1^+C_1)+\omega_\alpha\alpha^+\alpha-E_0C_0^+C_0+E_3C_3^+C_3\qquad(5)$$

其中，$\Delta=[(\omega_0-\omega_\alpha)^2+4\varepsilon_\alpha^2N]^{1/2}$，$\Delta$ 称为失谐的 Rabi 频率，反映了强场作用下能级移动的大小，亦即所谓的 Ac Stark 效应。

应注意，N是算符，因此Θ 以及包含N的有关式都应是算符，考虑到N是个运动常数，且满足$[N,T]=0$，在此只要考虑整个希尔伯特空间中的一个子空间（由N的本征值标志），在这个子空间内可以把 Θ 作为C数，从而 Δ 也可处理为C数[4]．本文后面将仍保持这些量的符号，但应看作是C数。

采用文献[1]的方法可求出整个系统 Dressed 变换后的哈密顿量

$$\widetilde{H}=T^{-1}HT=\frac{1}{2}(\omega_\alpha-\Delta)(C_2^+C_2-C_1^+C_1)-E_0C_0^+C_0$$

$$+E_3C_3^+C_3+\omega_\alpha\alpha^+\alpha+\omega_\beta\beta^+\beta+\omega_\gamma\gamma^+\gamma+\sum_k\omega_k a_k^+a$$

$$+\varepsilon_\beta\Big\{\beta\Big(\cos\frac{\Theta}{2}C_3^+C_2-\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha C_3^+C_1\Big)+\beta^+\Big(\cos\frac{\Theta}{2}C_2^+C_3$$

$$-\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha^+C_1^+C_3\Big)\Big\}+\varepsilon_\gamma\Big\{\gamma\Big(\cos\frac{\Theta}{2}C_1^+C_0+\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha C_2^+C_0\Big)$$

$$+\gamma^+\Big(\cos\frac{\Theta}{2}C_0^+C_1+\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha^+C_0^+C_2\Big)\Big\}$$

$$+\sum_k\varepsilon_k\Big\{a_k\Big[\frac{1}{2}(\cos\Theta+1)C_2^+C_1+\frac{1}{2}\sin\Theta\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha^+(C_2^+C_2-C_1^+C_1)$$

$$+\frac{1}{2}(\cos\Theta-1)\frac{1}{N}\alpha^{+2}C_1^+C_2+\cos\frac{\Theta}{2}C_3^+C_2-\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha C_3^+C_1$$

$$+\cos\frac{\Theta}{2}C_1^+C_0+\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha C_2^+C_0\Big]+H.C.\Big\} \tag{6}$$

由上式可见，通过缀饰变换后消去了系统 H 中强激光场（ω_α）与原子的相互作用项，而弱激光场（ω_β 和 ω_γ）与原子的相互作用项以及荧光场与原子的相互作用项则变得更加复杂，这正是使用 T 变换的代价，后面将看到这个复杂性并不太影响我们对问题的分析.

值得指出，（6）式中最后一大括号项表示荧光场与原子的相互作用，象文献[1]结果一样，这里也存在着吸收 ω_α 的单光子及双光子过程. 这意味着在能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 间跃迁而发射荧光的同时，可伴随有模 ω_α 的双光子吸收过程.

3 荧光光谱

下面我们讨论系统的荧光光谱. 为此应先计算荧光光场算符 $a_k(t)$ 的时间演化. 在 Heisenberg 图象中，$a_k(t)$ 的运动方程为

$$a_k(t)=-i[a_k,\widetilde{H}]=-i\omega_k a_k-i\varepsilon_k\Big[\frac{1}{2}(\cos\Theta+1)C_1^+C_2$$

$$+\frac{1}{2}\sin\Theta\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha(C_2^+C_2-C_1^+C_1)+\frac{1}{2}(\cos\Theta-1)\frac{1}{N}\alpha^2C_2^+C_1$$

$$+\cos\frac{\Theta}{2}C_2^+C_3-\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha^+C_1^+C_3+\cos\frac{\Theta}{2}C_0^+C_1+\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha^+C_0^+C_2 \tag{7}$$

这是一阶常系数线性微分方程，其形式解为

$$a_k(t)=a_k(0)e^{-i\omega_k t}-i\varepsilon_k\Big\{\int_0^t\Big[\frac{1}{2}(\cos\Theta+1)C_1^+C_2+\frac{1}{2}\sin\Theta\frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\cdot\alpha(C_2^+C_2-C_1^+C_1)+\frac{1}{2}(\cos\Theta-1)\frac{1}{N}\alpha^2C_2^+C_1+\cos\frac{\Theta}{2}C_2^+C_3$$

$$-\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha^+C_1^+C_3+\cos\frac{\Theta}{2}C_0^+C_1+\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha^+C_0^+C_2\Big]_{t=\tau}$$

$$\cdot e^{-i\omega_k\tau}\cdot d\tau\Big\}e^{-i\omega_k t} \tag{8}$$

式中，右边第一项为自由项；而积分项为源项，它代表了那些物理因素对荧光光场算符有贡献，因此应设法计算出积分结果，为此需求出有关原子算符或同时含原子和外场变量的混合算符的时间演化表达式．作为一种近似，在这些算符的Heisenberg运动方程中的哈密顿量$\widetilde{H}$用$\widetilde{H}_0$来代替（关于这个近似后面将进一步讨论）．这样，算符之间的耦合方程便退化为各自独立的运动方程，从而便于求解．结果为

$$\left.\begin{aligned}
&C_1^+C_2=(C_1^+C_2)_0e^{-i(\omega_a-\Delta)t}\\
&\alpha^2C_2^+C_1=(\alpha^2C_2^+C_1)_0e^{-i(\omega_a+\Delta)t}\\
&\alpha(C_2^+C_2-C_1^+C_1)=[\alpha(C_2^+C_2-C_1^+C_1)]_0e^{-i\omega_a t}\\
&C_2^+C_3=(C_2^+C_3)_0\exp\left\{-i\left[E_3-\frac{1}{2}(\omega_a-\Delta)\right]t\right\}\\
&\alpha^+C_1^+C_3=(\alpha^+C_1^+C_3)_0\exp\left\{-i\left[E_3-\frac{1}{2}(\omega_a+\Delta)\right]t\right\}\\
&C_0^+C_1=(C_0^+C_1)_0\exp\left\{-i\left[E_0-\frac{1}{2}(\omega_a-\Delta)\right]t\right\}\\
&\alpha^+C_0^+C_2=(\alpha^+C_0^+C_2)_0\exp\left\{-i\left[E_0-\frac{1}{2}(\omega_a+\Delta)\right]t\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

其中每个等式右边的第一项（带右下标为零的括号项）形式上分别表示相应算符的初始值，把（9）式代入（8）式，求得荧光场的解为

$$\begin{aligned}
a_k(t)=a_k(0)e^{-i\omega_k t}+\varepsilon_k\Big\{&\frac{1}{2}(\cos\Theta+1)(C_1^+C_2)_0\left[\frac{P}{\omega_a-\Delta-\omega_k}\right.\\
&\left.-i\pi\delta(\omega_a-\Delta-\omega_k)\right]+\frac{1}{2}(\cos\Theta-1)\frac{1}{N}(\alpha^2C_4^2C_1)_0\\
&\cdot\left[\frac{P}{\omega_a+\Delta-\omega_k}-i\pi\delta(\omega_a+\Delta-\omega_k)\right]+\cdots\Big\}e^{-i\omega_k t}
\end{aligned}\tag{10}$$

式中计算积分时，用了等式$\frac{1}{i}\frac{1}{\omega-\omega_0\pm i\varepsilon}=-i\frac{P}{\omega-\omega_0}\mp\pi\delta(\omega-\omega_0)$．采用类似于文献[1]的方法，由（10）式可得原子辐射荧光场振幅为

$$\begin{aligned}
E(t)\propto\sum_k a_k(0)e^{-i\omega_k t}&-i\Gamma_1\frac{1}{2}(\cos\Theta+1)C_1^+C_2\\
&-i\Gamma_2\frac{1}{2}(\cos\Theta-1)\frac{1}{N}\alpha^2C_2^+C_1-i\Gamma_3\frac{1}{2}\sin\Theta\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha(C_2^+C_2-C_1^+C_1)\\
&-i\Gamma_4\cos\frac{\Theta}{2}C_2^+C_3+i\Gamma_5\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha^+C_1^+C_3-i\Gamma_6\cos\frac{\Theta}{2}C_0^+C_3\\
&-i\Gamma_7\sin\frac{\Theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha^+C_0^+C_2
\end{aligned}\tag{11}$$

其中，$\Gamma_1=\pi\sum_k\varepsilon_k^2\delta(\omega_a-\Delta-\omega_k)$；$\Gamma_2=\pi\sum_k\varepsilon_k^2\delta(\omega_a+\Delta-\omega_k)$；$\Gamma_3=\pi\sum_k\varepsilon_k^2\delta(\omega_a-\omega_k)$；

$\Gamma_4=\pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta\left[E_3-\frac{1}{2}(\omega_\alpha-\Delta)-\omega_k\right]$；$\Gamma_5=\pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta\left[E_3-\frac{1}{2}(\omega_\alpha+\Delta)-\omega_k\right]$；$\Gamma_6=\sum_k \pi\varepsilon_k^2\delta\left[E_0-\frac{1}{2}(\omega_\alpha-\Delta)-\omega_k\right]$；$\Gamma_7=\pi\sum_k \varepsilon_k^2\delta\left[E_0-\frac{1}{2}(\omega_\alpha+\Delta)-\omega_k\right]$。分别对应Dressed原子的自发辐射率（在不考虑其它衰减的情况下，它们的倒数分别是该Dressed原子能级的寿命）。Dressed原子能级间的荧光跃迁分布如图2所示。图中所标数字分别对应$\Gamma_1-\Gamma_7$（已假定$\omega_\alpha>\Delta$）。辐射的荧光光谱ω_k分别为$\omega_\alpha-\Delta$，$\omega_\alpha+\Delta$，ω_α，$E_3-\frac{1}{2}(\omega_\alpha-\Delta)$，$E_3-\frac{1}{2}(\omega_\alpha+\Delta)$，$E_0-\frac{1}{2}(\omega_\alpha-\Delta)$与$E_0-\frac{1}{2}(\omega_\alpha+\Delta)$，呈7条谱线的结构。由（11）式还可看出，谱线的强度（它可由$E^*(t)E(t)$得出）和宽度均通过参量Θ和Δ而与驱动场强度以及频差$\delta\omega(=\omega_\alpha-\omega_0)$密切相关。

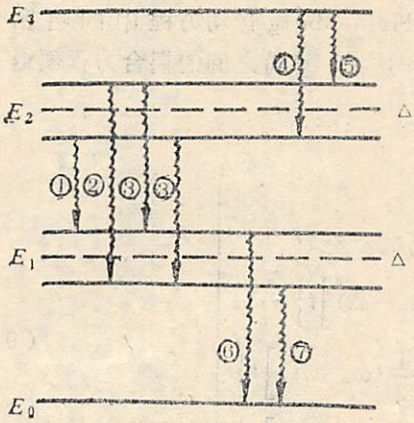


图 2　荧光跃迁过程

4　讨论

1）Γ_1、Γ_2、Γ_3显然是代表能级$|1\rangle$和$|2\rangle$间形成的荧光谱，其频谱值完全与好象只有能级$|1\rangle$和$|2\rangle$存在时的二能级原子结果相同。这是由于ω_β、ω_γ均为弱场，因此可以把整个四能级原子系统近似地看作一个等效的二能级原子系统[5]，两个弱场对此等效系统没有任何影响。

2）Γ_4、Γ_5是由$|2\rangle$和$|3\rangle$能级间形成的，Γ_6、Γ_7是由$|0\rangle$和$|1\rangle$能级间形成的。由分析Γ_4、Γ_5可知，这些频谱值还是与弱场ω_β无关。但我们应该注意到$|2\rangle$和$|3\rangle$间荧光的形成是离不开ω_β场的存在的，假如没有ω_β场，则能级$|2\rangle$上的粒子数始终不能泵浦至上能级$|3\rangle$上，这样在$|2\rangle$和$|3\rangle$之间就不可能形成荧光；而如果施入了ω_β场（那怕是很弱），这时总有粒子从能级$|2\rangle$泵浦至能级$|3\rangle$，泵浦的粒子数多少，与强场ω_α密切相关，表明了强场ω_α对$|2\rangle$和$|3\rangle$间荧光过程的影响。

同理，对Γ_6、Γ_7也可作类似于Γ_4、Γ_5的分析。显然，$|0\rangle$和$|1\rangle$与$|2\rangle$和$|3\rangle$这两个子系统之间不存在互相影响的问题。

3）若把本文系统的模型变为强光束加在$|0\rangle$和$|1\rangle$或$|2\rangle$和$|3\rangle$之间，而两弱光加在相应余下的能级之间，那么结果却大不一样。类似的计算表明，此时谱带是六峰结构的，与文献[1]结果也不一样。这点说明了只有当整个系统（包括所研究的原子能级结构形式以及外场在原子能级间的空间位置）确定了，系统的荧光光谱结构一般才确定。

4）由上述结果可推得，若系统（原子加激光场）是由N能级原子与一强激光场和（$N-2$）个弱激光场所组成，则其谱结构并不是简单地出现（$2N-1$）个谱带，而是出现（$N+2$）峰结构或出现（$N+3$）峰结构（$N\geqslant4$）。

5）当 $\omega_\beta=0$ 或只存在 $|0\rangle$、$|1\rangle$、$|2\rangle$ 三个能级时，本文结果过渡到类似于文献[1]的结果．这表明，互换强光与弱光在能级之间的位置，荧光谱线数目不发生改变．

6）求解（9）式时，若不作 $H\to H_0$ 的近似，可以发现在它们的结果中，指数项部分不仅含虚数项还应含实数项——此实数项表示 Dressed 原子能级的弛豫常数，亦即反映了荧光线型的线宽大小[2]．因为我们计算中略去的正是真空场与原子的相互作用部分，而恰好是由于这部分的存在产生了原子的自发辐射，导致荧光线型具有一定的线宽．

8）假设失谐的 Rabi 频率较小，满足 $\Delta<\omega_a$，通过简单的分析可知，当强输入场的频率 ω_a 变大（变小）时，ω_{k_1}、ω_{k_2}、ω_{k_3} 三个位置都向着频率增高（降低）的方向移动，但移动速度不一样，彼此之间的间隔在不断改变，$\omega_{k_2}-\omega_{k_3}=\omega_{k_2}-\omega_{k_1}=\Delta$．

其次，考虑 $\omega_{k_4}=E_3-\frac{1}{2}(\omega_a-\Delta)$ 和 $\omega_{k_5}=E_3-\frac{1}{2}(\omega_a+\Delta)$，当 ω_a 值变大（减小）时，可以发现 ω_{k_4} 和 ω_{k_5} 都向着低（高）频方向移动．其间隔 $\omega_{k_4}-\omega_{k_5}=\Delta$ 也在随 ω_a 的变化而变化．

最后，比较 $\omega_{k_6}=E_0-\frac{1}{2}(\omega_a-\Delta)$，$\omega_{k_7}=E_0-\frac{1}{2}(\omega_a+\Delta)$，易知 ω_{k_6}、ω_{k_7} 随 ω_a 的变化规律与 ω_{k_4}、ω_{k_5} 随 ω_a 的变化规律是一样的．

参　考　文　献

[1] 彭金生，物理学报，34 (1985)，408.
[2] 彭金生，物理学报，35 (1986)，788.
[3] Parbonaro et al., *Phys. Lett.*, 73A(1979), 97.
[4] Compagno, G. et al. *Phys. Rev.*, 26A(1982), 2065.
[5] Ranock, R. L. et al., *IEEE. J.Q.E.*, 13 (1977), 425.

Resonance Fluorescence Distribution of a Four-Level Atom Driven by Three Laser Fields

Luo Gengxian　Guo Guangcan

(Department of Physics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87008

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

$Y_{3-x}Ba_xCu_2O_{7-y}$ 体系的中温区电特性

周 群* 杨碚芳 蔡维理 韩念慈 吴梅清

(物 理 系)

在 $Y_{3-x}Ba_xCu_2O_{7-y}$ 体系中，我们已经发现当 $1.0<x\leqslant 2.0$ 时，可以得到零电阻温度为 90K 左右的超导体[1]. 本文利用交流电桥法研究了该体系样品在室温至 300℃ 的中温区范围内的电特性. 发现在 90K 左右电阻为零或电阻有下降趋势的样品，它们在上述中温区范围内都具有正温度系数，它们的物相均包含 $Y_1Ba_2Cu_3O_{9-\delta}$ 相或畸变的 $Y_1Ba_2Cu_3O_{9-\delta}$ 相；在液氮温区为绝缘体的样品，它的中温区电阻具有负温度系数，其物相主要为 $Cu_2Y_2O_5$ 相. 利用 Wagner 直流极化法对样品的电子电导测试表明，这个体系的材料在室温下的电导主要由空穴传导所致.

1 实验与数据

1.1 样品制备 见文献 [1].

1.2 电阻测量 采用交流电桥法，利用 CD6 导纳电桥，在室温至 300℃ 范围内，对 $x=0.9$、1.8、2.0、2.2 及 2.4 的五个样品进行电阻测量. 测试频率为 10kHz，压片样品两端所加电压约 150mV. 在压片两端面镀金膜作为测试电极. 测量结果如图 1 所示.

1.3 电子电导测量 采用 Wagner 直流极化法，对镀金电极的三个样品 ($x=2.4$、2.0、0.9)，在室温下进行了电子电导测试. 样品的电子电导 G_e 及其在交流电桥法中测得的总电导 G_a 均列入表 1. 调节不同的极化电压 E，可测得此时样品上通过的极化电流 I_e. 这三个

1987年7月11日收到.

* 物理系 82 级本科生.

样品的 $I_e \sim E$ 相关性类似，其中 $x=2.4$ 的样品的 $I_e \sim E$ 曲线见图 2 .

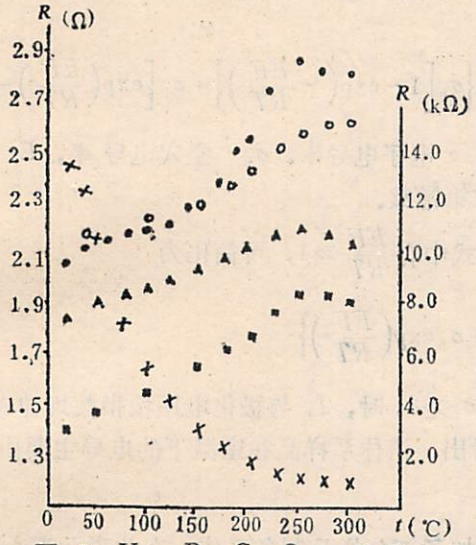


图 1 $Y_{3-x}Ba_xCu_2O_{7-y}$ 体系的 $R \sim t$ 线曲 • $x=2.4$, ▲ $x=2.2$, ■ $x=2.0$, ○ $x=1.8$, × $x=0.9$. $x=0.9$ 的样品电阻对应右侧纵坐标

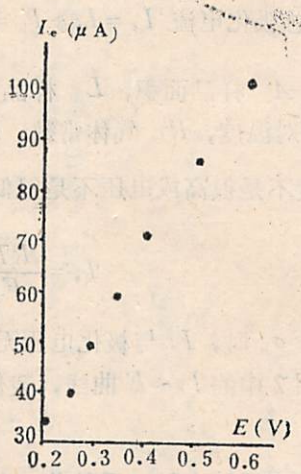


图 2 $x=2.4$ 样品的 $I_e \sim E$ 曲线

表 1

x	0.9	2.0	2.4
G_a	87.2μ℧	578.3m℧	285.6μ℧
G_e	78.5μ℧	466m℧	172.6μ℧

2 结果与讨论

2.1 (*a*)根据文献[1]及图 1，本体系样品的物相及低温和中温区电特性可列成表 2 .

表 2

x	0.9	1.8	2.0	2.2	2.4
主要物相	211、225	123、211	123、211	123*	123*
零电阻温度(K)	*	89	89	**	**
中温区电阻的温度系数	<0	>0	>0	>0	>0

其中，211：$Y_2Ba_1Cu_1O_5$；225：$Cu_2Y_2O_5$；
123：$Y_1Ba_2Cu_3O_{9-\delta}$ ($\delta \approx 2.1$)；123*：畸变的 123 相.
*：该样品在液氮温区为绝缘体.
**：该样品在 90K 左右电阻下降，但 $R_{LN_2} \neq 0$.

(*b*) 由图 1 可知：对于 $1.8 \leqslant x \leqslant 2.4$ 的样品，其温度系数虽然为正，但值很小。$x=0.9$

的样品有较大的负温度系数.

(c) 在温度为250℃附近，发现$2.0 \leqslant x \leqslant 2.4$的样品的电阻—温度曲线出现转折点，其原因尚待研究.

2.2 总极化电流 $I_e = I_n + I_h = \frac{RTA}{FL}\left\{\sigma_n\left[1-\exp\left(-\frac{EF}{RT}\right)\right]+\sigma_h\left[\exp\left(\frac{EF}{RT}\right)-1\right]\right\}$[2]

式中：A 样品面积，L 样品长度，σ_n 电子电导率，σ_h 空穴电导率，E 极化电压，T 绝对温度，R 气体常数，F 法拉第常数.

当温度不是很高或电压不是很低时，上式中有$\frac{EF}{RT} \gg 1$，可简化为

$$I_e = \frac{RTA}{FL}\left\{\sigma_n + \sigma_h \exp\left(\frac{EF}{RT}\right)\right\}$$

当$\sigma_n \gg \sigma_h$时，I_e与极化电压无关；当$\sigma_h \gg \sigma_n$时，I_e与极化电压按指数规律变化. 根据表1及图2中的$I_e \sim E$曲线，我们可以看出，该体系样品在室温下的电导主要由空穴传导所致.

科大物理系陈金松、乐德芬、曲惠芬参加了部分样品制备工作，在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] 杨碚芳、蔡维理等人，低温物理学报，9 (1987)，219.
[2] Wagner, J. B., *J. Chem. Phys.*, 26 (1957), 1597.

Electrical Properties of $Y_{3-x}Ba_xCu_2O_{7-y}$ Series in Middle Temperature Range

Zhou Qun Yang Beifang Cai Weili Han Nianci Wu Meiging

(Department of Physics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87009

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

γ辐射法制备填充柱固定化固定相

陈文明 吴宁生 袁致俭 吴幼源

（应用化学系）

在气相色谱中，对固定相进行固定化，能增加固定相热稳定性和液膜稳定性，具有非萃取性和减少超载峰的拖尾等显著优点，受到广泛地重视，现已有多种固定化固定相毛细管色谱柱商品出售[1]．相对说来，填充柱固定化固定相的研究报道较少，已报道的有SE—54[2]和国产甲基乙烯基硅橡胶[3]．考虑到我国国情，填充柱气相色谱法仍在广泛地使用，对常用的极性固定相聚乙二醇20M和非极性固定相SE—30的固定化研究很有必要．本文报告用钴60伽玛辐射法研制固定化PEG—20M和SE—30的结果及其性能考察．

1 实验部分

用钴60γ源为辐射源．试验用的载体有80—100目上试101硅烷化白色载体、上试101酸洗白色载体和60—80目Chromosorb W AW-DMCS．固定相为聚乙二醇20M（上海试剂厂生产）和SE—30（荷兰Chromopack产）．过氧化苯甲酰（BP）用前重结晶纯化．二氯甲烷和正戊烷均为分析纯．

实验步骤：按常规将固定液涂渍在载体上．对于聚乙二醇20M，在涂渍过程中加入一定量过氧化苯甲酰．以一定剂量率辐照一段时间，然后在索氏抽提器中用正戊烷和二氯甲烷分别抽提一小时，根据固定相在抽提前后的重量差确定交联度．

2 结果和讨论

2.1 固定化固定相聚乙二醇20M

1986年11月15日收到．

2.1.1 辐射敏化交联的优惠条件和交联机制

实验得出的优惠条件为：敏化剂 BP 用量为聚乙二醇 20M 量的 0.3%，载体使用上试101白色硅烷化担体，为减少敏化剂分解损失，固定液涂渍好后立即辐照，剂量率 1.7×10^3Gy/hr，总剂量为 1.7×10^4Gy．在此条件下，PEG—20M 的交联度为 44%，且重复性好．实验发现，用硅烷化载体的交联度比用酰洗载体的高得多．用红外光谱鉴定，交联固定相不含过氧化苯甲酰的分解产物．我们认为固定化聚乙二醇 20M 是分子间的交联，而不是聚乙二醇 20M 与载体表面的键合，BP 起着敏化交联的作用．

2.1.2 柱性能考察

1）酸/碱性能考察

在 102G 气相色谱仪上进行，色谱柱为内径 3mm、长 2m 的螺旋柱，用岛津 C—R1B 色谱数据处理机计算峰面积．按 Grob 试验标准混合物组成，配制 2，6—二甲基苯胺和2，6—二甲基苯酚的正己烷溶液，二者峰面积比为 1.00，说明交联聚乙二醇 20M 固定相为中性．

2）热稳定性

在日本理学热分析仪上进行热重和差热分析，结果列于表 1．数据说明交联聚乙二醇 20M 的热稳定性得到提高．

表 1 固定化 PEG—20M 热稳定性考察

交联前的 PEG—20M 固定相		交联后的 PEG—20M 固定相	
失重%	温度（℃）	失重%	温度（℃）
2.00	202.45	2.00	241.87
4.00	264.91	4.00	295.07
6.00	309.98	6.00	332.42

实验数据表明，交联后的 PEG—20M 固定相热稳定性提高了 40℃ 左右．

3）耐水性能考察

向色谱柱中连续注入蒸馏水共 5ml．注入水前后正丙醇的保留时间保持不变．这表明固定化聚乙二醇 20M 具有耐水性，可直接用于含水样品的分析．

4）柱效的测定

在 102G 气相色谱仪上进行实验．以正构一元饱和醇样为试验物，He 气为载气，流速 30ml/min，柱温 100℃，测得 $n_{real}=695/m$．

2.2 固定化固定相 SE—30

SE—30 为甲基聚硅氧烷，用 γ 射线辐照易于交联．将 SE—30 涂渍在 Chromosorb W AW—DMCS 载体上进行辐照，剂量率为 2.48×10^3Gy/hr，总剂量为 2.48×10^4Gy[4]，交联度为 92%．在日本理学热分析仪上进行热重和差热分析，在 361℃ 未交联 SE—30 失重 3.96%，已交联 SE—30 失重为 1.74%，柱呈中性．在 102G 气相色谱仪上进行柱效测量．24.4% SE—30 填入内径 3mm 长 2m 柱管内，载气 N_2 的流速为 50ml/min，柱温为150℃，以苯和烷基苯系列为试验物，测得 $n_{real}=1742/m$．

交联聚乙二醇—20M 和交联 SE—30 固定相已在我们实验室用于有关色谱研究的实验分别有二个月和半年．性能稳定，谱峰对称，峰对称度接近 1．

参 考 文 献

[1] 陆婉珍、孙加和，色谱，4 (1986)，188.

[2] Ghaoni, L., Shanfield, H. and Zlatkis, A., *Chromotographia*, 18 (1984), 11.

[3] 修正佳、徐淑芳、李浩春，全国第5届色谱会议论文集，1985年，90.

[4] Tatar, V., et al., *J. Chromotogr*, 328 (1985), 337.

Immobilization of Stationary Phases for Packed Column by γ-Irradiation

Chen Wenming Wu Ningsheng Yuan Zhijian Wu Youyuan

(*Applied Chemistry Department*)

中国科学技术大学学报 JCUST 87010

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

在流动体系中相界面附近浓度的分布

傅启民 许志平

(应用化学系)

1904年，L.Prandtl曾提出流体沿壁面流动的边界层理论[1,2]，这使流体在导管中流动以及流体沿壁面流动的研究得到了很大的发展．根据这一理论，人们相继提出了流动边界层、传热边界层和浓度边界层的概念，从理论上导出了多种形式的方程[3-5]，并通过实验使其得到证实和完善．当前，在相界面传质研究中，主要提出了有效膜、溶质渗透和表面更新等三种较有影响的理论[5,6]．尽管这些理论可以解释一些实验事实，但均有不足之处．其缺陷是：1）理论计算复杂，参数预测无一定规律可寻；2）多数理论只考虑了与界面平行方面上的流动，没有仔细研究与界面垂直方向上的流动对传质的影响；3）很少论述在相界面附近浓度的分布．本文根据质量守恒原理，并在一定的条件下，探讨了垂直于界面方向上流动对传质的影响以及界面附近浓度的分布，并给出了浓度边界层和传质速率的表达式．

1 基本推导过程

假定条件为：1）传质过程是稳态的；2）相界面在小范围内是水平的；3）物质的特性参数在一定条件下不变，并且不考虑界面效应（如表面张力等）的影响．

如图1，坐标系如图所示，A溶液中溶质通过界面向B相传递．设A相中溶质浓度为C，它在A相中的扩散系数为D，N是相界面附近某处总的传质速率，它在三个方向上的分量分别以N_z、N_x和N_x表示．在单元体积dV和单元时间dt内，$dV=dxdydz=dA_{xy}d_z=dA_{yz}$

1987年3月31日收到．

$x = dA_{xz}dy$。因溶液流动引起的溶质质量变化，

$$dM_1 = u_x\frac{\partial c}{\partial x}dxdA_{yz}dt + u_y\frac{\partial c}{\partial y}dydA_{xz}dt + + u_z\frac{\partial c}{\partial z}dzdA_{xy}\cdot dt \qquad (1)$$

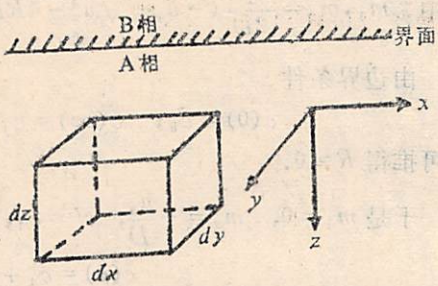


图 1 液相单元体积坐标系

式中 u_x、u_y、u_z 是三个方向上的流动速度。因分子扩散引起的溶质质量变化，

$$dM_2 = -\frac{\partial N_x}{\partial_x}dxdA_{yz}dt - \frac{\partial N_y}{\partial y}dA_{xz}dydt - - \frac{\partial N_z}{d_z}dzdA_{xy}\cdot dt \qquad (2)$$

根据质量守恒原理，

$$dM_1 + dM_2 = \frac{\partial c}{\partial t}dv\cdot dt \qquad (3)$$

再由 Fick 定律，

$$N_x = -D\frac{\partial c}{\partial x} \qquad N_y = -D\frac{\partial c}{\partial y} \qquad N_z = -D\frac{\partial c}{\partial y} \qquad (4)$$

由图1所示的关系式，将（1）、（2）、（4）式代入（3）式中，等式两边同除以 $dVdt$，得

$$u_x\frac{\partial c}{\partial x} + u_y\frac{\partial c}{\partial y} + u_z\frac{\partial c}{\partial z} + D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial c}{\partial t} \qquad (5)$$

（5）式就是双组分体系中质量衡算方程，在界面传质中有着特殊的应用。

2 方程求解

由假定1得

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

设 $c = c(x)c(y)c(z)$，连同（6）式一起代入（5）式中，分离变量得

$$-\left(\frac{D}{c(z)}\frac{\partial^2 c(z)}{\partial z^2} + u_z\frac{\partial c(z)}{c(z)\partial z} = \frac{D}{c(y)}\frac{\partial^2 c(y)}{\partial y^2} + \frac{u_y}{c(y)}\frac{\partial c(y)}{\partial y} + \frac{D}{c(x)}\frac{\partial^2 c(x)}{\partial x^2} + + \frac{u_x}{c(x)}\frac{\partial c(x)}{\partial x} = R \qquad (7)$$

移项整理得

$$D\frac{\partial^2(z)}{\partial z^2} + u_z\frac{\partial c(z)}{\partial z} - Rc(z) = 0 \qquad (8)$$

此方程的通解为

$$c(z) = c'e^{m_1 z} + c''e^{m_2 z} \qquad (9)$$

式中 $m_1, m_2 = \frac{1}{2D}(-u_z \pm \sqrt{u_z^2 - 4RD})$

由边界条件

$$c(0) = c_0; \quad c(\infty) = c_1 \tag{10}$$

则可推得 $R \equiv 0$.

于是 $m_1 = 0$, $m_2 = -\frac{u_z}{D}$, $c' = c_1$, $c'' = c_0 - c_1$, 所以 $c(z)$的表达式为

$$c(z) = c_1 + (c_0 - c_1)e^{m_2 z} \tag{11}$$

由此可知，由于界面的特殊性，即存在一定边界条件（在本体中是不定的），推得了沿 z 方向上浓度的分布曲线.

$c(x)$、$c(y)$求解很复杂，有关书上已有求解的经验方法. 现在讨论一种最简单的情况，即浓度不随 x、y 变化时，考察了 z 方向上的情形. 这样，N_z 就是N，浓度分布可得出

$$c = c_1 + (c_0 - c_1)e^{m_2 z} \tag{12}$$

3 讨论

3.1 浓度的变化

（12）式表明浓度在界面处是一维分布的，曲线如图 2 所示，其变化规律呈指数变化. 当 $u_z = 0$时，$m_2 = 0$, $c \equiv c_0$，这就是静止时，不考虑界面效应时的均一溶液；在 z 方向上，随着 z 的增大，c 很快接近 c_1。

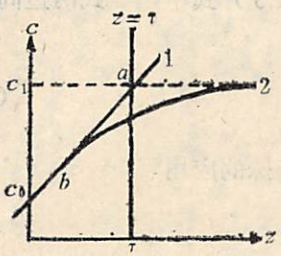


图 2 浓度随 z 轴的变化情况

3.2 边界层厚度

令 $\tau = -1/m_2$，τ 就是界面处浓度边界层厚度.

过 b 点作曲线的切线，它与直线 $z = \tau$ 交于点$a(\tau, c_1)$.

由（12）式，$\left.\frac{dc}{dz}\right|_{z=0} = \frac{c_1 - c_0}{\tau}$，切线方程$c = c_0 + \frac{c_1 - c_0}{\tau}z$，因此 a 点坐标是（τ_1, c_1）.

这就是说，所有浓度差都集中在厚度为 τ 边界层中，而 τ 之外无浓度变化. 这正是浓度边界层的含义.

3.3 传质速率

由切线方程和 Fick 定律，可得

$$N = -D\frac{dc}{d\tau} = -D\frac{c_1 - c_0}{\tau} \tag{13}$$

此式与经验公式完全一样.

再将 τ 值代入（13）式中得

$$N = u_z(c_0 - c_1) \tag{14}$$

（14）式简明地表达了N与 u_z 和浓度差的关系. u_z 增加，N也正比地增加. 式中 c_0 很可能与 D关系密切，目前还没有较好的方法求解.

还需补充说明两点：

①对于浓度不随 x,y 变化的情况，R 肯定为 0；当 u_z 的方向与扩散方向一致时，R 也肯定为 0，这由边界条件所限制；对于 u_z 的方向和扩散方向不一致的情形，我们认为是不会出现的，因为与假定条件 1）相矛盾，从理论上来考察这种情形比较复杂.

②本文的宗旨主要是考察小相界面的情形，以便说明有关问题，在小相界面内的流动与其四周的流动形成对流，从使小相界面内成为稳态，故可认为，N 与 u_z 的关系是 $N \propto u_z$，这为界面传质的强化提供一种方法.

参 考 文 献

[1] Prandtl, L., Essentials of fluid dynamics, Blackie and son, London, 1952, 41.

[2] Keid, Robert, C., et al, The Properties of gases and Liquids, 3rd ed. McGraw-Hill, Znc., 1977, 201.

[3] 上海化工学院等合编，化学工程（第一册），化学工业出版社，北京，1980，81.

[4] 天津大学等合编，化工传递过程，化学工业出版社，北京，1980，253.

[5] 北京大学化学系《化学工程基础》编写组编. 化学工程基础，高等教育出版社，北京，1984，98.

[6] 陈敏恒等编，化工原理（下册），化学工业出版社，北京，1986年，18.

The Distribution of Concentration Near the Phase Interface in the Flow System

Fu Qimin　　Xu Zhiping

(Department of Applied Chemistry)

中国科学技术大学学报 JCUST 87011

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SOIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

最小生成树法在环境质量评价中的应用

戴宏图* 陈祖耀 孙敦明 李 丁 温元凯

(应 用 化 学 系)

环境是一个带有区域性的、多层次、多介质、多因素的动态系统，对其进行质量评价是一项十分重要而复杂的工作．郑家祥等采用 $P_{气}$、$P_{水}$、$P_{地下水}$、$P_{土}$等 4 个不同的污染指数为特征，选用 30 个测点为训练样本，5 个测点为待判样本，运用模糊数学方法，成功地对上海某区的环境质量进行了评价[1]．本文根据同一套数据资料，应用最小生成树法进行平行研究，结果在符合率与预报准确率两个方面，与原系统标准分级比较，比文献 [1] 结果有所改善．

具体做法：先将样本集的原始数据进行预处理、标准化、加权，利用 Karhunen—Loéve 变换算得主成分数据，然后再利用最小生成树方法进行分类、判别．这一切都是在 Apple Ⅱ plus 微机上进行的．

最小生成树法的原理大致是这样的：经过预处理的每个样本被看成是模式空间的一个点，计算各个样本点之间的欧氏距离，在此基础上画出最小生成树，检查同一类样本点是否相聚．若相聚，再对待判样本进行预报，准确率高的话，最小生成树法在这里就是行之有效的．

上海某区各测点环境质量指数及其分级如表 1 所示．其中第 5 、 7 、26、32、35号样本是待判样本，其余都是训练样本．污染情况分为 4 级：未——未污染；轻——轻污染；中——中污染；重——重污染，在计算机处理时分别以 1 、 2 、 3 、 4 表示该污染等级，用 0

1987 年 6 月 19 日收到．

* 现在上海市吴淞区职工业余大学工作．

表 1　各测点环境质量指数及其分级

样本号	$P_{气}$	$P_{水}$	$P_{地下水}$	$P_{土}$	系统分级	最小生成树法分级
1	1.37	0.51	0.51	0.98	未	未
2	1.35	0.52	0.52	0.98	未	未
3	2.85	0.48	0.90	0.92	轻	轻
4	2.36	0.55	0.55	0.93	轻	轻
5*	3.66	0.51	0.80	0.91	轻	轻
6	2.57	1.00	0.85	0.93	轻	轻
7*	3.67	1.00	0.67	0.86	轻	轻
8	3.34	0.55	0.65	0.95	轻	轻
9	3.66	0.72	0.27	1.02	轻	轻
10	3.89	1.30	1.91	1.17	轻	中
11	11.63	0.83	0.93	1.07	中	中
12	8.64	1.60	0.28	1.05	中	中
13	6.40	1.30	1.24	1.04	中	中
14	7.92	1.20	0.57	1.06	中	中
15	3.46	0.76	0.67	1.00	轻	轻
16	6.19	0.75	1.10	1.09	中	中
17	17.17	2.30	0.79	1.15	重	中
18	11.00	1.50	0.66	1.56	中	中
19	3.71	0.61	0.67	1.01	轻	轻
20	4.86	0.72	0.67	1.02	轻	轻
21	11.40	0.65	1.27	4.31	重	重
22	9.91	2.30	0.77	8.52	重	重
23	9.74	0.87	1.51	1.50	中	中
24	5.10	0.73	0.70	1.07	轻	轻
25	6.51	1.00	0.86	1.09	中	中
26	10.52	3.90	1.53	3.03	重	重，中
27	10.99	0.62	0.96	4.00	重	重
28	7.66	0.71	0.50	1.11	中	中
29	5.45	0.80	1.90	1.34	中	中
30	0.32	3.24	1.27	1.48	中	中
31	7.37	1.50	0.79	1.27	中	中
32*	9.45	1.00	0.32	1.17	中	中
33	5.45	1.41	0.82	1.40	中	中
34	5.41	2.04	0.80	1.42	中	中
35*	8.96	1.71	0.87	1.11	中	中

* 表示待测样本

表示待判样本.

表 2　主成分数据表

1	-8.1886766	-7.9617360	-1.4242010	-0.9498397
2	-8.1924918	-7.9931756	-1.3746620	-0.9174022
3	-8.3321233	-5.1974395	-1.3457107	0.7649198
4	-8.3976862	-6.0824171	-1.4135474	-0.7913133
6	-8.2116856	-5.5346400	0.4263077	0.0620059
8	-7.8441073	-4.3794918	-1.5015336	-0.3457976
9	-6.9622389	-3.9193839	-1.4485080	-2.1049750
10	-4.9903916	-3.5351189	2.2908463	4.2808410
15	-7.2095501	-4.1967331	-0.8070856	-0.4564389
19	-7.0474585	-3.8269905	-1.3739110	-0.3110841
20	-6.5322326	-1.7676564	-1.2285271	-0.3857752
24	-5.8983313	-1.4419652	-1.2303401	-0.2649471
11	-3.6877207	10.1983059	-1.9107563	0.7739576
12	-4.7931360	5.1696025	0.5791901	-2.7614740
13	-5.6362507	1.1593972	1.0929466	1.5187074
14	-4.9830494	3.7445127	-0.3212246	-1.1820655
16	-5.2809079	0.4793380	-0.9295146	1.4319283
18	1.6073284	8.2680379	-0.0285133	-1.0304519
23	0.4638310	5.9807039	-0.9386600	3.1189822
25	-5.1412733	1.1229022	-0.4110395	0.1931164
28	-4.6265414	3.0006208	-2.0488219	-1.0302569
29	-2.7066554	-1.3015374	0.1841883	4.7341812
30	-2.4181813	-9.8761243	8.7561919	-0.3327192
31	-2.7783566	2.4426548	0.9672786	-0.5560875
33	-2.0041574	-1.2704274	1.0115795	-0.3991713
34	-1.6688948	-1.1622069	3.1422155	-1.0724089
17	-0.6722397	20.3763053	1.8307030	-1.0544267
21	31.8444057	2.9072681	-3.5841658	2.2112588
22	77.9348693	-8.0661741	-0.1546025	-1.6834278
27	28.2698754	2.8064236	-3.8169362	0.9349982
5	-8.1741172	-3.7330981	-1.5118728	0.3349505
7	-8.6292003	-3.4437176	0.0368766	-0.6678574
26	18.1715996	5.2079192	8.5901895	0.3245179
32	-3.3253935	6.1445821	-1.6419318	-2.0197263
35	-3.9588588	5.6814596	1.5375527	-0.3667181

样本集的原始数据经过标准化、加权和 Karhunen—Loéve 变换算得的主成分数据如表 2 所示。表中第 1 列是原来的样本编号、按上下顺序看，最后打印的是 5 个待判样本。

根据主成分数据，算得最小生成树数据如表 3。

表 3　最小生成树数据表

1	1（1）……2（1）	18	14（3）……12（3）
2	1（1）……4（2）	19	12（3）……35（0）
3	4（2）……3（2）	20	12（3）……32（0）
4	3（2）……8（2）	21	14（3）……31（3）
5	8（2）……15（2）	22	31（3）……33（3）
6	15（2）……19（2）	23	33（3）……34（3）
7	8（2）……5（0）	24	16（3）……29（3）
8	19（2）……9（2）	25	29（3）……10（2）
9	15（2）……7（0）	26	32（0）……11（3）
10	3（2）……6（2）	27	32（0）……18（3）
11	19（2）……20（2）	28	18（3）……23（3）
12	20（2）……24（2）	29	34（3）……30（3）
13	24（2）……16（3）	30	11（3）……17（4）
14	16（3）……25（3）	31	18（3）……26（0）
15	25（3）……13（3）	32	26（0）……27（4）
16	25（3）……28（3）	33	27（4）……21（4）
17	28（3）……14（3）	34	21（4）……22（4）

表 3 中，第 2 列和第 3 列是节点的样本编号，括号里的数字表示污染等级，中间横线表示在最小生成树中这两个节点是相邻的。根据表 3，画出最小生成树如图 1 所示。

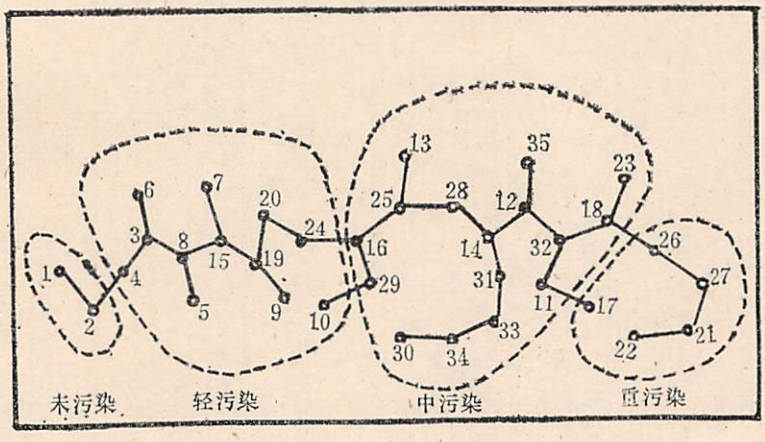


图 1　最小生成树图

从图 1 可以看出，训练样本点的分类是清楚的，仅第 10、17 号样本有误，总的说来，

符合率较高；待判样本仅第26号样本在两奖分界线附近，有误判的可能，其它样本的预报是准确的，其预报准确率较高．最小生成树法分类及预报结果也列入表1．与文献[1]比较，本方法在符合率和准确率方面都有所改善．因此，最小生放树法在这里是一种行之有效的好方法，可与评价环境质量的其它方法相互对照与补充，对调整、改善和保护环境起积极作用．

参 考 文 献

[1] 郑家祥，应龙根，沈畝忱，环境科学学报，4（1984），197—203．

The Application of the Minimal Spanning Tree Method in Environment Quality Valuation

Dai Hongtu　Chen Zuyao　Sun Dunming　Li Ding　Wen Yuankai

(Dept. of Appl. Chem.)

中国科学技术大学学报 JCUST 87012

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

稀土复合氧化物 $Ba_2LnCu_3O_{9-\delta}$ 的合成及其超导电性

陈祖耀 钱逸泰 张 酣 潘国强 孙敦明 刘双怀

（应 用 化 学 系）

周贵恩 张庶元 黄允兰

（结构成分分析中心）

赵 勇 何振辉 喻道奇 张其瑞

（物 理 系）

引言

Ba-Y-Cu-O 体系具有高临界超导转变温度，在大多数情况下，合成的材料属于一种多相体系．对于不同含钡量样品，其物相组成明显不同，其中包括有层状的 K_2NiF_4 型、$Y_2Cu_2O_5$ 型、Y_2BaCuO_5 型和 $Ba_2Y_2O_5$ 型等各种化合物[1]．此外，采用电子显微镜分析，还发现有少量的 $Ba_2YCu_3O_{9-\delta}$．一般说来，K_2NiF_4 型等化合物是属于钙钛矿型结构畸变后的产物，它们还往往是以钙钛矿 ABO_3 型晶胞为结构单元的超点阵存在．铜离子占据 B 位，A 位的 Ba 和 Y 可以改变铜的价态，这就有助于形成 $[CuO_6]$ 八面体的缺陷结构．

1987年 6 月19 日收到．

显然，多相体系有利于探索具有高 Tc 的超导相，但是，它既不利于大幅度提高超导相所占的体积比，也不利于物理性质和超导机制的研究．因此获得单相的超导复合氧化物极其重要．单相 K_2NiF_4 型的 $(LaBa)_2CuO_{4-y}$ 和 $(LaSr)_2CuO_{4-y}$ 已相继合成，其临界超导转变温度（onset）分别为 30K 和 40K[2-4]，，比多相体系略低[5]．美国贝尔实验室合成了几种稀土元素的单相超导复合氧化物，其超导转变温度比较高，$Ba_2YCu_3O_{9-\delta}$ 的 $Tc(\rho=0)$ 达 90K 以上[6-8]，并在电子显微镜下获得了该单相的晶格排列图[9]．

本文报导 9 个 $Ba_2LnCu_3O_{9-\delta}$ 型单相复合氧化物的合成条件、X 射线物相分析结果以及它们的超导电性，并应用热重量分析法测定了这些单相化合物的非化学计量 δ 值．

实验部分

采用传统陶瓷工艺和低温冷冻干燥法，分别制备单相多晶超导稀土复合氧化物 $Ba_2LnCu_3O_{9-\delta}$．前者一般过程为：按克分子比 4：1：6 的比例混合高纯试剂 $BaCO_3$、相应的稀土氧化物 Ln_2O_3 和 CuO，经充分研磨后于氧气氛下920℃预处理数小时，冷却后再次充分研磨、压片成型．并于 900—950℃在氧气氛下加热数十小时，然后再在 700℃—800℃温度范围内退火 20 小时．冷冻干燥法是先使相应的硝酸盐混合溶液经喷雾冷冻，然后真空干燥[10]．采用这种粉料时，成相温度较低，可以很容易合成稀土单相化合物．

物相分析采用日本理学 D/Max—rA 型转靶 X 射线衍射仪、铜靶工作电压 40kV，工作电流 50mA，电镜分析使用 H-800 分析电镜，计算处理是在 Apple Ⅱ plus 微机上进行的．

$Ba_2LnCu_3O_{9-\delta}$ 单相复合氧化物的氧缺陷测定采用 DT—30 热分析装置进行．测定时的气氛为 20%H_2—80%Ar 的混合气氛，样品重量约 50mg，TG 重量范围±5mg，升温速率为 2℃/min．

样品采用测量 R-T 关系和 A.C 磁化率的方法研究其超导电性，并测定样品的超导临界温度．在测量 R-T 关系时，使用标准的四引线法．所用电流密度为 $3mA/cm^2$，测量电压的分辨率为 $1\times10^{-8}V$，采用经标定的 Ge 电阻温度计测量温度．

结果和讨论

实验证明，不论采用传统陶瓷工艺还是低温冷冻干燥法，都能很容易地合成出 $Ba_2LnCu_3O_{9-\delta}$ 型单相多晶超导的稀土复合氧化物，它们都具有较高的超导电性能．以 Dy 为例，其临界超导转变温度为 $Tc(onset)=120K$，$Tc(mid)=91.9K$，$Tc(\rho=0)=91.8K$．表 1 列出了所有这些化合物与相应的多相体系的超导临界温度，由表可知，有的单相化合物与相应的多相体系相差不多，例如 Y、Dy 和 Ho 等情况就是如此．显然，这些单相化合物在多相体系的超导电性中起关键作用．有些单相化合物的超导电性小于相应的多相体系，看来，这些多相体系值得更进一步的研究，以便寻求具有更高超导电性的其它单相化合物．

有意思的是，在上述这些 $Ba_2LnCu_3O_{9-\delta}$ 型单相多晶复合氧化物中，有两类不同的物相结构．图 1 列出了分别以 Y 和 Yb 为代表的两类 X 射线衍射谱图．属于前者有 Y，Nd，Sm，Eu，Gd，Dy，Ho 和 Er；后者目前仅发现有 Yb．不过在许多稀土的多相体系中也发现有类似 $Ba_2YbCu_3O_{9-\delta}$ 的衍射线，有可能合成出相应的单相．表 2 和表 3 列出了 $Ba_2YCu_3O_{9-\delta}$ 和 $Ba_2YbCu_3O_{9-\delta}$ 单相化合物的主要衍射线条和相对强度，由此可以看出两

表 1　Ba-Ln-Cu-O 体系的多相和单相化合物的超导电性

多相体系或单相化合物	临界超导转变温度 K		晶格常数 nm			δ	备注
	$Tc(\rho=0)$	$Tc(\mathrm{mid})$	a	b	c		
Ba-Y-Cu-O	92	93.5					多相
Sr-Y-Cu-O	90.5	93					多相
Ba-Eu-Cu-O	80	84					多相
Ba-Gd-Cu-O	92.5	94.5					多相
Ba-Dy-Cu-O	90	91					多相
Ba-Ho-Cu-O	91.6	91.9					多相
Ba-Er-Cu-O	90	91					多相
Ba-Tm-Cu-O	90	91					多相
Ba-Yb-Cu-O	91	92					多相
Ba-Lu-Cu-O	88	89					多相
$Ba_2NdCu_3O_{9-\delta}$	79.5	88	0.3854	0.3915	1.177		单相,正交
$Ba_2YCu_3O_{9-\delta}$	91.8	91.9	0.3813	0.3811	1.1661	2.1	单相,正交
$Ba_2SmCu_3O_{9-\delta}$	89.0	93.0	0.3845	0.3899	1.1702	2.2	单相,正交
$Ba_2EuCu_3O_{9-\delta}$	77.8	82.0	0.3850	0.3901	1.1733	2.1	单相,正交
$Ba_2DyCu_3O_{9-\delta}$	91.5	92.0	0.3810	0.3873	1.1652		单相,正交
$Ba_2GdCu_3O_{9-\delta}$	83.6	90.0	0.3832	0.3893	1.1696	2.1	单相,正交
$Ba_2HoCu_3O_{9-\delta}$	91.5	92.5	0.3810	0.3924	1.1648	2.9	单相,正交
$Ba_2ErCu_3O_{9-\delta}$	83.5	89.5	0.3827	0.3894	1.1694		单相,正交
$Ba_2YbCu_3O_{9-\delta}$	83.5	90.0	1.0087		0.3395		高纯六方单相的超导电性有待进一步证实

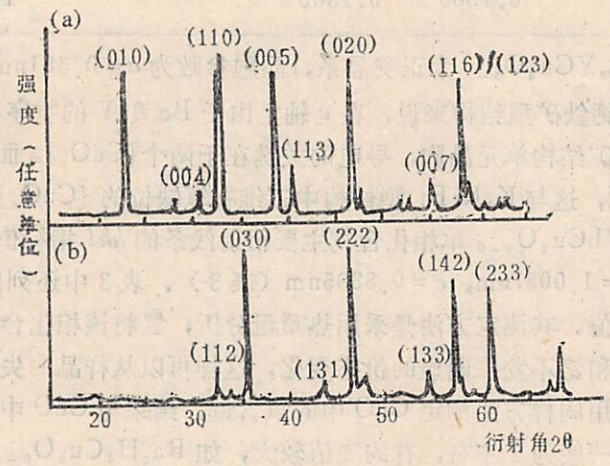


图 1　稀土复合氧化物的两类 X 射线衍射谱图

(a) $Ba_2YCu_3O_{9-\delta}$　(b) $Ba_2YbCu_3O_{9-\delta}$

表 2 $Ba_2YCu_3O_{9-\delta}$ 的主要衍射线条

hkl	d (nm) 计算值	d (nm) 实验值	相对强度%
010	0.3888	0.3883	70
012	0.3232	0.3230	很弱
102	0.3191	0.3190	7
004	0.2915	0.2916	10
110	0.2720	0.2721	100
111	0.2649	0.2646	4
112	0.2465	0.2467	5
005	0.2332	0.2332	70
113	0.2229	0.2228	20
105	0.1989	0.1996	4
020	0.1941	0.1944	80
200	0.1906	0.1906	10
115	0.1771	0.1771	7
016	0.1738	0.1736	7
203	0.1712	0.1711	4
007	0.1666	0.1666	10
212	0.1642	0.1643	弱
116	0.1581	0.1581	35
213	0.1566	0.1566	10

者有很大的区别. $Ba_2YCu_3O_{9-\delta}$ 为正交晶系，晶胞参数为 $a=0.381$nm, $b=0.389$nm, $c=.1166$nm. 它相对于钙钛矿型结构来说，在 c 轴上由于 Ba 和 Y 的有序排列而增加了 2 倍，体积近似为 3 个钙钛矿结构单元晶胞，导电的关键在于两个 $[CuO_2]_\infty$ 面，其中铜处于被畸变的平面正方配位[7]，这与 K_2NiF_4 型结构中二维有氧缺位的 $[CuO_6]_\infty$ 平面层十分相似. 目前，已经求出 $Ba_2YbCu_3O_{9-\delta}$ 单相化合物主要衍射线条的 hkl 指标值，初步确定为六方晶系，晶胞参数为 $a=1.0087$nm, $c=0.8395$nm（表 3）. 表 3 中还列出了有关这些单相多晶化合物氧缺陷的 δ 值. 其测定方法是采用热重量分析，氢将该相化合物中的铜离子还原成金属铜. 如果认为钡和钇不发生明显的价态变化，这样可以从样品的失重量计算出 δ 值来. 为比较校正起见，可用同样方法测定 CuO 中的氧含量，结果与 CuO 中的式量完全相符. 由上述方法测得的 δ 值一般为 2 左右，有的 δ 值较大，如 $Ba_2H_0Cu_3O_{9-\delta}$ 中的 δ 为2.9，实际上接近于 $Ba_2H_0Cu_3O_6$ 型化合物. 但大多数为 $Ba_2LnCu_3O_7$ 型化合物，由此可以认为 δ 值不但与该单相化合物的本性有关，而且还与合成时所用氧分压密切相关.

表 3 $Ba_2YbCu_3O_{9-\delta}$的主要衍射线条

hkl	d (nm) 计算值	实验值	相对强度%
011	0.6053	0.6161	3
110	0.5043	0.5045	2
111	0.4323	0.4265	2
021	0.3873	0.3875	2
112	0.3226	0.3236	8
121	0.3073	0.3081	3
030	0.2912	0.2914	90
131	0.2328	0.2325	4
222	0.2162	0.2165	100
123	0.2135	0.2131	4
132	0.2098	0.2097	6
230	0.2004	0.2000	很弱
114	0.1938	0.1938	2
140	0.1906	0.1907	2
133	0.1832	0.1829	6
142	0.1736	0.1737	20
043	0.1722	0.1725	很弱
330	0.1681	0.1678	3
233	0.1629	0.1629	20
242	0.1536	0.1538	2
053	0.1482	0.1481	4
060	0.1456	0.1457	10

结论

1）不论采用传统陶瓷工艺还是低温冷冻干燥结合固相反应，都能合成单相多晶超导的稀土复合氧化物 $Ba_2LnCu_3O_{9-\delta}$ (Ln = Y, Nd, Sm, Eu, Gd, Dy, Ho, Er, Yb)，而且采用低温冷冻干燥法的固相反应条件比较缓和。

2）初步确定，Yb 的复合氧化物 $Ba_2YbCu_3O_{9-\delta}$ 为六方晶系，晶格常数为 $a = 1.0087$ nm，$c = 0.8395$nm。其它有关的稀土复合氧化物均为正交晶系。

3）可应用热重量分析测定稀土复合氧化物的 δ 值，一般为 2 左右。

对吴自勤教授的热情帮助及他对单相化合物的鉴定意见，作者谨致以衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] Zhao Yuechao, Zhany Shuyuan, Zhou Guien et al., *Solid State Commun.*, 64(4) (1987), 493.

[2] TaKagi, H., Uchida, S., Kitazawa, K. et al., *Jap. J. Appl. Phys. Lett.*, (Submitted).

[3] Cava, R. J., Van Dover, R. B., Batlogg, B. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 58 (1987), 408.

[4] Chu, C. W., Hor, P. H., Meng, R. L. et al., *Phys. Rev. Lett*, 58 (1987), 405.

[5] 陈立泉、崔长庚、黄玉珍等，科学通报，32 (1987)，177.

[6] Cava, R. J., Batlogg, B., Van Dover, R. B. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 58(16) (1987), 1676.

[7] Wu, M. K., Ashburn, J. R., Torng, C. J., et al., *Phys. Rev. Lett*, 58 (1987), 908.

[8] Siegriət, T., Sunshine, S., Murphy, D. W. et al., *Phys. Rev.*, B 35 (1987), 7137.

[9] Gallagher, W. J., Sandstrom, R. L., Dinger, T. R. et al., *Solid State Commun.*, (Submitted).

[10] 陈祖耀、万岩坚、戎晶芳等，低温物理学报，10(1988)，5.

The Preparation of Single Phase Complex Oxide $Ba_2LnCu_3O_{9-\delta}$ and Their Superconductivity

Chen Zuyao Qian Yitai Zhang Han Pan Guoqiang

Sun Dunming Liu Shuanghuai

(Dept. of Appl. Chem.)

Zhou Guien Zhan Shuyuan Huang Yunlan

(The Center of Structure and Component Analysis)

Zhao Yong He Zhenhui Yu Daoqi Zhang Qirui

(Dept. of Phys.)

中国科学技术大学学报 JCUST 87013

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

多晶钠 β''-Al_2O_3 的银离子交换动力学研究

沈国庆 孟广耀 胡克鳌

(中国科学技术大学)

林祖纕

(上海硅酸盐研究所)

1 引言

在实际应用及理论研究中，β 和 β''-Al_2O_3 在快离子导体领域中占有相当重要的地位。一个重要特点就是其可动离子 Na^+ 可被许多一价、二价及至三价离子替代形成一大类新的固体电解质[1~6]。

Ag^+ 与 Na^+ 在 β-Al_2O_3 的中运动活化焓相近[7]，因而 $Na^+ \longleftrightarrow Ag^+$ 交换易于进行，可得到纯的 Agβ-Al_2O_3。这一交换常作为其他离子替代的中间步骤[8,9]。鉴于 β''-Al_2O_3 有更高的电导率，近来有较多的报道涉及到 β''-Al_2O_3 的 Ag 交换，但关于其交换动力学和离子输运机制的研究却很少。本文就交换机制的研究进行了一些工作。

2 实验方法

2.1 样品试片

本工作中所用的钠 β''-Al_2O_3 片由上海硅酸盐所提供，制备方法如文献 [12] 所述，其化学组成：Na_2O 8.8%、Li_2O 0.8%、Al_2O_3 90.4%；密度：3.08g/cm³；尺寸：ϕ10.0 × 0.5～ϕ10.0 × 1.5mm。

2.2 离子交换

1987年元月6日收到。

在若干石英坩埚中各放入1.500g分析纯$AgNO_3$，一起置于坩埚炉中加热至设定温度（230℃～360℃）形成$AgNO_3$熔体。将$Na\beta''$-Al_2O_3试片封接于一刚玉管的端部，先在硝酸盐熔体坩埚附近加热至同样温度，然后将其浸于某一$AgNO_3$熔体中，交换一定时间后将片子提起再浸于另一$AgNO_3$熔体中进行离子交换，并依此进行下去。交换完毕后，将各坩埚中的$AgNO_3$取出10%用水溶解稀解，以原子吸收法分析其中的Na含量，算出相应的Ag^+交换量，与$Na\beta''$-Al_2O_3片中的Na总量之比即为交换百分率（f），在计算中忽略刚玉管外壁和试片上沾附的少量$AgNO_3$熔体携带到下一个$AgNO_3$熔体中的Na^+所带来的误差。

2.3 电导测量

$Na\beta''$-Al_2O_3片浸于270℃的$AgNO_3$熔体中交换24小时后，Ag交换率达98%以上，然后在片子两表面涂以低温银膏，作为电极用Genrad1689型精密RLC电桥测其阻抗谱图，由此算出银β''-Al_2O_3样品的电导率。

3 理论考虑

β''-Al_2O_3中$Ag^+ \longleftrightarrow Na^+$的交换是通过两者相向互扩散进行的。由于$Ag\beta''$-$Al_2O_3$的电导比$Na\beta''$-$Al_2O_3$低近10倍[10]，因而$Ag^+$的扩散系数比$Na^+$小得多，所以扩散基本上由$Ag^+$迁移控制。可以想见，试片一浸入$AgNO_3$熔体，与熔体接触的表面马上发生$Na^+ \longleftrightarrow Ag^+$交换，形成$Ag\beta''$-$Al_2O_3$薄层，此后$Ag^+$不断向内部一维扩散，而相应数量的$Na^+$则被置换并相向扩散进熔体。假定固—液间离子交换足够快，则此片中的交换量由固体中扩散决定，样品中Ag^+的浓度分布$C(x,t)$为如下扩散方程的解：

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\tilde{D}\frac{\partial C}{\partial x^2}.$$

初始条件　$C(x,0)=0$；边界条件　$C(0,t)=C_0$

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=h}=0.$$

其中，h为试片厚度，$\tilde{D}$是Ag的化学扩散系数，C_0为$Ag\beta''$-Al_2O_3中Ag^+摩尔浓度。因为是均匀体系，可设$C(x,t)=X(x)\cdot T(t)$，用分离变量法求解[13]，其通解

$$C(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\lambda_n x+B_n\cos\lambda_n x)\cdot\exp(-\lambda_n^2\tilde{D}t)+C_0.$$

利用上述初始和边界条件，得到

$$C(x,t)=C_0-\frac{2C_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin\left(n++\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}x\cdot\exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{h^2}\tilde{D}t\right]$$

当$t\geqslant\frac{h^2}{16\tilde{D}}$时，仅保留前一项正弦函数所引起的误差处处小于1%，故交换一定时间后，浓度分布为

$$C(x,t)=C_0-\frac{4C_0}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2\tilde{D}}{4h^2}t\right)$$

于是 t 时的交换率

$$f=\frac{\int_0^h C(x,t)dx}{C_0 h}=1-\frac{8}{\pi^2}\exp\left(-\frac{\pi^2}{4h^2}\widetilde{D}t\right) \qquad (1)$$

在交换初期，试样厚度可视为无限大，试样中的 Na^+ 离子分布可用误差函数表示：

$$C_{Na^+}(x,t)=A+B\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\widetilde{D}t}}\right)$$

其中

$$\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\widetilde{D}t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\widetilde{D}t}}\exp(-\eta^2)d\eta$$

利用初始和边界条件，　$C_{Na^+}(x,0)=C_0$，$C_{Na^+}(0,t)=0$，

得

$$C_{Na^+}(x,t)=C_0\cdot\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\widetilde{D}t}}\right)$$

由于　$C_{Na^+}+C_{Ag^+}=C_0$，所以　$C_{Ag^+}(x,t)=C_0\left[1-erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\widetilde{D}t}}\right)\right]$.

由 Fick 第一定律，在固液界面（$x=0$）外进入固相的 Ag^+ 流量为

$$J=-\widetilde{D}\frac{\partial C}{\partial x}=-\widetilde{D}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=0}$$

交换百分率　$f=\frac{\int_0^t Jdt}{C_0 h}=-\int_0^t\frac{\widetilde{D}}{h}\frac{\partial}{\partial t}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\widetilde{D}t}}\right)\right]dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}h}\sqrt{\widetilde{D}}\cdot\sqrt{t}$　　(2)

4　结果与讨论

图 1 是交换百分率随时间变化的实验曲线，呈典型的抛物线型。交换温度愈高，交换速率愈高。360℃时 6 小时以上基本可以达到完全交换（$f\simeq98\%$）。短时间交换率与 $\sqrt{t}$ 的关

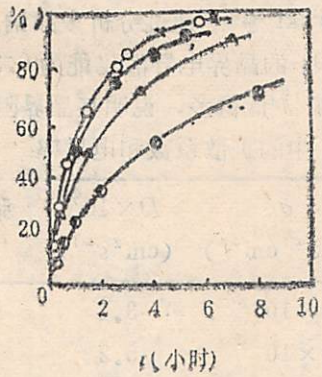


图 1　银交换率与 t 的关系(h 为样品厚度mm)
∘:T=632K　h=1.12　×:T=591K　h=0.913
△:T=551K　h=1.10　•:T=503K　h=1.25

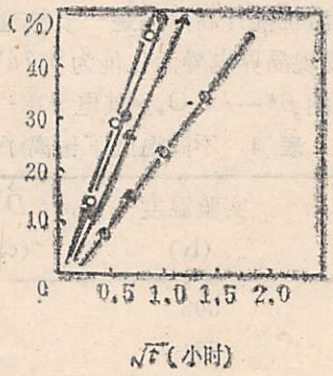


图 2　银交换率与 $\sqrt{t}$ 的关系(h 为样品厚度mm)
∘:T=632K　h=1.12　×:T=591K　h=0.913
△:T=551K　h=1.10　•:T=503K　h=1.25

系示于图 2．可见 $t \leq 2$ 小时的实验点都落在直线上，与式（2）所预示的结果完全一致．对于交换后期，由式（1）计算的数据点亦完全落在实验曲线上（图 1，以“×”表示），这一切表明，正如预期的那样，离子交换的速率控制步骤是两种离子的相向扩散，第三节中的模型和理论推导正确反映了实际过程．

按式（2），曲线 $f \sim \sqrt{t}$ 应通过坐标原点，但图 2 的各条直线均在时间轴上有截距．我们认为是由于从固液之间的浸润到表面层建立交换平衡需要时间，令这一时间为 $\tau_0(T)$，则图 2 中的直线表达为

$$f = k\sqrt{t - \tau_0(T)}$$

其中 $k = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, h}\sqrt{\tilde{D}}$，由此求得 $\tilde{D}$ 的列于表 1 中．可见，在实验温度范围内（230℃～360℃），$\tilde{D}$ 值在 $2.5 \times 10^{-7} \sim 7.6 \times 10^{-7}\,\mathrm{cm^{-2}\,s^{-1}}$ 之间．

$Ag\beta''$-Al_2O_3 的电导率与温度关系示于图 3 中（一直延伸到室温，未绘出），表明在室温到400℃的范围内电导的温度依赖性具有典型的 Arrhenius 关系：$\sigma = \frac{\sigma_0}{T}\exp(-E\sigma/RT)$，这一结果与 Wasiucionek 等人[10]的报道一致．$Na\beta''$-Al_2O_3 的电导率曲线在 200℃～250℃间有一转折，一般归因于 Na 空位亚晶格无序——有序转变．对于 $Ag\beta''$-Al_2O_3，在相当宽的温度范围内无此转变，这对实际应用是很有意义的．由直线斜率求得活化能 $E_\sigma = 0.24\mathrm{eV}$，比文献［10］的报道值高约 0.05eV．这一增高有两个可能的原因：其一是混合碱效应，该效应是首先在玻璃离子电导研究中发现的，即材料中含有两种碱金属离子时，由于不同离子的耦合作用，材料的离子电导率低于单一离子导体，而电导活化能则相应增大．这一效应在 β 和 β''-Al_2O_3 中已被证实存在[14,15]．在 Na^+—Ag^+ β''—Al_2O_3 体系中，由于这一效应的存在，电导活化能最高值为 0.37～0.38eV（见文献［1］，图 4a），大大高于纯 $Ag\beta''$—Al_2O_3（0.19eV）和纯 $Na\beta''$—Al_2O_3（0.27eV）的电导活化能．文献［10］的结果提出，Ag 含量为 90% 时活化能约为 0.24eV，我们的试样据分析交换率肯定超过 98%，混合碱效应引起的的活化能升高不足以使活化能达到 0.24eV．我们认为是由于晶界电阻的贡献较大，固体电解质烧结体内，由于高阻抗晶界的存在，使得其电导率显著低于单晶的电导率，且电导活化能升高，这是一个普遍现象。Jakubowski 等[16]通过分析多晶钠 β''—Al_2O_3 的阻抗谱，发现晶界电导活化能为 0.7eV，银 β''—Al_2O_3 的晶界电导活化能为 0.3～0.4eV，我们采用的钠 β''—Al_2O_3，其电导率[12]较上文报道值[10]低得多，说明其晶界阻抗比率较

表 1 不同温度下银离子在 β''—Al_2O_3 中的扩散系数和电导率

样品号	实验温度 (K)	$\tilde{D} \times 10^7$ ($\mathrm{cm^2 s^{-1}}$)	σ ($\Omega^{-1}\mathrm{cm^{-1}}$)	$D \times 10^7$ ($\mathrm{cm^2 s^{-1}}$)	强化因子 W
1	503	2.5	6.14×10^{-3}	3.1	0.80
2	551	4.2	9.30×10^{-3}	5.2	0.81
3	591	5.6	1.19×10^{-2}	7.2	0.78
4	632	7.6	1.51×10^{-2}	9.7	0.78

Wasiucionek 所用的样品大，Ag^+ 的离子交换并不能改变这种状况，因而是造成电导率低，活化能高的主要原因。

图 3 中另一直线，是实验扩散系数随温度的变化关系，同样遵循 Arrhenius 规律，$\widetilde{D}=D_0\exp(E_a/RT)$，其中 D_0 可由直线在纵坐标上的截距求得，为 $5.25\times10^{-5}cm^2s^{-1}$，由直线斜率求得其扩散活化能 $E_a=0.23eV$，这意味着扩散和电导之间具有 Nernst-Einstein 方程所予示的关系：

$$\widetilde{D}_{Ag}=w\sigma_{Ag}k_T/[c(zq)^2]=wD_{Ag} \qquad (3)$$

式中 w 称为热力学强化因子，

$$w=\frac{\partial\ln a_{Ag}}{\partial\ln c_{Ag}}=1+\frac{\partial\ln\gamma_{Ag}}{\partial\ln C_{Ag}}$$

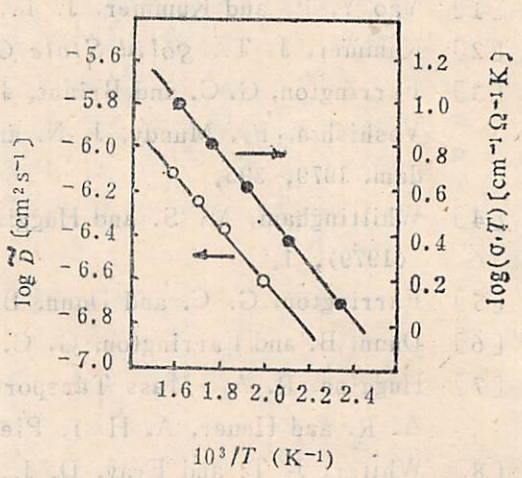


图 3 β''—Al_2O_3 中 Ag^+ 的扩散系数和电导率随温度的关系

应该指出的是，该情况下 σ_{Ag} 是纯 Agβ''—Al_2O_3 的电导，$\widetilde{D}_{Ag}$ 则是由扩散实验得到的 Ag—Naβ''—Al_2O_3 体系中 Ag^+ 的扩散系数，是总的表观值。$Ag^+\beta''$—Al_2O_3 中和 Na—Agβ''—Al_2O_3 中的 Ag^+ 扩散系数有相同活化能这一事实表明，正如所假设的 Ag^+ 扩散决定整个交换过程。

式（3）中 D_{Ag} 为自扩散系数，与体系的非理想性无关。本例中 $Z=1$，$q=1.6\times10^{-19}$ 库仑，浓度 C 按 β''—Al_2O_3 中正离子单位含量计算，取 $5.3\times10^{21}cm^{-3}$。根据式（3）算出各温度下自扩散系数列于表 1 中。从 $\widetilde{D}_{Ag}$ 与 D_{Ag} 的差异可得式（3）中的强化因子 W。由于整个交换过程中 C_{Ag} 不断变化，W 为一平均值，但仍反映了体系的热力学不理想性。算出在 230℃～360℃ 间热力学强化因子平均为 0.79，小于 1，可见是对理想体系的负偏差，显然应归因于可动离子间的离子耦合作用。在相向扩散中，Ag^+、Na^+ 之间的耦合减小了扩散流量，使强化因子小于 1。由于混合碱效应的实质是不同离子间的耦合，故强化因子对 1 的负偏离可作为混合碱效应的定量量度。

5 结论

1）Naβ''—Al_2O_3 在 $AgNO_3$ 熔体中的 $Na^+\rightarrow Ag^+$ 交换行为可用一维扩散模型处理。求得 200℃～400℃ 间扩散系数 $\widetilde{D}=5.3\times10^5\exp(-22000/RT)cm^2\cdot s^{-1}$，扩散活化能 0.23eV。

2）Agβ''—Al_2O_3 电导率在室温至 400℃ 间遵循 Arrhenius 定律，电导活化能 0.24eV，与扩散活化能相符，表明交换速率取决于 Ag^+ 扩散。

3）Na—Ag β''—Al_2O_3 体系的热力学强化因子平均值为 0.79，这种负偏离可以作为混合碱效应大小的量度。

中国科技大学结构成分分析中心的陈树榆老师，做了全部的原子吸收钠含量分析工作，对于她的大力协助，谨表谢意。

参 考 文 献

[1] Yao Y. F. and Kummer, J. T., *J. Inorg. Nucl. Chem.*, 29 (1967), 2453.

[2] Kummer, J. T., *Solid State Chem.* 7 (1972), 147.

[3] Farrington, G. C. and Briant, J. L., Fast Ion Transport in Solids (ed. by Vashishta, P., Mundy, J. N. and Shenoy, G. K.), North-Holland Amsterdam, 1979, 395.

[4] Whittingham, M. S. and Huggins, R. A., *J. Electrochem. Soc.*, 118 (1979), 1.

[5] Farrington, G. C. and Dunn, B., *Solid State Ionics*, 7 (1982), 267.

[6] Dunn, B. and Farrington, G. C., *Solid State Ionics*, 9/10 (1983), 223.

[7] Huggins, R. A., Mass Tansport Phenomena in Ceramics (ed. by Cooper, A. R. and Heuer, A. H.), Plenum, New York, (1975), 155.

[8] Whiter, J. T. and Fray, D. J., *Solid State Ionics*, 17 (1985), 1-6.

[9] Carrillo-Cabrera, W., Thomas, J. O. and Farrington, G. C., ibid., 17 (1985), 223.

[10] Wasiucionek, M., Grabarczyk, J., Akubowski, W., ibid., 14 (1984), 113.

[11] Breiter, M., Maly-Schreiber, M. and Bruce Dunn, ibid, 18/19 (1986), 658.

[12] 陈昆刚、林祖缜、杨淑平、徐孝和，硅酸盐学报，12 (1984)，445.

[13] Crank, J., The Mathematics of Diffusion, Clarendon Press, Oxford, 1975, 17.

[14] Ni, J., Tsai, Y. T. and Whitmone, D. H., *Solid State Ionics*, 5 (1982), 199.

[15] Chandrashekhar, G. H. and Forter, L. M., *Solid State Commun.*, 27 (1978), 269.

[16] Jakubowski and Whitmone, D. H., *J. Am. Ceram. Soc.*, 62 (1979), 381.

Study on Ag Ion Exchange Kinetics of Polycrystalline $Na\beta''-Al_2O_3$

Shen Guoqing Meng Guangyao Hu Keao

(University of Science and Technologyo of China)

Lin Zuxiang

(Shanghai Institute of Ceramics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87014

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

平方型含时外源谐振子转换函数和量子 Scaling 演化

毕勇毅 范洪义

(近代物理系)

1 引 言

Feynman 转换函数在量子理论中起着基本的作用，它表示了不同时刻状态之间的转换关系，由此所建立的基于路经积分的量子化程序，已经成为现代场论的基础[1]。但是，如何计算含平方型含时外源的谐振子 Feynman 转换函数 $\langle qt|q_0t_0\rangle=\langle q|u_s(tt_0)|q_0\rangle$，还未见有简捷的和一般的讨论。这里 $|q\rangle$ 为坐标本征矢，$u_s(t,t_0)$ 为薛定格表象中的演化算符。分别表示为（取 $\hbar=1$，$m=1$）

$$|q\rangle=\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{\omega}{2}q^2+\sqrt{2\omega}\,qa^+-\frac{a^{+2}}{2}\right]|0\rangle \tag{1}$$

$$Q=\frac{a^++a}{\sqrt{2\omega}}\qquad Q|q\rangle=q|q\rangle$$

$$U_s(t,t_0)=T\exp\left[-i\int_{t_0}^{t}dt'H_s(t')\right]$$

$$H_s=\omega a^+a+f(t)a^{+2}+f^*(t)a^2 \tag{2}$$

a，a^+ 分别为谐振子消灭和产生算子。此外，t_0 时刻的坐标本征态 $|q\rangle$，如何在 t 时演化为标度发生变化的坐标本征态 $|\mu q\rangle$，也未见有过讨论。本文中我们利用文献［2］介绍的技

1984年11月19日收到。

巧，在相互作用表象中，把演化算符所满足的方程化成相应的相干态 c 数方程，通过解微分方程组定出演化算符的相干态平均值，然后利用相干态的性质和相干态与坐标本征态的转换关系[3]，分别求出 $u_s(t,t_0)$ 和 $\langle qt|q_0t_0\rangle$，在此基础上找到了标度变换的演化算符，证明它与把相干态演化为双光子相干态的演化算符是一致的。

2 含平方型外源的谐振子转换函数

在薛定格表象中，波动方程为 $|t\rangle=U_s(t,t_0)|t_0\rangle$，$U_s(t,t_0)$ 由方程（1）和（2）给出。令 $H_0=\omega a^+a$ 过渡到相互作用表象中的演化算符

$$U_I(t,t_0)=e^{iH_0t}U_s(t,t_0)e^{-iH_0t} \tag{3}$$

则有

$$U_I(t,t_0)=T\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t}ds\left[f(t')a^+(t')^2+f^*(t')a^2(t')\right]\right\}$$

它满足的演化方程为

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_I(t,t_0)=H_I(t)U_I(t_1t_0) \tag{4}$$

以及初始条件

$$U_I(t_0,t_0)=1 \tag{5}$$

其中，

$$H_I(t)=e^{iH_0t}[f(t)a^{+2}+f^*(t)a^2]e^{-iH_0t}=e^{2i\omega t}f(t)a^{+2}+e^{-2i\omega t}f^*(t)a^2 \tag{6}$$

为了求解方程（4）、（5），取它的相干态平均，由相干态理论可知，这等价于作变换 $a^+\to Z^*$，$a\to Z+\frac{\partial}{\partial Z^*}$，即

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_I(Z,Z^*)=\left[F(t)Z^{*2}+F(t)^*\left(Z+\frac{\partial}{\partial Z^*}\right)^2\right]U_I(Z,Z^*) \tag{7}$$

其中，

$$U_I(Z,Z^*)|_{t=t_0}=1,\ F(t)\equiv f(t)e^{2i\omega t},\ U_I(Z,Z^*)\equiv\langle Z|U_I(t,t_0)|Z\rangle \tag{8}$$

这里 $|Z\rangle$ 是谐振子相干态，满足

$$|Z\rangle=e^{-\frac{|Z|^2}{2}+a^+Z}|0\rangle,\ a|Z\rangle=Z|Z\rangle,\ a|0\rangle=0$$

于是解算符方程（4），（5）变成了解它的相干态对应的 c 数方程（7）、（8）。设方程（7）式的解有如下的形式

$$\begin{aligned}U_I(Z,Z^*)=\exp\{&-i[Z^{*2}(E(t)+X(t))\\&+Z^2(E^*(t)+Y(t))+|Z|^2J(t)+R(t)]\}\end{aligned} \tag{9}$$

这里函数

$$E(t)\equiv\int_{t_0}^{t}F(\lambda)d\lambda,\ E(t)|_{t=t_0}=0 \tag{10}$$

$X(t)$，$Y(t)$，$J(t)$，$R(t)$ 为待定函数，且满足

$$X(t)|_{t=t_0}=0,\ J(t)|_{t=t_0}=0,\ Y(t)|_{t=t_0}=0,\ R(t)|_{t=t_0}=0 \tag{11}$$

将（9）式代入方程（7）式的两边，通过比较 Z^2，$Z^{*2}|Z|^2$ 及不含 Z,Z^* 项的系数，得以下微分方程组：

$$\dot{X} = -4F^*(E+X)^2 \tag{12}$$

$$\dot{Y} = -2iF^*J - F^*J^2 \tag{13}$$

$$\dot{J} = -4F^*(E+X)(J+i) \tag{14}$$

$$\dot{R} = -2iF^*(E+X) \tag{15}$$

方程（12）式为黎卡提方程．根据微分方程理论，当$F(t)$为实函数、纯虚函数以及$\alpha e^{i\beta t}$型的函数（这里α，β为常数）时，方程（12）有解．为了与量子 Scaling 演化相联系，我们取$F(t)=f(t)e^{2i\omega t}$为纯虚函数（可以证明当$F(t)$为实函数时与 Scaling 演化无联系）即

$$f(t)e^{2i\omega t} = iv(t)，或 f(t) = ie^{-2i\omega t}v(t)，\quad [v(t)为实函数] \tag{16}$$

则（12）式的解为

$$X = \frac{i}{2}\mathrm{th}2V(t) - iV(t) \tag{17}$$

其中，

$$V(t) \equiv \int_{t_0}^{t} d\lambda v(\lambda)，\quad V(t)|_{t=t_0} = 0 \tag{18}$$

根据方程（13）、（14）、（15）相应的Y，J，R的解为

$$Y = -\frac{i}{2}\mathrm{th}2V(t) + iV(t) = X^* \tag{19}$$

$$J = i[\mathrm{sech}2V(t) - 1] \tag{20}$$

$$R = -\frac{i}{2}\ln\mathrm{ch}2V(t) \tag{21}$$

其中，用了初始条件（11）式．把（17）、（19）、（20）、（21）诸式代回到（9）式得

$$U_I(Z,Z^*) = \exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{th}2V(Z^{*2}-Z^2) + |Z|^2(\mathrm{sech}2V-1) - \frac{1}{2}\ln 2V\right\} \tag{22}$$

根据算符的相干态平均值决定算符本身这一性质，可以得到$U_I(t,t_0)$的正规乘积形式（正规乘积：：表示）

$$U_I(t_1t_0) = e^{\frac{1}{2}a^{+2}\mathrm{th}2V} :e^{a^+a(\mathrm{sech}2V-1)}: e^{-\frac{1}{2}a^2\mathrm{th}2V} e^{-\frac{1}{2}\ln\mathrm{ch}2V}$$

$$= e^{\frac{1}{2}a^{+2}\mathrm{th}2V} e^{(a^+a+\frac{1}{2})\ln\mathrm{sech}2V} e^{-\frac{1}{2}a^2\mathrm{th}2V} \tag{23}$$

这里用了公式

$$e^{-\lambda a^+a} = :\exp\left[\left(e^{-\lambda}-1\right)a^+a\right]:$$

由（3）可得演化算符$U_I(t_1t_0)$的明显算符形式

$$U_I(t_1t_0) = e^{\frac{1}{2}a^{+2}e^{-2i\omega t}\mathrm{th}2V} \cdot e^{a^+a\{-i\omega(t-t_0+\ln\mathrm{sech}2V\}}$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2}a^2e^{2i\omega t_0}\mathrm{th}2V} e^{-\frac{1}{2}\ln\mathrm{sech}2V} \tag{24}$$

利用它很容易求出相干态的转换函数

$$\langle Zt|Z_0t_0\rangle = \langle Z|U_I(t_1,t_0)|Z_0\rangle$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{th}2V\left[Z^{*2}e^{-2i\omega t} - Z_0^2e^{2i\omega t_0}\right]\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left[|Z|^2+|Z_0|^2\right]+Z^*Z_0e^{-iw(t-t_0)}\operatorname{sech}2V\Big\} \tag{25}$$

根据相干态与坐标本征态的转换关系[3]

$$|q\rangle=\left(\frac{w}{\pi}\right)^{1/4}e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}|Z\rangle,\qquad x=\sqrt{2w}\,q,\ Z=x+iy, \tag{26}$$

得到 Feynman 转换函数与相干态转换函数的关系为

$$\langle qt|q_0t_0\rangle=\left(\frac{w}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{\frac{x^2+x'^2}{4}}}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}dydy'\langle Zt|Z_0t_0\rangle. \tag{27}$$

其中，

$$x=\sqrt{2w}\,q,\ x'=\sqrt{2w}\,q_0,\ Z=x+iy'\qquad Z_0=x'+iy'$$

把（25）式代入（27）式，做高斯积分得

$$\begin{aligned}\langle qt|q_0t_0\rangle=&\sqrt{\frac{w/2\pi i}{\sin w(t-t_0)-\mathrm{th}2V\sin w(t+t_0)}}\,e^{\frac{i}{2}w(t-t_0)-\frac{1}{2}\ln\operatorname{sech}2V}\\&\cdot\exp\Big\{i\Big[\sin w(t-t_0)-\mathrm{th}2V\sin w(t+t_0)\Big]^{-1}\\&\Big[\frac{wq^2}{2}\Big(\cos w(t+t_0)-\mathrm{th}2V\cos w(t-t_0)\Big)+\\&+\frac{wq_0}{2}\Big(\cos w(t+t_0)+\mathrm{th}2V\cos w(t-t_0)\Big)-wqq_0\operatorname{sech}2V\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{28}$$

所积分的条件为

$$[\sin w(t-t_0]-\mathrm{th}2V\sin w(t+t_0)]^2>0 \tag{29}$$

从（27）式我们可以看出，本文所采用的方法在讨论计算转函数时具有很大的优越性.

3 量子 Scaling 变换

下面我们将证明式（23）正是量子 Scaling 变换的演化算符. 即把坐标本征态 $|q\rangle$ 演化为坐标本征态 $|\mu q\rangle$，或把动量本征态 $|p\rangle$ 演化为动量本征态 $\left|\frac{p}{\mu}\right\rangle$.

让薛定格表象与相互作用表象用上标 ip 标记在 $t=0$ 时重合，即 $|q\rangle=|q,0\rangle^{ip}$. 则它在算符（23）式的作用下为

$$\begin{aligned}|q,t\rangle^{ip}&=U_I(t,0)|q,0\rangle^{ip}=U_I(t,0)|q\rangle\\&=e^{\frac{1}{2}a^{+2}\mathrm{th}2V}e^{(a^+a+\frac{1}{2})\ln\operatorname{sech}2V}e^{-\frac{1}{2}a^2\mathrm{th}2V}\cdot\\&\cdot\left(\frac{w}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\frac{w}{2}q^2+\sqrt{2m}qa^+-\frac{1}{2}a^{+2}}|0\rangle\end{aligned} \tag{30}$$

利用文献［2］中给出的公式

$$e^{fa^2}e^{ga^{+2}}=\frac{1}{\sqrt{1-4fg}}e^{\frac{ga^{+2}}{1-4fg}}e^{-a^+a\ln(1-4fg)}e^{\frac{fa^{+2}}{1-4fg}} \tag{31}$$

其中，

$$\mathrm{Re}[-1+f+g]<0, \qquad \mathrm{Re}\left[\frac{1-4fg}{-1+f+g}\right]<0 \tag{32}$$

或

$$\mathrm{Re}[-1-f-g]<0, \qquad \mathrm{Re}\left[\frac{1-4fg}{-1-f-g}\right]<0 \tag{32'}$$

以及公式

$$f(a)e^{-\lambda a^+}=e^{-\lambda a^+}f(a-\lambda) \tag{33}$$

$$e^{-\lambda a^+ a}f(a^+)=f(a^+e^{-\lambda})e^{-\lambda a^+ a} \tag{34}$$

可把（30）式化为

$$|qt\rangle^{ip}=\sqrt{\mu}\left(\frac{w}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\frac{w}{2}q^2\mu^2+\sqrt{2w}\,q\mu a^+-\frac{1}{2}a^{+2}}\Big|\,0\Big\rangle$$

$$=\sqrt{\mu}\,|\mu q,0\rangle^{ip}=\sqrt{\mu}\,|\mu q\rangle \tag{35}$$

其中

$$\mu=e^{2V}, \quad \mathrm{th}2V=\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}, \quad \mathrm{sech}2V=\frac{2\mu}{\mu^2+1}$$

$$V=\int_0^t v(t')dt'=-i\int_0^t f(t')e^{2i\omega t'}dt' \tag{36}$$

另外对动量本征态

$$|p,0\rangle^{ip}=|p\rangle=\left(\frac{w}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{w}{2}p^2+i\sqrt{2w}\,pa^++\frac{a^{+2}}{2}\right]|0\rangle \tag{37}$$

在（23）式的作用下为

$$|p,t\rangle^{ip}=U_I(t,0)\,|p,0\rangle^{ip}=U_I(t,0)\,|p\rangle \tag{38}$$

利用公式（31），（33），（34）又可成为

$$|p,t\rangle^{ip}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{p}{\mu},\ 0\right\rangle^{ip}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left|p/\mu\right\rangle \tag{39}$$

从（35）式及（39）式可以看出：演化算符（23）式把本征值为 q 的坐标本征态演化为本征值为 μq 的坐标本征态 $|\mu q\rangle$，把本征态为 p 的动量本征态 $|p\rangle$ 演化为本征值为 p/μ 的动量本征态 $|p/\mu\rangle$. 这正是 Scaling 变换的定义，它对坐标算子 $Q^{ip}(0)=Q$ 和动量算子 $P^{ip}(0)=P$ 的作用也证明了这一点，即

$$U_I(t,0)Q^{ip}(0)U_I^{-1}(t,0)=U_I(t,0)QU_I^{-1}(t,0)=\frac{1}{\mu}Q^{ip}(0)=\frac{1}{\mu}Q \tag{40}$$

$$U_I(t,0)P^{ip}_{(0)}U^{-1}_{I(t,0)}=U_I(t,0)PU^{-1}_{I(t,0)}=\mu P \tag{41}$$

其中 $P=\dfrac{a-a^+}{\sqrt{2wi}}$，利用坐标本征态的的完备性和动量本征态的完备性，我们可将演化算符（23）式表示为

$$U_I(t,0)=\int_{-\infty}^{\infty}dq\,|qt\rangle^{ip\,ip}\langle q,0|=\int_{-\infty}^{\infty}dq\sqrt{\mu}\,|\mu q\rangle\langle q|,\ \mu=e^{2V} \tag{42}$$

或

$$U_I(t,0)=\int_{-\infty}^{\infty}dp|p,t\rangle^{ip}{}^{ip}\langle p,0|=\int_{-\infty}^{\infty}dp\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{p}{\mu}\right\rangle\langle p|\,\mu=e^{2V}. \tag{43}$$

（因为 $[H_s(t),H_s(t)]\neq 0$，所以 $U_I(t,0)\neq e^{iH_0t}e^{-iH_st}$）即

$$T\exp\left\{\int_0^t[v(\lambda)a^{+2}-v(\lambda)a^2]\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}dq\sqrt{\mu}\,|\mu q\rangle\langle q|=\int_{-\infty}^{\infty}dp\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{p}{\mu}\right\rangle\langle p|\,\mu=e^{2V}$$

另一方面，如果系统在 $t=0$ 时刻处于相干态 $|Z,0\rangle^{ip}=|Z\rangle$，在演化算符（23）式的作用下演化为

$$|Z,t\rangle^{ip}=U_I(t,0)\,|Z,0\rangle^{ip}=U_I(t,0)\,|Z\rangle$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}a^{+2}\mathrm{th}2V\right\}\exp\left\{\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)\ln\mathrm{sech}2V\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}a^2\mathrm{th}2V\right\}\exp\left\{-\frac{|Z|^2}{2}+Za^+|0\rangle\right.$$

利用（33）式 $|Z,t\rangle^{ip}$ 可写成

$$|Z,t\rangle^{ip}=\lambda(t)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{|Z|^2}{2}+\frac{v^*(t)}{2\lambda(t)}Z^2-\frac{v(t)}{2\lambda(t)}a^{+2}+\frac{1}{\lambda(t)}Za^+|0\rangle\right. \tag{44}$$

其中，

$$\lambda(t)=\mathrm{ch}2V,\qquad v(t)=-\mathrm{sh}2V,\qquad |\lambda(t)|^2-|v(t)|^2=1 \tag{45}$$

式（44）是算子

$$b(t)=U_I(t,0)aU_I^{-1}(t,0)=U_I(t,0)a^{ip}(0)U_I^{-1}(t,0)$$
$$=\lambda(t)a+v(t)a^+ \tag{46}$$

的本征态，即 $b(t)|Z,t\rangle^{ip}=Z|Z,t\rangle^{ip}$。

由式（45）和（46）我们可知，或（44）是双光子相干态[4]，双光子相干态理论是量子通讯理论克服量子涨落的的一个基础．从以上的讨论可知 Scaling 变换的演化算符也是相干态演化为双光子相干态的演化算符．

类似于以上的方法，我们也可以对平方型外源和线性外源共存时的谐振子系统

$$H_s=wa^+a+f(t)a^{+2}+f(t)^*a^2+\Upsilon(t)a^++\Upsilon^*(t)a \tag{47}$$

进行讨论．例如对 $F(t)=f(t)e^{2iwt}$ 为实函数时我们得到演化算符为

$$U_s(t,t_0)=\exp\left\{-\frac{i}{2}a^{+2}e^{-2iwt}\mathrm{th}2E-ia^+e^{iwt}C\right\}\exp\left\{a^+a[\ln\mathrm{sech}2E-iw(t-t_0)]\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{i}{2}a^2e^{2iwt_0}\mathrm{th}2E-iae^{iwt_0}D\right\}\exp\left\{-iP\right\} \tag{48}$$

转换函数 $\langle qt|q_0t_0\rangle$ 为

$$\langle qt|q_0t_0\rangle=\sqrt{\frac{w/2\pi i}{\sin w(t-t^0)-\mathrm{th}2E\cos w(t+t_0)}}\exp\left\{\frac{i}{2}w(t-t_0)-iP\right.$$

$$\exp\left\{\left[2i\sin w(t-t_0)-2i\mathrm{th}2E\cos w(t+t_0)\right\}^{-1}\left[2qq_0w\mathrm{sech}2E\right.\right.$$

$$-(q^2-q_0^2)w\mathrm{th}2E\cdot\sin w(t+t_0)-(q^2+q_0^2)w\cos w(t-t_0)+\frac{C^2}{2}\left(\exp\left\{-iw(t+t_0)\right\}\right.$$

$$\left.-i\mathrm{th}2E\exp\left\{-iw(t-t_0)\right\}\right)+\frac{D^2}{2}(e^{iw(t+t_0)}-i\mathrm{th}2Ee^{-iw(t-t_0)})-C\cdot D\mathrm{sech}2E$$

$$\cdot e^{-iw(t-t_0)} + \sqrt{2w}C(iq_0\,\mathrm{sech}2E e^{-iwt} - iqe^{-iwt_0} - q\,\mathrm{th}2E e^{iwt_0})$$

$$+\sqrt{2w}\cdot D(iq\,\mathrm{sech}2E\cdot e^{iwt_0} - iq_0 e^{iwt} - q_0\,\mathrm{th}2E e^{-iwt})]\} \tag{49}$$

其中E由式（10）给出，

$$\xi(t) = \int_{t_0}^{t} Y(\lambda) e^{iw\lambda} d\lambda \tag{50}$$

$$C(t) = \mathrm{sech}2E\int_{t_0}^{t} ds[Y(s)e^{iws}\mathrm{ch}2E - iY^*(s)e^{-iws}\mathrm{sh}2E] \tag{51}$$

$$D(t) = -i\,\mathrm{th}2E\int_{t_0}^{t} ds[Y(s)e^{iws}\mathrm{ch}2E - iY^*(s)e^{-iws}\mathrm{sh}2E]$$

$$+\int_{t_0}^{t} ds[Y^*(s)e^{-iwr}\mathrm{ch}2E + iY(s)e^{iws}\mathrm{sh}2E] \tag{52}$$

$$P(t) = -\frac{i}{2}\ln\mathrm{ch}2E - \frac{1}{2}\mathrm{th}2E\left\{\int_{t_0}^{t} ds[\mathrm{ch}2E\cdot Y(s)e^{iws} - \mathrm{sh}2E\cdot Y(s)^*e^{-iws}]\right\}^2$$

$$+\int_{t_0}^{t} ds[Y(s)e^{iws}\mathrm{sh}2E(s) - iY^*(s)e^{-iws}\mathrm{ch}2E(s)]\int_{t_0}^{t} du[Y(u)e^{iwu}\mathrm{ch}2E(u)$$

$$-iY^*(u)e^{-iwu}\mathrm{sh}2E(u)] \tag{53}$$

当所有外源为零时，上式变为谐振子的转换函数，当平方型外源为零时式（53）回到文献［2］的结果.

作者感谢阮图南教授的指导.

参 考 文 献

［1］ Abers, E. S. & Lee B. W., *Phys. Rep.*, 9C (1973), № 1.

［2］ Fan Hongyi & Ruan Tunan, *Scientia Sinica*, A1 (1984), 61.

［3］ Fan Hongyi & Ruan Tunan, *Commun. in Theor. Phys.*, 3 (1984), 443.

［4］ Yuen, H. P., *Phys. Lett.*, 51A (1975), 1.

Transition Function of the Harmonic Oscillator in Time-Dependent Quadratic External Source and Quantum Scaling Evolution

Bi Yungyi　　Fan Hongyi

(Department of Modern Physics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87015

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

几何激波动力学方程组的通解

程盘庆

(近代力学系)

1 引言

二维几何激波动力学的控制方程组是关于 θ 和 M 的拟线性方程，它可约化为关于 α 和 β 的线性方程组．并可给出一般情况下关于 $\alpha(\theta,M)$ 的二阶偏微分方程，以及关于 $\beta(\theta,M)$ 的二阶偏微分方程．在强激波条件下，该方程变成欧拉方程，求出了一般解．

2 二维几何激波动力学的控制方程组及定解条件

Chester (1954)，Chisnell (1957) 和Whitham (1957) 发展了二维和三维激波传播的近似的几何理论，本文采用 Whitham 规则，控制方程[1]为

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+\frac{1}{A(M)}\frac{\partial M}{\partial\beta}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-\frac{A'(M)}{M}\frac{\partial M}{\partial\alpha}=0 \tag{2}$$

边界条件：

$$M(\alpha,\beta)\,|_{\alpha=0}=M(\beta) \tag{3}$$

$$\theta(\alpha,\beta)\,|_{\beta=0}=\theta(\alpha) \tag{4}$$

式中 α,β 是正交曲线坐标．$\alpha=$ 常数表示激波波阵面，$\beta=$ 常数表示射线；$\theta(\alpha,\beta)$ 是射线与

1986年9月6日收到．

某固定方向的夹角，例如可取射线方向与 x 轴之间的夹角为 θ，θ 可称为射线转角，可取逆时针为正；$M(\alpha,\beta)=\dfrac{D}{a_0}$ 是激波马赫的，其中，D 为激波波速，a_0 为未扰动区的声速；$A(M)$ 类似于流管截面积；$A'\equiv\dfrac{dA}{dM}$ （1）和（2）式的特征形式为 $\left(\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\pm c\dfrac{\partial}{\partial\beta}\right)\left(\theta\pm\int\dfrac{dM}{AC}\right)=0$，或者 $\dfrac{dM}{d\theta}=AC\left(沿\dfrac{d\beta}{d\alpha}=-C\right)$ 和 $\dfrac{dM}{d\theta}=-AC\left(沿\dfrac{d\beta}{d\alpha}=C\right)$.

此处 C 是 M 的函数，$C(M)=\sqrt{\dfrac{-M}{AA'}}$

令 $\mu^2=\dfrac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2-(\gamma-1)}$，则有 $\lambda(M)=\left(1+\dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{1-\mu^2}{\mu}\right)\left(1+2\mu+\dfrac{1}{M^2}\right)$

令 $f(M)=\exp\left\{-\int\dfrac{M\lambda(M)}{M^2-1}dM\right\}$，则有 $\dfrac{A}{A_0}=\dfrac{f(M)}{f(M_0)}$

令 $\omega=\int_1^M\dfrac{dM}{AC}=\int_1^M\left[\dfrac{\lambda(M)}{M^2-1}\right]^{\frac{1}{2}}dM$，则有 $\dfrac{d\omega}{dM}=\dfrac{1}{AC}$

γ 是气体的绝热指数，空气 $\gamma=1.4$，下标 0 表示初值．利用以上特征形式的各个式子求解简单波区的解是常用的方法，而我们要求的是波的相互作用区（非简单波区）的通解．为此，将（1）式和（2）式进行坐标变换使其线性化．

3 线性化

观察方程（1）和（2）可知它们是拟线性的，我们设法使其变成线性的[2]，即要求其系数只是自变量的函数．为此，进行坐标变换．在特征线上 $\dfrac{d\beta}{d\alpha}=C=\pm\sqrt{\dfrac{-M}{AA'}}$，$\dfrac{\partial}{\partial\beta}=\dfrac{d\alpha}{d\beta}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\alpha}=\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}$，代入（2）式得 $\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}=\dfrac{-1}{AC}\dfrac{\partial M}{\partial\beta}=\dfrac{-1}{AC}\dfrac{\partial M}{\partial\alpha}$，又 $C^2A'A=-M$，

于是
$$\frac{1}{AC}=\frac{-CA'}{M}\tag{5}$$

故
$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=\frac{A'}{M}\frac{\partial M}{\partial\alpha}=\frac{1}{C}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=\frac{A'C}{M}\frac{\partial M}{\partial\beta}=\frac{-1}{AC}\frac{\partial M}{\partial\beta}\tag{6}$$

代入函数行列式 Jacobian，

$$J=\frac{\partial(\theta,M)}{\partial(\alpha,\beta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}, & \dfrac{\partial\theta}{\partial\beta}\\[2ex] \dfrac{\partial M}{\partial\alpha}, & \dfrac{\partial M}{\alpha\beta}\end{vmatrix}=\frac{\partial\theta\partial M}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{\partial\theta\partial M}{\partial\beta\partial\alpha}$$

$$=\left(\frac{-1}{AC}\frac{\partial M}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial M}{\partial\beta}+\left(\frac{1}{AC}\frac{\partial M}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial M}{\partial\alpha}\equiv0$$

所以简单波是奇解、特解 $J=0$ 或 ∞.

在波的相互作用区（非简单波区），$J\neq 0\neq\infty$.

我们用 $J_1=\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\theta,M)}=\frac{1}{J}$，乘方程（6），得$\frac{\partial(\alpha,\theta)}{\partial(\theta,M)}=\frac{A'}{M}\frac{\partial(M,\beta)}{\partial(\theta,M)}$，即

$$\frac{\partial\alpha}{\partial M}-\frac{A'}{M}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}=0 \tag{7}$$

用J_1乘（1）式后，得

$$\frac{\partial\beta}{\partial M}+\frac{1}{A}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}=0 \tag{8}$$

（7）和（8）式是线性方程组（系数只是自变量M的函数）．（7）式对M求偏导，得

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial M^2}-\frac{A'}{M}\frac{\partial^2\beta}{\partial M\partial\theta}-\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\left(\frac{A''}{M}-\frac{A'}{M^2}\right)=0 \tag{9}$$

（8）式对θ求偏导，得

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial M\partial\theta}+\frac{1}{A}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\theta^2}=0 \tag{10}$$

(10) 式代入（9）式，得$\frac{\partial^2\alpha}{\partial M^2}+\frac{A'}{MA}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\theta^2}-\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\left(\frac{A''}{M}-\frac{A'}{M^2}\right)=0$，再用（7）式代入，得

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial M^2}+\frac{A'}{MA}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\theta^2}-\left(\frac{A''}{A'}-\frac{1}{M}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial M}=0 \tag{11}$$

(11) 式是关于α的二阶偏微分方程，式中A只是M的函数．

因$\frac{1}{A}\frac{dA}{dM}+g(M)=0$，即$A'+A\cdot g(M)=0$，或

$$\frac{A'}{A}=-g(M) \tag{12}$$

$$\frac{A''}{A'}=\frac{-A'g(M)-Ag'(M)}{-Ag(M)}=\frac{A'}{A}+\frac{g'(M)}{g(M)}=-g(M)+\frac{g'(M)}{g(M)} \tag{13}$$

式中，$g(M)=\frac{M}{M^2-1}\lambda(M)=\frac{M}{M^2-1}\left(1+\frac{2}{\gamma+1}\frac{1-\mu^2}{\mu}\right)\left(1+2\mu+\frac{1}{M^2}\right)$把（13）式、(12) 式代入（11）式，得

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial M^2}-\frac{g(M)}{M}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\theta^2}-\left(-g(M)+\frac{g'(M)}{g(M)}-\frac{1}{M}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial M}=0 \tag{14}$$

因$g(M)$是M的已知函数，原则上可解（14）式．

若由（7）和（8）式消去α，可得

$$A'\frac{\partial\beta}{\partial M}+A\frac{\partial^2\beta}{\partial M^2}+\frac{A'}{M}\frac{\partial^2\beta}{\partial\theta^2}=0 \tag{15}$$

这是关于β的二阶偏微分方程．

4 强激波时的通解

观察$g(M)$及μ的表达式，可知它们是M的复杂的函数，因此二阶偏微分方程的各个系

数是M的复杂的函数．但是，当激波很强时，即$M\gg1$时，这些系数变得简单，在此情况下容易求出此二阶偏微分方程的通解。

当$M\gg1$时，$\mu^2\to\frac{\gamma-1}{2\gamma}$，$\lambda(M)\to\left(1+\frac{2}{\gamma}+\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right)$；当$\gamma=1.4$时，$\lambda=5.0743=h$，

$g(M)\to\frac{h}{M}$，（11）式简化为

$$M^2\frac{\partial^2\alpha}{\partial M^2}+(2+h)M\frac{\partial\alpha}{\partial M}-h\frac{\partial^2\alpha}{\partial\theta^2}=0 \tag{16}$$

可分离变量求解．令$\alpha=P(M)\varphi(\theta)$，代入（16）式，得

$M^2\frac{P''\varphi}{P\varphi}+(2+h)M\frac{P'\varphi}{P\varphi}=h\frac{P\varphi''}{P\varphi}=-m^2$，$m$为常数．

此式可分为二个常微分方程：

$$\varphi''+\frac{m^2}{h}\varphi=0 \tag{17}$$

$$M^2P''+(2+h)MP'+m^2P=0 \tag{18}$$

由方程（17）得

$$\varphi(\theta)=e^{i\frac{m}{\sqrt{h}}\theta}=e^{iK\theta} \tag{19}$$

式中$K=\frac{m}{\sqrt{h}}$，$K=0,1,2,3,\cdots\cdots$因为θ有2π周期$e^{iK(\theta+2\pi)}=e^{iK\theta}$，以$P(M)=M^u$代入（18）式欧拉方程[2]，得$u^2+(h+1)u+hK^2=0$，$u=\frac{h+1}{-2}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{4hK^2}{(h+1)^2}}\right]$，所以强激波时的通解为

$$\alpha(\theta,M)=\sum_{k=0}^{\infty}F_kM^ue^{iK\theta} \tag{20}$$

式中F_k为待定系数．当K增大时$\sqrt{1-\frac{4hK^2}{(h+1)^2}}$出现虚数，它表示沿着激波存在着扰动．当此扰动增大时，可以使$J=0$，这表示在(θ,M)与(α,β)转换时不再是单值，它相应于出现“激波——激波”．

强激波时，方程（15）变成

$$h\frac{\partial^2\beta}{\partial\theta^2}+hM\frac{\partial\beta}{\partial M}-M^2\frac{\partial^2\beta}{\partial M^2}=0 \tag{21}$$

它有通解

$$\beta(M,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}G_kM^{-u}e^{iK\theta} \tag{22}$$

式中G_k为待定系数．亦可由已求出的$\alpha(\theta,M)$，由（8）式求得

$$\beta=\int_{M_0}^{M}\frac{-1}{A}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}dM \tag{23}$$

强激波时，

$$\frac{A}{A_0}=\left(\frac{M_0}{M}\right)^h \tag{24}$$

5 求射线的方程和激波波阵面的方程

在实际问题中，经常需探求柱面强激波在流场中传播时激波波阵面形状的变化。我们可以用以上求出的通解来求激波波阵面 $\alpha(x,y)=$ 常数的方程和射线 $\beta(x,y)=$ 常数的方程。

因 $x(\theta,M)$，$y(\theta,M)$ 是直角坐标，$dx=\frac{\partial x}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial x}{\partial M}dM$，$dy=\frac{\partial y}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial y}{\partial M}dM$，其系数行列式为 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,M)}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta}, & \frac{\partial x}{\partial M}\\ \frac{\partial y}{\partial\theta}, & \frac{\partial y}{\partial M}\end{vmatrix}=\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\theta,M)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}$ 由 (20) 式和 (22) 式可求出 $\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\theta,M)}$。至于 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}$，因为沿射线有 $\left.\frac{\partial x(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right|_\beta=\frac{\partial x}{\partial\alpha}=M\cos\theta$，以及 $\left.\frac{\partial y(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right|_\beta=\frac{\partial y}{\partial\alpha}=M\sin\theta$。沿射线 $\beta=$ 常数，$d\beta=0$，$dx=\frac{\partial x}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial x}{\partial\beta}d\beta$ 变成 $dx=\frac{\partial x}{\partial\alpha}d\alpha$。同样 $dy=\frac{\partial y}{\partial\alpha}d\alpha$，射线在 (x,y) 平面上的斜率 $\frac{dy}{dx}=\frac{\partial y}{\partial\alpha}\Big/\frac{\partial x}{\partial\alpha}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$，对于射线，有 $x=\int M\cos\theta d\alpha+C_1$，以及 $y=\int M\sin\theta d\alpha+C_2$，由此求出 $x(\theta,M)$，$y(\theta,M)$ 可描述射线。

沿激波波阵面 $\alpha=$ 常数，$d\alpha=0$，有 $\left.\frac{\partial x(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_\alpha=-A\sin\theta=\frac{\partial x}{\partial\beta}$，$\left.\frac{\partial y(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_\alpha=A\cos\theta=\frac{\partial y}{\partial\beta}$，对于激波波阵面，有 $x=-\int A\sin\theta d\beta+C_3$，$y=\int A\cos\theta d\beta+C_4$。$d\beta$ 由 (22) 式的 $\beta(M,\theta)$，提供，A 由 (24) 式提供。

所得到的通解适用于还未形成“激波——激波”的激波相互作用的复杂波区。用与之相邻的简单波区已知解作为边界条件，就可以决定(20)式和 (22) 式中的待定常数 F_k 和 G_k。

参 考 文 献

[1] Whitham, G. B., Linear and Nonlinear Waves, John Wlley & Sows, New. York, 1974, 283～287.

[2] Miller, K. S., Partial Differential Equations In Engineering Problems, Prentice-Hall, Book Co. INC., 1953, 103～108.

[3] Баум, Ф. А., Станюкович, К. П, Щехтер, Е И., Физика Взрыва, Физиматгиз,Москва, 1959, 154～161.

General Solution of Equations of Geometrical Shock Dynamics

Cheng Panqing

(Department of Modern Mechanics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87016

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

用双谱进行时延估计

钱玉美

(无线电电子学系)

1 引言

两个相间一定距离的接收机，接收来自同一信源的信号间的时延估计，可用于目标的定位，在雷达、声纳、地震信号处理、生物医学工程等许多领域有广泛的应用[1]. 传统的时延估计方法是互相关法. 本文研究的是用双谱进行时延估计的方法. 下面讨论用双谱进行时延估计的原理，计算机模拟方法以及计算结果.

2 原理

2.1 三阶矩及其双谱

对于一个实的随机序列 $\{x(k), k=1,2,\cdots, N\}$，它的三阶矩定义为

$$R(m,n)=E\{x(k)x(k+m)x(k+n)\} \tag{1}$$

三阶矩反映了一个随机序列在 k, $k+m$, $k+n$ 这三个时刻的相关特性，它具有以下的对称性[2]，

$$\begin{aligned}R(m,n)&=R(n,m)=R(-n,m-n)\\&=R(n-m,-m)=R(m-n,-n)=R(-n,m-n)\end{aligned} \tag{2}$$

随机序列 $\{x(k), k=1,2,\cdots,N\}$ 的三阶矩 $R(m,n)$ 的二维付里叶变换称为随机序列 $\{x(k), k=1,2,\cdots,N\}$ 的双谱 (bispectrum)，即

1986年6月18日收到.

$$B(\omega_1,\omega_2)=\sum_m\sum_n R(m,n)\exp[-j(\omega_1 m+\omega_2 n)] \tag{3}$$

其中 $|\omega_1|\leqslant\pi,|\omega_2|\leqslant\pi$.

双谱反映了随机序列在频域上的统计特性，可以证明，它具有以下的对称性[3]，

$$\begin{aligned}B(\omega_1\omega_2)&=B(\omega_1+2\pi,\omega_2+2\pi)=B(\omega_2,\omega_1)=B^*(-\omega_2,-\omega_1)=B^*(-\omega_1,-\omega_2)\\&=B(-\omega_1-\omega_2,\omega_2)=B(\omega_1,-\omega_1-\omega_2)=B(\omega_2,-\omega_1-\omega_2)\\&=B(-\omega_1-\omega_2,\omega_1)\end{aligned}$$

2.2 用双谱进行时延估计的原理

现在，我们把上面引入的随机序列的三阶矩及其双谱用于被动系统的时延估计.

图1是我们所要研究的被动系统的最基本的模型. 它由两个接收传感器1和2，以及一个信源目标组成. 其中传感器1和传感器2被安置在相间距离为 L 的两个地方，它们各自接收来自同一信源的信号. 由于传播距离不同，因此在传感器1和2处所接收到的信号间存在一定的时延 d. 其数学模型可以表示为

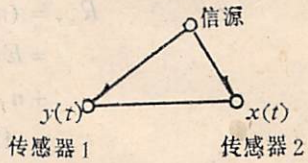


图 1 模型

$$x(t)=s(t)+n_2(t) \tag{5}$$

$$y(t)=As(t-d)+n_1(t) \tag{6}$$

其中 $y(t)$、$x(t)$ 是传感器1和2所接收到的混合信号，$s(t)$，$s(t-d)$ 是非高斯信源信号，$n_1(t)$、$n_2(t)$ 是两个接收机处的噪声，它们是零均值，彼此统计独立的平稳高斯白噪声，且与 $s(t)$，$s(t-d)$ 统计独立. A是由于传输引起的幅度衰减因子.

对于离散信号序列，上述问题的数学模型可以表示为

$$x(k)=s(k)+n_2(k) \tag{7}$$

$$y(k)=As(k-D)+n_1(k) \tag{8}$$

其中 $k=1,2,\cdots,N$，N 是信号序列的总长度，即总样本数，D是时延的离散值.

传感器2所接收到的混合信号序列为 $\{x(k),k=1,2,\cdots,N\}$，它的自三阶矩为

$$\begin{aligned}R_x(m,n)&=E\{x(k)x(k+m)x(k+n)\}\\&=E\{[s(k)+n_2(k)][s(k+m)+n_2(k+m)][s(k+n)+n_2(k+n)]\}\\&=E\{s(k)s(k+m)s(k+n)\}+E\{s(k)n_2(k+m)s(k+n)\}\\&+E\{n_2(k)s(k+m)s(k+n)\}+E\{n_2(k)n_2(k+m)s(k+n)\}\\&+E\{s(k)s(k+m)n_2(k+n)+E\{s(k)n_2(k+m)n_2(k+n)\}\\&+E\{n_2(k)s(k+m)n_2(k+n)\}+E\{n_2(k)n_2(k+m)n_2(k+n)\}\end{aligned} \tag{9}$$

由于 $\{n_2(k),k=1,2,\cdots,N\}$ 是零均值高斯白噪声，它具有奇次矩等于零的特性，因此，它的三阶矩

$$R_{n_2}(m,n)=E\{n_2(k)n_2(k+m)n_2(k+n)=0 \tag{10}$$

利用 $\{s(k),k=1,2,\cdots,N\}$ 和 $\{n_2(k),k=1,2,\cdots,N\}$ 有关的统计特性，（9）式可简化为

$$R_x(m,n)=R_s(m,n) \tag{11}$$

其中

$$R_s(m,n)=E\{s(k)s(k+m)s(k+n)\} \tag{12}$$

它是信源信号序列 $\{s(k), k=1,2,\cdots,N\}$ 的三阶矩。

随机序列 $\{x(k), k=1,2,\cdots,N\}$ 的自双谱为

$$B_x(\omega_1,\omega_2)=\sum_m\sum_n R_x(m,n)\exp[-j(\omega_1 m+\omega_2 n)] \tag{13}$$

代入 (11) 式，则

$$\begin{aligned}B_x(\omega_1,\omega_2)&=\sum_m\sum_n R_s(m,n)\exp[-j(\omega_1 m+\omega_2 n)]\\&=B_s(\omega_1,\omega_2)\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $B_s(\omega_1,\omega_2)$ 是信源信号序列 $\{s(k), k=1,2,\cdots,N\}$ 的双谱。

传感器 1 处所接收到的混合信号序列为 $\{y(k), k=1,2,\cdots,N\}$，它与 $\{x(k), k=1,2,\cdots,N\}$ 之间的互三阶矩为

$$\begin{aligned}R_{xy}=(m,n)&=E\{x(k)y(k+m)x(k+n)\}\\&=E\{[s(k)+n_2(k)][As(k+m-D)\\&+n_1(k+m)][s(k+n)+n_2(k+n)]\}\\&=AR_s(m-D,n)\end{aligned} \tag{15}$$

$\{x(k), k=1,2,\cdots,N\}$ 和 $\{y(k), k=1,2,\cdots,N\}$ 的互双谱为

$$B_{xy}(\omega_1,\omega_2)\sum_m\sum_n R_{xy}(m,n)\exp[-j(\omega_1 m+\omega_2 n)] \tag{16}$$

利用 (15) 式，于是

$$\begin{aligned}B_{xy}(\omega_1,\omega_2)&=\sum_m\sum_n AR_s(m-D,n)\exp[-j(\omega_1 m+\omega_2 n)]\\&=AB_s(\omega_1,\omega_2)\exp[-j\omega_1 D]\end{aligned} \tag{17}$$

将 (17) 式除以 (14) 式

$$\frac{B_{xy}(\omega_1,\omega_2)}{B_x(\omega_1,\omega_2)}=Ae^{-j\omega_1 D} \tag{18}$$

(18) 式表明，$B_{xy}(\omega_1,\omega_2)/B_x(\omega_1,\omega_2)$ 只与变量 ω_1 和时延参数 D 有关，而与变量 ω_2 无关。令

$$U(\omega_1)=B_{xy}(\omega_1,\omega_2)/B_x(\omega_1,\omega_2) \tag{19}$$

则

$$U(\omega_1)=Ae^{-j\omega_1 D} \tag{20}$$

将 (20) 式作付里叶反变换，得

$$\begin{aligned}u(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(\omega_1)e^{j\omega_1 n}d\omega_1\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Ae^{j\omega_1(n-D)}d\omega_1\\&=A\frac{\sin\pi(n-D)}{\pi(n-D)}=ASa[\pi(n-D)]\end{aligned} \tag{21}$$

由 (21) 式可见，当 $n=D$ 时，$u(n)$ 达极大值。因此，只要求出 $u(n)$ 极大值出现的时刻，

就得到了所要估计的时延参数D值。

3 模拟

为了探讨将双谱法用于时延估计的可行性，在 IBM-370 机上进行了计算机模拟。

3.1 信号的产生

调用 IMSL 中 GGEXN 子程序，产生指数分布的随机数序列，然后将它们通过 FIR 带通数字滤波器，将所得到的带通指数信号作为传感器 2 所接收到的信源信号$\{s(k), k=1,2,\cdots,N\}$。$\{s(k-D), k=1,2,\cdots,N\}$是由$\{s(k)\}$序列延迟$D$个样本得到。FIR 数字滤波器采用 Blackman window 方法设计，带通滤波器的传输函数为

$$H(\omega)=\begin{cases}1, & 0.1\pi\leqslant\omega\leqslant0.2\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{22}$$

调用 IMSL 中 GGNML 子程序，产生两个互相统计独立的零均值高斯分布随机数序列，作为传感器 1 和 2 处的噪声序列$\{n_1(k)\}$，$\{n_2(k)\}$，传感器 2 接收的混合信号序列为$\{x(k)=s(k)+n_2(k)\}$，传感器 1 接收的混合信号序列为$\{y(k)=s(k-D)+n_1(k)\}$，取各随机序列长为$N=M\times K$，其中$K=128$，它表示序列的分段数目，$M=256$，它表示每段序列所包含的样本数。时延参数D取 16 个样本。取$A=1$，它不影响$u(n)$的特性。

3.2 双谱的估计

序列$\{x(k), k=1,2,\cdots,N\}$和$\{y(k), k=1,2,\cdots,N\}$的自双谱$B_x(k,l)$和互双谱$B_{xy}(k,l)$估计方法是：

（1）把$\{x(k)\}$，$\{y(k)\}$序列分成K段记录，每段记录包含M个样本，即$N=KM$；

（2）对每段数据加窗；

（3）用 FFT 对$\{x(k)\}$，$\{y(k)\}$的每段数据计算频谱$X^{(i)}(k)$，$Y^{(i)}(k)$ $(i=1,2,\cdots,K;\ k=1,2,\cdots,M/2)$；

（4）估计各段数据的自双谱、互双谱[3]

$$\hat{b}_x^{(i)}(k,l)=\frac{1}{M}X^{(i)}(k)X^{(i)}(l)X^{(i)*}(k+l) \tag{23}$$

$$\hat{b}_{xy}^{(i)}(k,l)=\frac{1}{M}X^{(i)}(k)Y^{(i)}(l)X^{(i)*}(k+l) \tag{24}$$

（5）将K段记录的自双谱、互双谱求平均，得自双谱、互双谱的估计值

$$\hat{B}_x(k,l)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\hat{b}_x^{(i)}(k,l) \tag{25}$$

$$\hat{B}_{xy}(k,l)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\hat{b}_{xy}^{(i)}(k,l) \tag{26}$$

其中$k,l=1,2,\cdots,M/2$，

由于双谱具有（4）式表示的对称特性，因此，只要计算图 2 所示的第一象限中三角形AOB区中的$\hat{B}(k,l)$和$\hat{B}_{xy}(k,l)$即可，这样可以大大节省计算量。

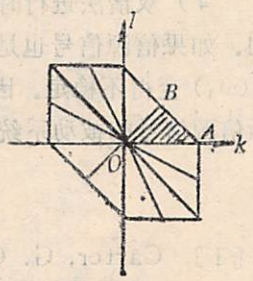


图 2 双谱的对称性

图 3(a)-3(c)是在无噪声及信噪比（SNR）为 0dB，-5dB 情况下，双谱时延估计的结果。

图 4(a)—4(c) 是用互相关法进行时延估计的模拟结果。

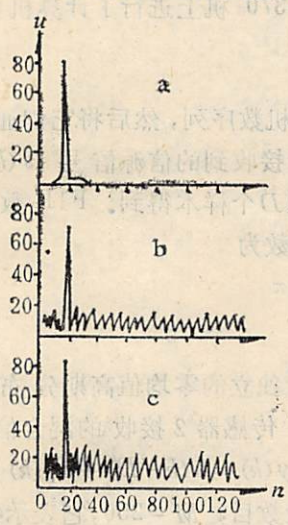


图 3 双谱法时延估计

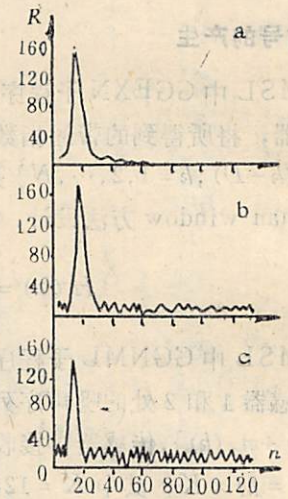


图 4 互相关法时延估计

4 讨论

1）由图 3(a)-3(c) 可见，当 $n=17$ 时，$u(n)$ 出现峰值，这说明用双谱法进行时延估计是可行的。

2）将图 3(a)-3(c) 与图 4(a)-4(c) 作比较。双谱法是由 $u(n)$ 峰值出现时刻决定时延 D，$u(n)$ 是 $\mathrm{Sa}(n-D)$ 函数；互相关法是由互相关函数 $R(n)$ 峰值出现时刻决定时延 D，它与信源信号特性有关。若定义 $u(n)$ 和 $R(n)$ 在 0.707 峰值处的宽度为主峰宽度，由图可见，双谱法中 $u(n)$ 主峰宽度为 1 个样本，而互相关法中 $R(n)$ 的主峰宽度为 3.6 个样本。因此，就分辨率而言，双谱法明显优于互相关法。

3）由两种方法的模拟结果可以看到，噪声对双谱时延估计的影响大于互相关法，这是由于在双谱法的理论推导中，我们假定噪声是高斯随机序列，并利用了高斯随机序列的自双谱等于零的特性得到的结论。实际上，由计算机模拟产生的随机数只是近似为高斯型的，因而噪声的自双谱并不为零，这就产生了附加的噪声。

4）双谱法进行时延估计是在假定信源信号是非高斯型，噪声是高斯型的前提下进行的。如果信源信号也是高斯型随机信号时，则（19）式中的分母 $B_x(\omega_1,\omega)$ 将等于零，$U(\omega_1)$ 变得不稳定。因此，必须指出，双谱法时延估计适用于接收高斯白噪声背景下非高斯信源信号的被动系统的时延估计情况。

参 考 文 献

[1] Carter, G. C., *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Processing*, 29 (1981), 463-470.

[2] Matsuoka, T. and Ulrych, T. J., *Proc. IEEE*, 72 (1984), 1403-1411.

[3] Kimio Sasaki, Takuso Sato and Yoichi Nakamura, *J. Sound Vibration*, 40 (1975), 139-148.
[4] Steven, M. K. et. al., *Proc. IEEE*, 69 (1981), 1380-1419.

Time Delay Estimation Using the Bispectrum

Qian Yumei

(Department of Radio and Electronics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87017

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》編辑部 1987年12月

三维动态显示

陈学佺

(无线电电子学系)

1 引言

计算机图形方法的一个重要部分是三维物体模型化及其显示．在人与计算机交互式地处理三维信息时，图形显示则是交换信息的有效方式．

三维图形显示的应用十分广泛．如在飞机、汽车、房屋等设计中，三维显示有助于改进方案优化设计；在飞行仿真中，要求显示逼真的活动图象，产生飞机运动的感觉；为了解分子结构，需要建立分子的三维模型；在石油勘探、地震研究中，人们希望把接收到的三维信息直观地显示出来等等。

在二维屏幕上产生三维图象往往会减少物体的深度信息，或是只能看到三维物体的某个侧面．如何较好地反映三维物体，是三维显示的关键．

Newman 等提出了若干种三维显示技术[1]：

平行投影 这种方法用物体的正视图、顶视图及侧视图来显示物体．由于它要求观察者从多个投影面重新构成景物，因此不够直观．

透视投影 用投影图上远处的物体较近处小来表达物体深度变化．由于人眼成象是透视成象，所以透视投影比较直观．但当被观察的目标不能提供足够的深度标志时，这种方法不能清楚地表现出确定的目标．

动态深度效应 由于运动视差能够提供深度信息，故通过观察运动物体的透视图，了解物体的各个侧面，可以较好地察觉三维物体．然而这种方法要求相当快地显示一系列运动图

1986年7月2日收到，

象，对计算机的软件、硬件要求都比较高。

为此，本文利用动态深度效应进行三维显示，为了减少计算量，提高速度，采用抽取主要轮廓，合理处理隐线，附加彩色等方法，在屏上显示运动物体的主要结构线。从而突出了物体内部结构的相互关系及整体图形。

2 处理方法

2.1 坐标及模型的选取

文中采用的坐标系如下所述：

三维空间坐标系　基矢量为 X_W，Y_W，Z_W，原点设为 W。这是主参考坐标系，也称为世界坐标系。

物坐标系　X_0，Y_0，Z_0，原点为 O。它固定在被观察的物体上，与物体一起相对于 X_W，Y_W，Z_W 运动。为了讨论的方便，本文物坐标的原点取在物体的形心，并令 W 与 O 重合，如图 1 所示。

屏坐标系　X_S，Y_S，Z_S。原点为 S。它是显示器的坐标系。这里采用左旋笛卡尔坐标，是为了使 X_S，Y_S 与屏的轴一致，且 Z_S 表示了深度。

目坐标系　X_V，Y_V，Z_V，原点为 V。也采用左旋笛卡尔坐标。观察方向定为 Z_V，它与 X_W 方向相反，且经过 O 点。并假定观察点 V 离物体的距离远大于物体本身的尺寸。

当物体在三维空间 X_W，Y_W，Z_W 中旋转时，令 Z_W 与 Z_0 之间的夹角为 φ，即物体绕水平轴 Y_W 的旋转角为 φ；Y_W 与 Y_0 之间的夹角为 θ，即物体绕垂直轴 Z_W 的旋转角为 θ。

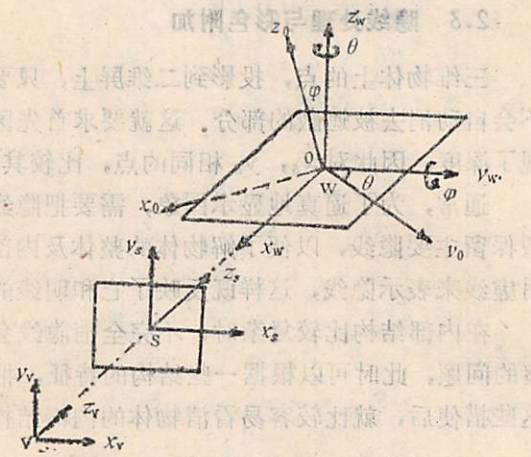


图 1　四种坐标系及相互关系

对复杂的三维对象，首先用图象处理和分析的方法，抽取主要轮廓，根据灰度值、连通性及其他特征、区分出各个部分。获得表面及内部的结构框架，得出整体模型。而详细的信息可留待进一步显示、分析时使用。然后根据具体对象的特点采用不同的运动方式进行动态显示。

2.2 三维变换与透视

当被观察的物体在三维空间运动时，物体上各点的空间坐标将随之变化。为了把物体投影到二维屏幕上显示出来，需要确定变化后的屏坐标。

矩阵变换是三维变换的一种有效方法，各种变换都可以用 4×4 的矩阵来表示，三维矢量附加第四个坐标 w 后，就可以进行齐次矢量的矩阵变换[2]。基本变换有平移、定比例、旋转等，矩阵变换的一般形式如下：

$$[x',y',z'w'] = [x,y,z,w]\begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

复杂的变换可以用一系列基本变换组合而成，通过“级联”组合成变换序列，最后经运算用一个 4×4 的变换矩阵来表示.

当物体绕 Z_W 轴转 θ 角，绕 Y_W 轴转 φ 角时，物体的世界坐标 x_W，y_W，z_W 变为

$$[x_W, y_W, z_W, 1] = [x_0, y_0, z_0, 1]\,[T]$$

式中 $[T]$ 为

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于其他运动方式，则可以用别种相应的级联矩阵运算，来获得运动物体的世界坐标.

接着，利用取景变换，把 $[x_W, y_W, z_W]$ 转换到目坐标 $[x_V, y_V, z_V]$. 然后通过剪取、透视、视区变换的组合变换矩阵，由目坐标求得物体透视图的屏坐标 $[x_S, y_S, z_S]$. 根据 x_S，y_S 的值就可以确定各点在屏上的位置. z_S 的值留作隐线处理时用.

2.3 隐线处理与彩色附加

三维物体上的点，投影到二维屏上，只要对应的 x_S，y_S 值相同,则屏上的位置就重合，不会自动消去被遮蔽的部分. 这就要求首先区分哪些是隐蔽部分，然后加以处理. 因为 z_S 体现了深度，因此对 x_S，y_S 相同的点，比较其 z_S 的值，以确定是否隐藏点[3].

通常，为了逼真地显示图象，需要把隐线、隐面消去，然而在一些线框架图形中有时希望保留主要隐线，以便了解物体的整体及内部结构. 为此本文不采用完全消隐的办法，而是用虚线来表示隐线，这样既反映了它和明线的区别，又可表示它在物体中的位置.

在内部结构比较复杂时，不完全消隐线会带来线条众多、繁复，图形不够清晰，不易观察的问题，此时可以根据一些结构的特征，把它们区分开来，用不同的颜色来表示. 采取了这些措使后，就比较容易看清物体的内部结构.

3 实验结果

根据上述原理和方法，本文编制了一个三维图象动态显示的计算机程序. 对模拟石油探井三维体扫描所获得的一段井孔的立体模型进行旋转动态显示.

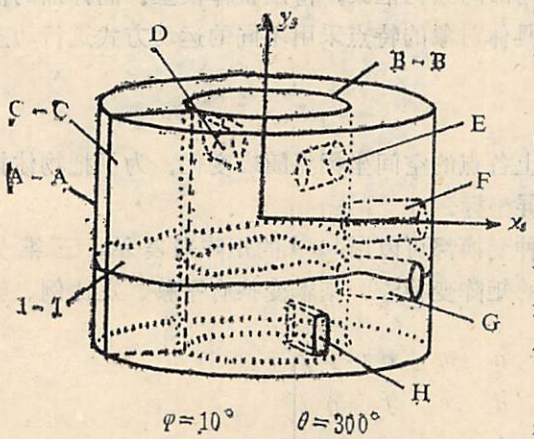


图 2 立体模型

在三维体扫描中，超声探头在井孔内提升的同时不停地旋转，探头发射的波束沿螺旋形曲线扫描，接收器不断地接收反射波，它不仅能记录下井壁处的反射波，而且可以记下穿透井壁深入到岩层的一段厚度内许多点的回波. 这样就探测到一个截面为圆环的柱体内的三维信息.

抽取主要轮廓后的模型如图 2 所示. 圆柱形 B-B 面代表井壁；外面的大圆柱面 A-A 表明最大可测范围；五个不同形状的 D、E、F

G、H 表示井壁上的孔；离底三分之一附近不规则的面 I-I 是裂面；规则的矩形 C-C 是定标用的，规定在 $\theta=0°$ 时，它位于图形右侧。

执行该程序，在计算机的显示屏上，可以看到活动的线框架图形，随着 θ 和 φ 角的变化，图形绕着垂直和水平轴自动地旋转。θ 和 φ 的增量是连续可调的，这通过计算机键盘上的 KNOB 钮来实现。屏上同时显示出当前的 φ 和 θ 值，用以说明该图是何种角度下物体的透视投影图。对感兴趣的角度，可暂停循环，令图形停止转动，以便仔细观察。图 3 给出了 φ 为 10°，θ 变化到 20° 时的图形。图 4 则是 θ 为 0°，φ 变为 300° 时的图形。

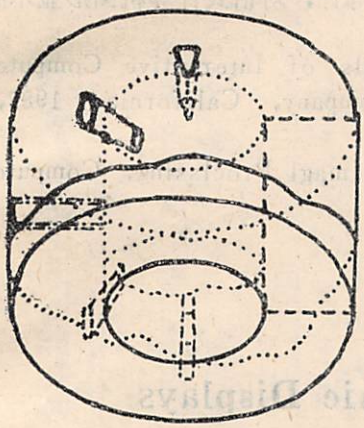


图 3　$\varphi=10°$，$\theta=20°$ 时的图例

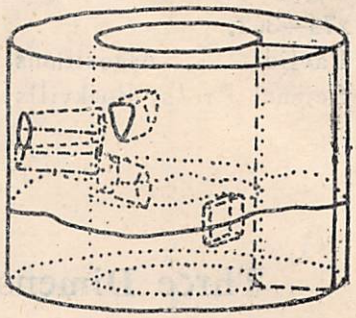
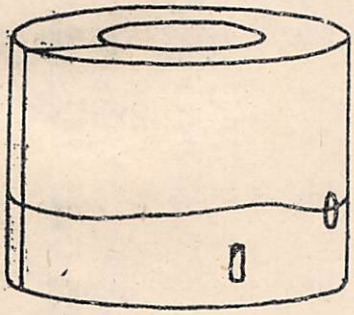


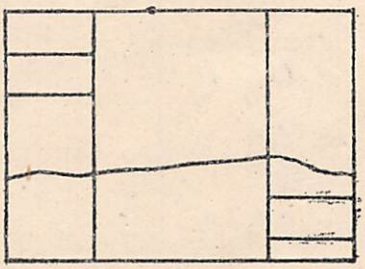
图 4　$\varphi=300°$，$\theta=0°$ 时的图例

利用该程序也能方便地得到完全消隐的图形及各种剖面图。图 5、图 6 则为这样的二例，图 5 是图 2 对应的消隐图，图 6 是 $\varphi=10°$，$\theta=90°$ 时，y_0-z_0 面的剖视图。



$\varphi=10°$　　$\theta=300°$

图 5　消除隐线的图形



$\varphi=10°$　　$\theta=90°$

图 6　剖视图

4　讨论

三维物体在二维平面上显示的主要困难在于如何处理容易被丢失的深度信息，利用动态技术，使物体运动，观察者可以从不同角度观察目标，了解各个侧面的形状，感知到各点的深度及彼此的关系，从而获得三维物体较完整的印象。

一般说，模型愈复杂，产生的图形愈逼真，消除隐面，形成浓淡，能产生逼真的图象。但

是增添过多的细节，会使图形变得不够清晰，众多的线面有时会冲淡及混淆主要的结构特征。实验表明，本文提出的方法，虽然忽视了物体的表面灰度和细节描述，但是突出了内部的相互关系及整体结构，故利于探视物体的主要特征，也减少计算量。这对于那些希望快速产生线框图，从宏观上了解物体整体结构的应用是十分有利的。一般具有图形软硬件的微型机即可实现这一功能。

参 考 文 献

[1] Newman, W. M., Sproull, R. F., 易晓东等译，对话式计算机图形显示原理，科学出版社，北京，1984，297—301.

[2] Foley, J. D., Van Dam, A., Fundamentals of Interactive Computer Graphics, Addision-Wesley Publishing Company, California, 1982, 279—302.

[3] Pavlidis, T., Algorithms for Graphics and Imagl Proclssing, Computer Sciencl Press, Rockvills, 1982, 379—389.

Three Dimensional Dynamic Displays

Chen Xueqian

(Department of Radio and Electronics)

中国科学技术大学学报

JCUST
87018

增　刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部　　1987年12月

大别山—胶东地区高压低温变质矿物学研究

周导之　　葛宁洁

（地球和空间科学系）

1　引言

硬玉＋石英、兰闪石类、多硅白云母（b_0 值大于 9.045 Å）等，是高压低温变质带的特征矿物．它形成在压力大于 5 kbar、温度小于 400℃、地热梯度 10℃/km 的环境（相当于现代消减型板块边界的温压环境）[1]。这些矿物也是鉴别古块板碰撞带位置的重要证据之一．

自 1980 年发现宿松—嘉山一带存在硬玉＋石英、兰闪石类矿物组合的高压低温变质带[1)]以来，对硬玉、兰闪石类矿物，应用红外光谱、电子探针微区分析，进行定性、定量测试，还应用转靶X光衍射仪测定晶胞参数值，并结合野外地质特征及有关

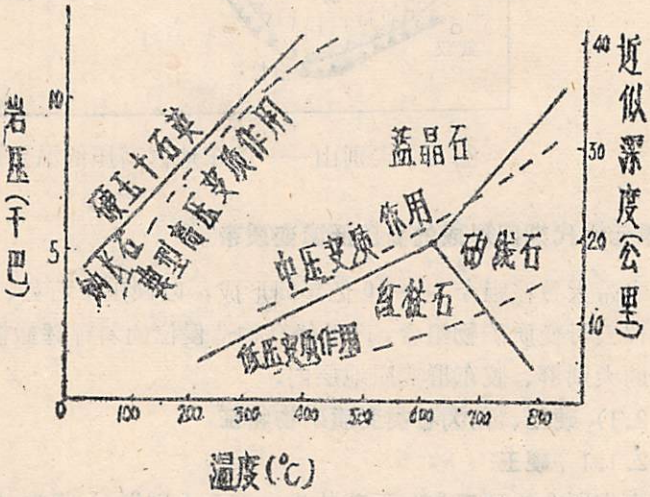


图 1　与Al_2O_3矿物和硬玉的稳定域有关的变质相系的分类〈据都城秋穗，1972〉

1986年4月28日收到．

1）全国郯庐断裂学术讨论会论文摘要汇编，1980年．

同位素年龄峰值和前人研究的成果[2-6]证实：在信阳—宿松—庐江—嘉山—连云港—荣成一带，残存一条早元古代期间形成的，由硬玉＋石英、角闪石类及 b_0 值大于 9.045 Å 的 3T 型多硅白云母变质矿物组成的高压低温度质带。

上述变质带南侧的大别山区，经响水延向黄海的晚元古代地层中，还存在另一条中生代印支期形成的，由硬玉＋石英、兰闪石类及 3T 型多硅白云母（b_0＞9.045 Å）组成的高压低温度变质带（图 2）。

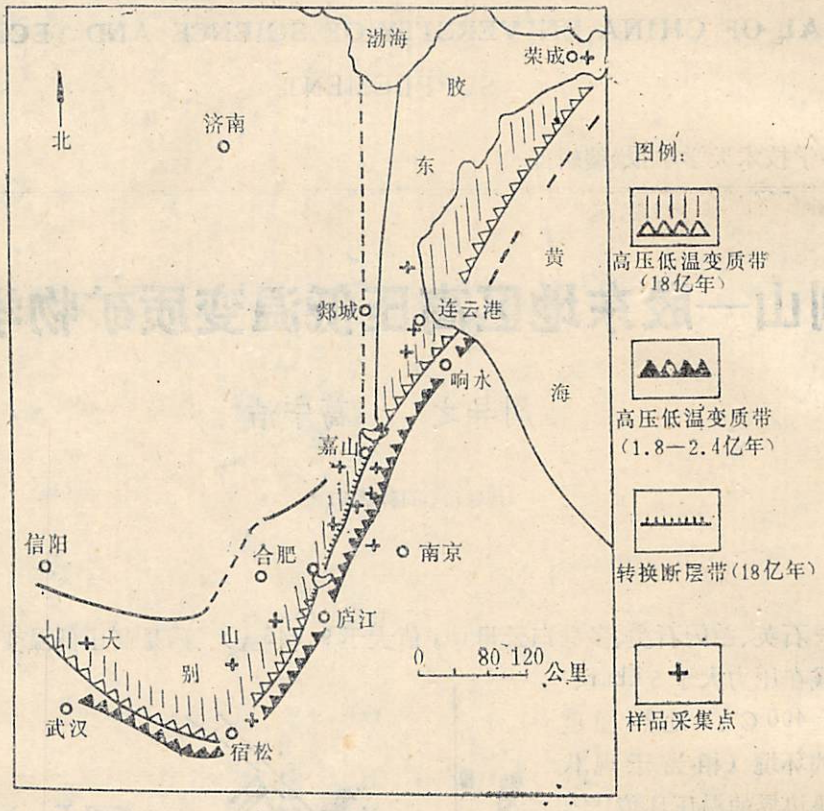


图 2 大别山——胶东地区高压低温变质带分布示意图

2 早元古代期间形成的高压低温变质带

本带大致在距今 18—20 亿年间形成，以硬玉＋石英、角闪石类及 b_0＞9.045 Å 的 3T 型多硅白云母变质矿物组合，产于伴有构造侵位的斜辉辉橄榄岩、斜辉橄榄岩、辉长岩、C型榴辉岩的大别群、胶东群变质地层内。

2.1）硬玉、角闪石类变质矿物特征

2.1.1 硬玉

本带所含的硬玉常与石英共生，产于大别群、五河群、胶东群的斜长片麻岩、多硅白云母片岩及 C 型榴辉岩内，常与镁铁闪石、钙钠闪石等共存。硬玉含量一般在 2－5％，C 型榴辉岩内硬玉含量在 30-50％ 间；呈无色—苹果绿色；粒状、粒径小于 0.02mm；$Ng\wedge c$ 在 32—55° 间，折光率小于 1.68，（＋）$2V$＝56－84°，正延性；晶胞参数值 a_0＝9.59 Å、b_0＝8.63 Å、

$c_0 = 5.219$ Å，$\beta = 107.02°$．镜下可见在压扁石榴石外围出现硬玉环边，或硬玉环内包石英，或3T型多硅白云母．在大别山南坡的潜山县野人寨地区、C型榴辉岩中，硬玉环带呈NE向定向排列（据王小凤测定）．上述硬玉的形态，显示受后期多次地质作用所致．

1）硬玉红外光谱特征

上述地带内硬玉，经红外光谱测试，具有460、582、745、985、1060cm^{-1}红外吸收频率特征．

表 1　硬玉的分析结果

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
SiO_2	58.12	58.09	56.87	58.80	56.35	60.22	59.44	61.78	61.66
TiO_2		0.30		0.02	0.32	0.26		0.03	0.05
Al_2O_3	18.58	23.50	18.48	18.27	18.15	23.10	23.29	21.88	21.81
FeO	4.89	0.16	4.30	4.22	5.97	0.21	1.20	1.14	0.56
MnO	0.03	0.11	0.03	0.03	0.03	0.01		0.05	0.05
MgO	2.07	0.71	2.76	2.04	2.83		1.02	0.16	0.98
CaO	3.02	0.87	3.20	3.17	4.23	0.77	0.01	0.59	1.38
Na_2O	12.28	14.58	12.87	12.77	12.11	12.49	14.16	12.02	12.27
K_2O	0.09	0.02		0.03	0.016	0.08	0.12	0.26	0.57
总计	99.08	98.34	98.51	99.35	100.01	96.24	98.24	97.91	99.87
按6(O)算得的离子数									
Si	1.9344	1.9965	2.0008	2.0470	1.962	2.0600	2.0390	2.0567	2.081
Al^{IV}	0.0656	0.0035			0.038				
Al^{VI}	0.7009	0.9488	0.7666	0.7498	0.707	0.9344	0.9419	0.8795	0.868
Ti		0.0078		0.0006	0.008	0.0068		0.0008	0.001
Mn	0.0008	0.0033	0.0008	0.0008	0.001	0.0002		0.0014	0.001
Mg	0.1081	0.0359	0.1448	0.1056	0.147		0.0010	0.0082	0.049
Fe	0.1432	0.0045	0.1264	0.1228	0.159	0.0060	0.0344	0.0326	0.007
Ca	0.1133	0.0033	0.1205	0.1182	0.158	0.0283	0.0004	0.0215	0.050
Na	0.8329	0.9717	0.8780	0.8621	0.818	0.8309	0.9419	0.7947	0.802
K	0.0042	0.0008		0.0013	0.001	0.0033	0.0027	0.0115	0.024

注：1.荣城县C型榴辉岩；2.凤阳县临淮关五河群斜长片麻岩；3.潜山县C型榴辉岩；4.东海县C型榴辉岩；5.哥伦比亚榴辉岩(据Green 1963)；6.嘉山县三界张八岭群石英角斑岩；7.巢县清水河张八岭群细碧岩；8.桐城县大别群混合片麻岩；9.美国加利福尼亚兰闪石岩石(据Wolfe 1955)．

其中：1、2、3、4号样品为距今18—20亿年间形成的硬玉；6、7、8样品为距今1.8—2.4亿年间(印支期)形成的硬玉．

2）硬玉的电子探针微区分析

根据硬玉的电子探针微区分析数据与计算（见表1），其化学成分与美国加利福尼亚兰闪石岩中硬玉的成分一致。

2.1.2 角闪石类变质矿物特征

在变质地层中的斜长片麻岩、白云母硅质片岩及构造侵位的蛇绿岩、C型榴辉岩内，主要分布有镁铁闪石、钠铁闪石、钠闪石及钙钠闪石。镁铁闪石晶体呈短柱状、纤维状、针状或板状；Np、Nm无色或淡黄，Ng为褐黄；$Ng\wedge c=15-21°$，$b/\!/Nm$，（+）$2V=65-87°$。钠铁闪石Np、Nm为兰绿，Ng兰灰；$Ng\wedge c=-5\sim20°$，$b/\!/Np$，（-）$2V=30-70°$。钠闪石Np深兰，Nm兰色，Ng淡黄；$Ng\wedge c=-5°$，（-）$2V$大于70°，晶胞参数值$a_0=9.70$Å、$b_0=17.71$Å、$c_0=5.52$Å、$\beta=105.59°$。

上述角闪石类矿物含量在5-40%间，常夹于3T型多硅白云母，或石英、钠长石、辉石及石榴子石的晶缝间。江苏东海县牛山斜长片麻岩、大别山区C型榴辉岩、混合片麻岩、玻状岩内的角闪石类，晶形常具圆球状、或随他晶而呈弯曲状特征。

1）角闪石类的红外光谱特征

根据样品测试的波谱分析可知，角闪石类的镁铁闪石具有430、480、610、775、990、1123波数(cm^{-1})的红外吸收频率特征。钠铁闪石具有455、500、670、752、968、1134波数的红外吸收频率特征。钠闪石具有450、635、880、965、1070波数的红外吸收频率特征。

2）角闪石类的电子探针微区分析数据

本带部分角闪石类矿物的电子探针微区分析数据及相应计算值见表2。其中1-7号为距今18亿年前所形成（8号、9号为中生代印支期的样品）。按汤普逊定律，高压有利于铝呈六次配位，高温有利于铝呈四次配位。本区角闪石类矿物，铝有较多的六次配位，说明是在较高压力与较低的温度下形成。

2.2 同位素地质年龄与地质特征

本带大别群、胶东群地层，根据前人应用U-Th-Pb法（锆石）测得10个年龄值[4,5]，除一个最大表面年龄值为24.24亿年（据陈志强1985）外，以距今18-20亿年间居多。近年来我们在肥东县桦槎山取得肥东群桦槎山组下段黑云钾长片麻岩锆石U-Th-Pb法不一致线上交点年龄为1994.68Ma^{-95}_{+102}值。以上显示本区于距今18-20亿年期间的地质热力事件，即高压低温度质矿物的形成年代。

在上述地层，161个K-Ar年龄值统计，变质岩年龄以1.8-2.4亿年峰值出现，而岩浆岩年龄以1-1.7亿年峰值显示。反映本带岩石受中生代印支期先挤压推复、燕山期拉张喷发的地质事件[4,5]，，从而改造高压低温型硬玉呈环带状定向分布及兰闪石中的Al^{3+}为Fe^{3+}交代而变为镁铁闪石等变质矿物的地质原因。

表 2 角闪石类矿物的分析结果

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SiO_2	50.37	43.26	50.93	49.69	50.66	44.01	55.03	54.78	42.36	57.73
TiO_2	0.24	2.62	0.13	0.36	0.27	1.94	0.02	0.03	2.06	
Al_2O_3	10.48	11.23	10.89	1.46	4.55	10.35	7.60	7.60	11.24	12.04
FeO	18.51	13.95	7.46	23.82	11.42	15.36	8.06	9.52	13.18	6.57
MnO	0.13	0.13	0.04	1.06	0.14	0.13	0.04	0.03	0.14	
MgO	10.44	11.36	15.77	6.25	17.64	14.19	8.88	7.64	14.50	13.02
CaO	3.70	11.67	6.30	2.99	11.50	11.49	12.92	11.44	11.45	1.04
Na_2O	6.27	3.83	4.76	12.35	1.20	1.91	7.58	8.48	2.98	6.98
K_2O		1.23	1.12	1.43	0.20	0.75			1.12	0.68
总和	100.14	99.28	97.40	99.41	97.58	100.13	100.13	99.75	99.45	98.06
按 23 个氧原子计算										
Si	7.2010	6.3773	7.1770	7.6849	7.1664	6.4246	7.6829	7.7189	6.2305	8.14
Al^{IV}	0.7990	1.6227	0.8230	0.3151	0.7591	1.5754	0.3171	0.2811	1.7675	
Al^{VI}	0.9673	0.3295	0.9856	0.0836		0.2053	0.9337	1.0161	0.1820	2.00
Ti	0.0258	0.2905	0.0136	0.0836	0.0289	0.2132	0.0025	0.0034	0.2228	
Mn	0.0155	0.0159	0.0051	0.1236		0.0158	0.005	0.0034	0.0177	
Mg	2.2242	2.4960	3.3116	1.4405		3.0668	1.8473	1.6046	3.1795	2.74
Fe	1.7672	1.7201	0.6841	2.9749	0.9638	1.8158	0.9413	0.8065	1.0891	0.76
Ca		0.1480		1.9740	0.3003		1.2702	1.566		
Ca	0.4459	1.6952	0.9509	0.2016	1.4431	1.7974	0.6644	0.1614	1.4966	0.16
Na	0.5670	0.3048	0.8543	1.7984	0.3298		1.3356	1.8386	0.5034	1.90
Na	0.9871	0.7900	0.4463	0.0724		0.5404	0.7164	0.4781	0.3471	
K	0.7517	0.2321	0.2015	0.1413	0.0357	0.1386			0.2104	0.12

注：1.太湖县C型榴辉岩；2.太湖县多硅白云母；3.潜山县C型榴辉岩；4.桐城县辉岩；5.凤阳县五河群斜长片麻岩；6.连云港胶东群多硅白云母片岩；7.东海县C型榴岩；8.桐城玻状岩；9.巢县烟炱河石英角斑岩；10.标准兰闪石，见造岩矿物(W.A. Darr, Rock-Forming Minerals).

3 中生代印支运动形成的高压低温度变质带

本带大致距今 1.8-2.4 亿年间，由中生代印支运动所形成。变质矿物由硬玉＋石英、兰闪石及b_0值大于9.045 Å的3T型多硅白云母组合，产于晚元古代震旦纪张八岭群细碧角斑岩、苏家湾组、灯影灰岩等地层内。张八岭群细碧角斑岩厚度大于 7738m，其中细碧岩、石英角斑岩、凝灰岩的 Sr^{87}/Sr^{86} 初始比值分别为 0.7040、0.7063 及 0.7178[6]。由此证实细碧岩具有洋脊火山喷发性质，而石英角斑岩、凝灰岩具有岛弧火山喷发性质的旋迴，这是增生型

板块边界转化为消减型板块边界的初始俯冲的岩石学证据，后经印支期的地质热力事件而形成。

3.1 硬玉＋石英、兰闪石类矿物特征

3.1.1 硬玉

主要分布在晚元古代张八岭群细碧岩、石英角斑岩内，在苏家湾组、灯影灰岩内及郯庐断裂动力变质带的的混合片麻岩、玻状岩内也有发现，尤其在细碧岩的白色细脉中含量较多。与石英、钠长石等共生。光性与晶胞参数值与早元古代期间形成的硬玉特征一致。

1）硬玉的红外光谱特征

经测张八岭群的细碧岩、石英角斑岩及灯影灰岩中硬玉，具有460、582、745、985、1069波数的红外吸收频率特征。

2）硬玉的电子探针微区分析数据

根据表1中6、7、8号样品硬玉成分与早元古代期间形成的硬玉化学成分无大差异。

3.1.2 兰闪石类矿物特征

兰闪石是仅仅形成于高压低温条件下的变质矿物。本带兰闪石主要分布在晚元古代张八岭群细碧角斑岩、灯影灰岩的硅质层内，尤以细碧岩内含量较多。常与硬玉、石英、黑硬绿泥石、钠长石等共生。

兰闪石晶体呈长柱状，集合体呈纤维状、粒状，镜下晶体颜色为兰色或紫色；Np极淡绿黄，Nm紫红，Ng天兰；正交偏光干涉色为一级紫红，$Ng \wedge c$-8°，$b \parallel Nm$，$(-)2V=42-50°$；晶胞参数值$a_0=9.70$Å、$b_0=17.71$Å、$c_0=5.52$Å、$\beta=103°59'$。细碧岩内含量约30%左右，石英角斑岩内占4～30%不等，在郯庐断裂带内的桐城、巢县清水涧处的波状岩、细碧岩内，因受后期动力变质作用频繁而出现钙钠闪石、镁铁闪石。

1）兰闪石红外光谱特征

经测，嘉山县管店张八岭群细碧岩、嘉山县三界张八岭群石英角斑岩、巢县烱煬河张八岭群石英角斑岩、巢县苏家湾震旦纪苏家湾组千枚岩、灯影灰岩等样品中的兰闪石，具有470、510、786、985、1015、1110、1409、3420、3610、3627波数的红外吸收频率。位于郯庐断裂主干断裂带的巢县清水涧张八岭群细碧岩内的角闪石，则具有镁铁闪石的红外光谱性质。

2）兰闪石类电子探针微区分析数据

本期兰闪石类化学数据及计算值见表2第8、9号样品数据。

3.2 同位素地质年龄与地质特征

同位素地质年龄主要指震旦纪张八岭群细碧角斑岩的地质年龄。经18个K-Ar法、Rb-Sr法、3个U-Pb法样品所测数据[6]：第一次区域初始俯冲生成年龄在在距今7.3-8.6亿年间，第二次变质年龄在1.8—2.4亿年间，大致相当于中生代印支期运动。

根据野外地质观察，张八岭群细碧角斑岩在中生代印支运动早期NNW向压力作用下，产生一系列NW向推复构造，灯影灰岩逆冲到到三迭纪灰岩之上；张八岭群被推复于寒武统地层之上，迭加后期NNE扭力作用，使原片理面发生褶曲、倒转褶皱、柔流褶皱及扭性NNE、NEE向的断裂，并控制晚白垩系沉积地层的发育。经大地电磁测深表明，在苏南、

2）据地质矿产部华东石油局第六物探大队1986年资料。

皖南一带地壳深部，也同样存在印支期形成的大型推复构造[2)]．

根据上述硬玉＋石英及兰闪石组合、同位素地质年龄峰值及野外构造地质特征，证实是距今 1.8—2.4 亿年间中生代印支期运动所形成．

4 3T 型多硅白云母

在上述两期不同地质时代的高压低温变质带内，广泛地分布着 3T 型多硅白云母，其化学成分：50.69/SiO_2、0.58/TiO_2、20.87/AhO_3、3.05/Fe_2O_3、1.93/FeO、4.46/MgO、0.3/CaO、0.1/Na_2O、11.15/K_2O、0.85/H_2O，具有富Fe^{+3}、Mg 多硅白云母性质．据伦琴射线测定及综合前人在大别山区的研究[2]，本带多硅白云母没有 $d=2.99$ Å、3.20 Å、3.48 Å 的谱线，有别于 2M 型；没有 $d=4.35$ Å、4.12 Å、2.69 Å的谱线，有别于 1M型，属 3T型多硅白云母性质．晶胞参数 b_0 值皆大于9.045 Å（见表 3）．据张兆忠等研究[3]，大别山多硅白云母中镁的含量大致为 0.49，相当在地热梯度 11℃/Km、压力 4-7千巴 条件下发生，与日本三波川高压低温度变质带的温压条件相当．证实 3T 型多硅白云母是高压低温变质作用的特征矿物之一．

表 3 大别山—胶东地区 3T 型多硅白云母 b_0 值数据

分布地区与地层名称	3 T 型多硅白云母 b_0 值（Å）
太湖县九田大别群多硅白云母片岩	9.072
潜山县牌楼大别群 C 型榴辉岩	9.078
巢县烱煬河张八岭群石英角斑岩	9.048
嘉山县三界张八岭群石英角斑岩	9.060
连云港猴咀胶东群多硅白云母片岩	9.080
荣成县上庄胶东群多硅白云母片岩	9.042
信阳地区[2]	大于9.05
随县—红安[3]	9.053
麻城地区[3]	9.046
日本三波川[3]	9.054

5 结论

根据高压低温度变质矿物学研究，结合同位素年龄及野外地质特征，初步提出在大别山—胶东地区存在两条不同地质时代所形成的高压低温变质带．

早元古代期间形成的高压低温度变质矿物由硬玉＋石英、镁铁闪石、钠铁闪石、钠闪石

等组成，产于信阳—宿松—桐城—庐江—嘉山—连云港—荣成一带的大别群、五河群、胶东群地层内。

中生代印支期间形成的高压低温变质矿物由硬玉＋石英、兰闪石等组成，产于大别山南坡经宿松—桐城—庐江—嘉山—响水延向黄海的晚元古代震旦纪张八岭群、苏家湾组及灯影灰岩中。

以上两期变质矿物组合中，普遍共生3T型多硅白云母。

上述两期高压低温变质矿物的存在，记录了大别山—胶东地区岩石圈构造演化史，为研究本区矿产资源分布规律及地震构造机制提供一定的科学依根。

参 考 文 献

[1] 都城秋穗著，周云生译，变质作用与变质带，北京，地质出版社，1979，62～75.

[2] 中国科学院地质研究所，国家地震局地质研究所著，华北断块的形成与发展，北京，科学出版社，1980年，122～142.

[3] 张兆忠，张秉良，冯锦江，李松滨，矿物学报，1982，No 4，275～282.

[4] 周导之，中国科学技术大学学报，13（1983），359～366.

[5] 周导之、满发胜、朱广美、孙立广，中国科学技术大学学报，14（1984），550～558.

[6] 朱洪山、张忠奎、陈江峰、陈道公，中国科学技术大学学报，9（1979），550～558.

Minerlogical Study of High Pressure Low Temperature Metamorphism Zone in the Dabie Mountainous Jiaodong Area

Zhou Daozhi　　Ge Ningjie

(Department of Earth and Space Sciencces)

中国科学技术大学学报 JCUST 87019

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

并矢系统的鲁棒性分析

庞国仲 陈振跃

（系统科学与管理科学系）

1 引言

自七十年代末以来，人们对频率域的多变量系统的鲁棒（Robustness）稳定性进行了深入的探讨，得出了一些有意义的结论．其中奇异值分解方法[1]、范数分析方法[2]、主增益—主相位方法[3]等为较有代表性的分析方法．由于一般的多变量系统的频率域设计方法（如奈氏阵列法、特征轨迹法等）不能保证所设计的系统具有鲁棒性，因此频率域鲁棒稳定性的分析方法的出现，无疑为多变量系统的频域理论与设计技术提供了新的分析方法和设计思想．然而因其基本都是以各种范数为数学工具，具有一定程度保守性的充分条件，因此，上述方法无论是实际应用还是具体计算都有一定的困难．自八十年代以来，这一领域的工作主要集中在寻求更少保守性、更便于计算的鲁棒稳定方法，即在现有的分析方法的基础之上，运用加权范数等一系列数学工具，导出了旨在减少或消除各类保守性（主要是第二类保守性）的鲁棒性判据，如加权范数方法[4]、比例方法等．也有从分析系统的结构特性入手，得出较少保守性和较易计算的鲁棒稳定性判据[5,6]．

本文拟对一类特殊结构的对象—并矢（Dyadic）型系统进行分析，以导出并矢系统的鲁棒性判据．

2 数学准备和并矢系统

本节不加证明地给出本文将用到的一些数学结论[8,9]．

1987年6月26日收到．

定义 1 对于矩阵 $M=[m_{ij}]\in C^{n\times n}$，我们给出如下一些定义：

1）谱半径 $r(M)$

$$r(M)\triangleq\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i(M)| \tag{1}$$

2）最大奇异值 $\bar{\sigma}(M)$

$$\bar{\sigma}(M)\triangleq\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i(M^*M)|^{1/2} \tag{2}$$

3）最小奇异值 $\underline{\sigma}(M)$

$$\underline{\sigma}(M)\triangleq\min_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i(M^*M)|^{1/2} \tag{3}$$

其中 $\lambda_i(\cdot)$ 是矩阵 M 的第 i 个特征值；$|\cdot|$ 表示为复变量的模；M^* 是 M 的共轭转置矩阵.

在频率域鲁棒稳定性分析中，常用的矩阵范数有

4） $$\|M\|_1\triangleq\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|m_{ij}| \tag{4}$$

5） $$\|M\|_2\triangleq\bar{\sigma}(M) \tag{5}$$

6） $$\|M\|_\infty\triangleq\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|m_{ij}| \tag{6}$$

引理 1 对于矩阵 A 和 B，只要 AB、BA 有意义，则有

$$r(AB)=r(BA) \tag{7}$$

引理 2 矩阵 M 的谱半径、奇异值和范数之间有以下的关系：

$$r(M)\leqslant\|M\| \tag{8}$$

$$\underline{\sigma}(M)\leqslant r(M)\leqslant\bar{\sigma}(M) \tag{9}$$

引理 3 对于矩阵 A 和 B，若 AB 存在，有

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\| \tag{10}$$

定义 2 $G_A(s)$ 为对象的传递函数矩阵，若 $\det(G_A(s))\not\equiv 0$，且存在 $n\times n$ 维非奇异常阵 P、R 以及传递函数 $g_1(s)$、$\cdots g_n(s)$，使得

$$G_A(s)=P\mathrm{diag}\{g_i(s)\}_{1\leqslant i\leqslant n}R \tag{11}$$

则称 $G_A(s)$ 为并矢传递函数矩阵.

若单位反馈系统的被控对象的传递函数矩阵 $G_A(s)$ 为并矢传递函数矩阵，则称该单位反馈系统为并矢系统.

对于一个并矢系统，我们总可以取适当的前向控制器 $K(s)$，将一个 n 维输入 n 维输出的多变量系统的设计问题，转化为 n 个单变量系统的设计问题. 若我们取控制器 $K(s)$ 为

$$K(s)=R^{-1}\mathrm{diag}\{k_i(s)\}_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1} \tag{12}$$

则系统的开环传递函数矩阵和回差矩阵分别为

$$G_A(s)K(s)=P\mathrm{diag}\{g_i(s)k_i(s)\}_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1} \tag{13}$$

$$I+G_A(s)K(s)=P\mathrm{diag}\{1+g_i(s)k_i(s)\}_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1} \tag{14}$$

系统的闭环传递函数矩阵为

$$H_c(s)=P\mathrm{diag}\left\{\frac{g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1} \tag{15}$$

若记

$$P=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \tag{16}$$

$$P^{-1}=(r_1,\cdots,r_n)^T \tag{17}$$

则 $H_c(s)$ 可表示为

$$H_c(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}a_ir_i^T \tag{18}$$

其结构如图 1 所示。

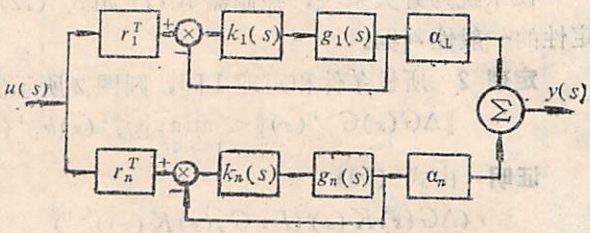


图 1 单位反馈系统的并矢结构

并矢系统的设计，就是基于上述所介绍的并矢系统的独特物理结构来设计 $k_i(s)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，以减弱系统的各回路的关联，达到令人满意的系统特性[11]。

3 鲁棒性分析的基本方法

设系统如图 2 所示，其中 $G_A(s)$ 是 $n\times n$ 维的被控对象的传递函数矩阵，$K(s)$ 是 $n\times n$ 维的控制器，$\Delta G(s)$ 为 $G_A(s)$ 的摄动矩阵，这是由 $G_A(s)$ 的不确定性引起的。这种不确定性包括工作环境的变化、工作点的漂移、$G_A(s)$ 的近似简化处理等等。鲁棒稳定性就是研究若 $K(s)$ 使图 2 的未受扰动部分（名义系统）稳定，当被控对象由于上述这些不确定因素，由 $G_A(s)$ 变为 $G_A(s)+\Delta G(s)$，则 $K(s)$ 是否仍能使变化后的图 2 所示的实际系统保持稳定。下面的鲁棒性基本定理回答了这个问题。

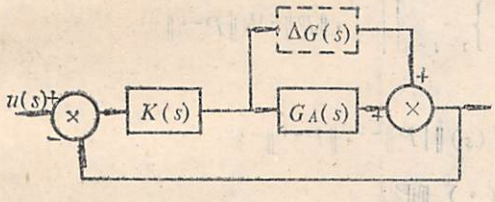


图 2 名义系统和实际系统

定理 1 设 $G_A(s)$、$K(s)$ 和 $\Delta G(s)$ 均为 $n\times n$ 的有理方阵，且名义系统和实际系统具有相同数量的平面极点数。则 $K(s)$ 使名义系统闭环稳定，$K(s)$ 也将使实际系统闭环稳定的充分条件是满足下列不等式中的任何一个。

(i) $r(\Delta G(s)K(s)(I+G_A(s)K(s))^{-1})<1$ (19)

(ii) $\bar{\sigma}(\Delta G(s)K(s)(I+G_A(s)K(s))^{-1})<1$ (20)

(iii) $\bar{\sigma}(\Delta G(s)K(s)<\underline{\sigma}(I+G_A(s)K(s))$ (21)

(iv) $\|\Delta G(s)K(s)(I+G_A(s)K(s))^{-1}\|<1$ (22)

(v) $\|\Delta G(s)K(s)\|<\|I+G_A(s)K(s))^{-1}\|^{-1}$ (23)

(i)—(v) 式中，(i) 是最少保守性的，但要在许多频率点上进行特征值的计算。(ii)、(iv) 由于引入范数和奇异值，产生了第二类保守性，其保守程度比 (i) 大。(iii)、(v) 由于运用了 Schwarz 不等式，产生了所谓的第三类保守性，其保守程度比第二类保守性还严重。(iv)、(v) 不需要在各频率点上进行特征值的计算。为了减少以至消除这些判据的保守性，人们提出了一些改进的或新的鲁棒稳定性分析方法，如主增益—主相

位法、加权范数法、相似比例法和非相似比例法等等。虽然这些方法在一定程度上减小了以至消除了判据的保守性，但一般而言，却增加了计算量。因此更少保守性和更易计算的鲁棒稳定性分析方法仍是今后一个时期研究鲁棒稳定性问题的重要课题。

4 并矢系统的鲁棒性分析

设系统为并矢系统，控制器 $K(s)$ 如式（12）所示，则我们可以给出并矢系统的鲁棒稳定性的一般性判据。

定理 2 所设条件和定理 1 同，则图 2 所示实际系统稳定的充分条件为

$$\|\Delta G(s)G^{-1}(s)\| < \min_{1\leqslant i\leqslant n} |g_i^{-1}(s)k_i^{-1}(s)+1| \, \|P^{-1}\|^{-1}\cdot\|P\|^{-1} \tag{24}$$

证明 由式（19）

$$\begin{aligned}
&r(\Delta G(s)K(s)(I+G_A(s)K(s))^{-1})\\
&=r(\Delta G(s)G_A^{-1}(s)G_A(s)K(s)(I+G_A(s)K(s))^{-1})\\
&=r\left(\Delta G(s)G^{-1}(s)P\,\mathrm{diag}\left\{\frac{g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}\right)\\
&=r\left(\mathrm{diag}\left\{\frac{g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}\Delta G(s)G^{-1}(s)P\right)\\
&\leqslant\left\|\mathrm{diag}\left\{\frac{g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}\Delta G(s)G^{-1}(s)P\right\|\\
&\leqslant\left\|\mathrm{diag}\left\{\frac{g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}\right\|\cdot\|P\|\cdot\|P^{-1}\|\cdot\|\Delta G(s)G^{-1}(s)\|<1
\end{aligned}$$

移项可得

$$\|\Delta G(s)G_A^{-1}(s)\| < \left\|\mathrm{diag}\left\{\frac{g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}\right\|^{-1}\cdot\|P\|^{-1}\cdot\|P^{-1}\|^{-1}$$

若范数$\|\cdot\|$取为$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_\infty$，则

$$\|\Delta G(s)G_A^{-1}(s)\| < \min_{1\leqslant i\leqslant n} |1+g_i^{-1}(s)k_i^{-1}(s)| \, \|P\|^{-1}\cdot\|P^{-1}\|^{-1}$$

推论 1 若定理 2 中的范数$\|\cdot\|$取为$\|\cdot\|_2=\bar{\sigma}(\cdot)$ 则得

$$\bar{\sigma}(\Delta G(s)G_A^{-1}(s)) < \min_{1\leqslant i\leqslant n} |1+g_i^{-1}(s)k_i^{-1}(s)| \, \underline{\sigma}(P)\cdot\underline{\sigma}(P^{-1}) \tag{25}$$

推论 2 若取置信圆的半径为 $r(s)=\|\Delta G(s)G_A^{-1}(s)\|\cdot\|P\|\cdot\|P^{-1}\|$， $k_i^{-1}(s)g_i^{-1}(s)$，$(s\in D,\ 1\leqslant i\leqslant n)$ 的置信带不包含或者不接触复平面上的（-1，0）点，则定理 2 仍成立。

证明 将式（24）写为

$$|1+g_i^{-1}(s)k_i^{-1}(s)|>r(s) \qquad s\in D,\ 1\leqslant i\leqslant n$$

即得所证。

推论 2 的图形解释如图 3 所示。

定理 2 实质上给出了对象模型的相对偏差的一个范数估计。虽然定理 2 的结论形式上很简单，但这判据具有第三类保守性。

如果我们对所加的摄动 $\Delta G(s)$ 作如下的约束

$$\Delta G(s)=P\mathrm{diag}\{\Delta g_i(s)\}_{1\le i\le n}R \tag{26}$$

这类并矢型摄动，并不仅仅为参数摄动，在一定意义下，它是对角型摄动的推广．因此这类摄动具有实际的物理背景．

对于具有式（26）这类的约束的摄动系统，我们不仅可以给出更加简单的鲁棒稳定性判据，而且还可给出判别系统的鲁棒稳定的充要条件．

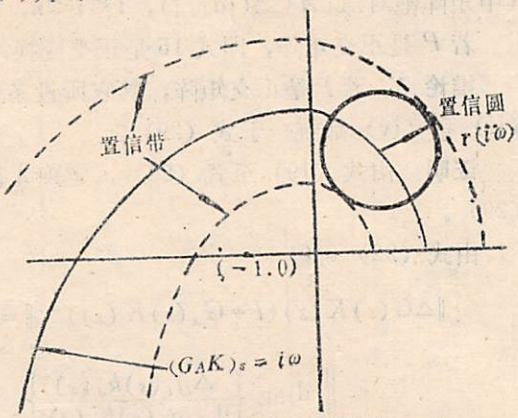


图 3　置信圆和置信带

定理 3　设 D 为 Nyquist 围线，$\Delta G(s)$ 服从式（26）这样的并矢约束，其它所设条件和定理 2 同，则 $K(s)$ 能使实际系统稳定的充要条件为

$$\Delta g_i(s)k_i(s)(1+g_i(s)k_i(s))^{-1}\neq 0 \qquad 1\le i\le n,\ s\in D \tag{27}$$

证明　根据广义的 Nyquist 稳定判据，实际系统稳定的充要条件为其特征多项式在右半复平面无零点，即 $\forall s\in D$，有

$$\det(I+(\Delta G(s)+G_A(s))K(s))=\det(I+G_A(s)K(s))\det(\Delta G(s)K(s)(I+G_A(s)K(s))^{-1})\neq 0 \tag{28}$$

根据条件所设，知名义系统稳定，即 $\forall s\in D$，有

$$\det(I+G_A(s)K(s))\neq 0$$

则（28）式等效为

$$\det(\Delta G(s)K(s)(I+G_A(s)K(s))^{-1})=\det\left(P\mathrm{diag}\left\{\frac{\Delta g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\le i\le n}P^{-1}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\Delta g_i(s)k_i(s)(1+g_i(s)k_i(s))^{-1}\neq 0$$

即 $\forall s\in D$，有

$$\Delta g_ik_i(s)(1+g_i(s)k_i(s))\neq 0 \qquad 1\le i\le n$$

证毕．

定理 4　所设条件和定理 3 同，则实际系统稳定的充分条件是

$$\max_{1\le i\le n}|\Delta g_i(s)k_i(s)/(1+g_i(s)k_i(s))|<1 \tag{29}$$

证明　由定理 1 知实际系统稳定的充分条件为

$$r(\Delta G(s)K(s)(I+G_A(s)K(s))^{-1})=r\left(P\mathrm{diag}\left\{\frac{\Delta g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\le i\le n}P^{-1}\right)$$

$$=r\left(\mathrm{diag}\left\{\frac{\Delta g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\le i\le n}\right)=\max_{1\le i\le n}\left|\frac{\Delta g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right|<1$$

证毕．

由定理 4，我们可以给出 $\Delta G(s)$ 的变化范围的绝对值上限．因为

$$|\Delta G(s)|=|P\mathrm{diag}\{\Delta g_i(s)\}_{1\le i\le n}R|\le\max_{1\le i\le n}|\Delta g_i(s)|\cdot|P|\cdot|R|$$

$$\le\min_{1\le i\le n}|k_i^{-1}(s)+g_i(s)|\cdot|P|\cdot|R| \tag{30}$$

其中矩阵绝对值$|A|\triangleq(|a_{ij}|)$，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$。

若P是正交矩阵，即式15是正交变换，有

推论 3 若P是正交矩阵，其它所设条件和定理3同，则定理1中的充分条件（i）、(ii) 和 (iv) 都统一于式 (29)．

证明 由式 (19) 至式 (29)，定理4已给出了证明．在此仅证明式 (20)、(22) 至式 (29)．

由式 (22) 可得

$$\|\triangle G(s)K(s)(I+G_A(s)K(s))^{-1}\|=\left\|P\mathrm{diag}\left\{\frac{\triangle g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}\right\|$$

$$\leqslant\left\|\mathrm{diag}\left\{\frac{\triangle g_i(s)k_i(s)}{1+g_i(s)k_i(s)}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}\right\|\cdot\|P\|\cdot\|P^{-1}\|<1 \tag{31}$$

若范数$\|\cdot\|$取为$\|\cdot\|_1$或$\|\cdot\|_\infty$，则式 (31) 即为式 (29)．若取范数为$\|\cdot\|_2=\bar{\sigma}(\cdot)$，则式 (31) 和式 (29) 统一．证毕．

推论3的结论完全消除了由于引入范数和奇异值来分析系统鲁棒性而产生的所谓的第二类保守性，而且这类系统的鲁棒性与系统的关联性无关，这结论从物理结构上也很好理解，这是一个非常好的特性．对实际系统进行设计时，完全可将系统的鲁棒性和关联性分别考虑．

定理 5 设$\triangle G(s)$是式 (26) 一类的并矢约束，若$K(s)$使名义系统稳定，$K(s)$使实际系统稳定的充要条件为

$$\sum_{i=1}^{n}N_i(-1)=-n_0 \tag{32}$$

其中$N_i(-1)$是$(g_i(s)+\triangle g_i(s))k_i(s)$的Nyquist轨迹绕（－1，0）点的圈数（$1\leqslant i\leqslant n$），$N_i(-1)$为正，则表示轨迹顺时针绕（－1，0）点的圈数，否则就表示沿逆时针方向．n_0为$\prod_{i=1}^{n}((\Delta g_i(s)+g_i(s))k_i(s))$位于$s$右闭半平面上的零点数．

证明 实际系统的闭环特征多项式为

$$\det(I+(G_A(s)+\Delta G(s))K(s))=\det(I+P\mathrm{diag}\{(\Delta g_i(s)+g_i(s))k_i(s)\}_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1})$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(1+(\Delta g_i(s)+g_i(s))k_i(s))$$

设$N_i(0)$是$(1+(\Delta g_i(s)+g_i(s))k_i(s))$轨迹绕原点的圈数，则由幅角原理和Nyquist稳定判据，知实际系统稳定的充要条件为

$$\sum_{i=1}^{n}N_i(0)=-n_0 \tag{33}$$

对式 (33) 作一下坐标平移，将原点移至（－1，0）点，得

$$\sum_{i=1}^{n}N_i(-1)=-n_0$$

证毕．

5 举例

考虑文献[1,6]所给的如下对象模型：

$$G_A(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix}-47s+2 & 56s\\ -42s & 50s+2\end{pmatrix} \tag{34}$$

其开环单位阶跃响应如图 4 所示。

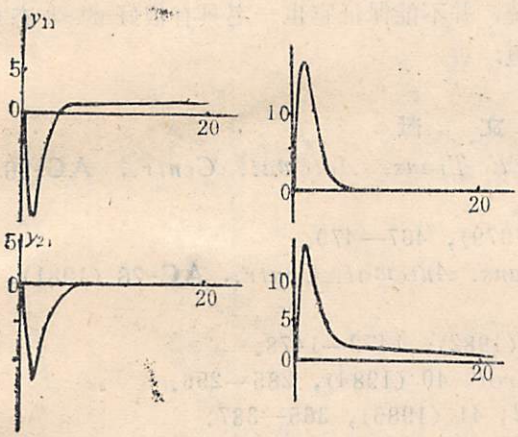


图 4　被控对象的阶跃响应

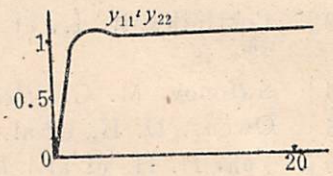


图 5　闭环响应

$G_A(s)$ 的特性不是太好。若将 $G_A(s)$ 并矢展开为

$$G_A(s)=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{2}{s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -8\\ -6 & 7\end{pmatrix} \tag{35}$$

设计控制器 $K(s)$ 为

$$K(s)=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2(s+1)}{s(s+2)} & 0\\ 0 & \frac{1}{s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -8\\ -6 & 7\end{pmatrix} \tag{36}$$

则闭环传递函数矩阵为

$$H_e(s)=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{s^2+2s+2} & 0\\ 0 & \frac{2}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -8\\ -6 & 7\end{pmatrix} \tag{37}$$

闭环阶跃响应如图 5 所示。可见不仅消除了系统的耦合作用，而且具有良好的响应特性。下面我们讨论一下该系统的鲁棒性。

由定理 2 知，对象模型的相对偏差估计为

$$\|\Delta G(s)G_A^{-1}(s)\|<\frac{1}{338}|s^2+2s+2| \tag{38}$$

若摄动前后的对象模型相对偏差的范数估计在所有的工作频率范围内都满足式 (38)，则

(34) 式所描述的单位负反馈系统具有鲁棒性.

若 $\Delta G(s)$ 服从式 (26) 的约束，则根据定理 4，我们可给出 $\Delta G(s)$ 的绝对值估计

$$|\Delta G(s)|<\frac{1}{2}\left|\frac{s^2+2s+2}{s+1}\right|\cdot\begin{pmatrix}97 & 112\\ 84 & 97\end{pmatrix} \tag{39}$$

这种我们就能对每个 $|\Delta g_{ij}(s)|$ 作出估计 ($1\leqslant i\leqslant 2$, $1\leqslant j\leqslant 2$). 由式 (39) 知该系统具有较好的鲁棒性，因为 $|\Delta G(s)|$ 允许变化范围较大.

最后应该指出，一个具有较好鲁棒性的系统，并不能保证它也一定具有很好的动态特性. 这也是研究系统鲁棒性必须有待解决的问题.

参 考 文 献

[1] Doyle, J. C. and Stein, G., *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-26** (1981), 4—16.

[2] Sandell, N. R., *Automatica*, 15 (1979), 467—470.

[3] Postlethwait, I., et al., *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-26** (1981), 32—48.

[4] Safonov, M. G., *Proc. IEE*, 129 (1982), 1472—1478.

[5] Owens, D. H. et al., *Int. J. Control*, 40 (1984), 285—296.

[6] Yeh, H. H. et al., *Int. J. Control*, 41 (1985), 365—387.

[7] Lehtomaki, N. A. et al., 20th IEEE Conf., Decision and Control, 1981, 1173—1190.

[8] Nwokah, O. D. I., *Proc. IEE*, 133 (1986), 57—64.

[9] Vidyasager, M. and Kimura, H., *Automatica*, 22 (1986), 85—94.

[10] 须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，1979, 214—234.

[11] D. H. 欧文斯著，庞国仲、白方周、李嗣福译，反馈和多变量系统，安徽科学技术出版社，1986, 238—257.

Robust Stability Analysis of Dyadic System

Pang Guozhong Chen Zhenyue

(*Department of Systems and Management Science*)

中国科学技术大学学报 JCUST 87020

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

甲烷的压缩因子测定

唐德中 王永堂 吴小华

(工程热物理系)

1 引言

甲烷不仅是重要的化工原料，而且在沼气发电、热泵节能和催化燃烧以及航空发动机改烧、天然气等能源工程与化工生产中也正发挥着越来越引人注目的作用．为此，研究甲烷的热力学性质，有着重要的意义．

本文根据国际上广为采用的 Burnett 方法，利用已经建立的实验装置[1]，对纯度99.99%，温度分别为25℃、50℃、压力为1～10MPa时的甲烷气体，进行了实验研究，得到了相应状态下甲烷的维里系数与压缩因子，并对照文献值作了比较，误差分析表明结果良好．

2 实验方法

众所周知，压缩因子Z表示实际气体对理想气体状态的偏离程度，它在热物性的研究中占有重要的地位．当采用 Burnett 方法时，正如文献［1，2］所述，仅仅需要连续测量等温膨胀以后的压力，就可用以下公式确定实际气体的维里系数和压缩因子：

$$Z_r = N' P_r \frac{Z_0}{P_0} \tag{1}$$

或者

$$Z_r = 1 + B(T) P_r \tag{2}$$

1987年5月日18日收到．

式中N为实验装置常数，与实验所用气体无关；r为等温膨胀的次数，P_r为第r次等温膨胀以后的平衡压力；Z_r为经过r次等温膨胀以后的气体的压缩因子；$B(T)$为第二维里系数，$\frac{Z_0}{P_0}$是取决于充气初压和初态时气体的压缩因子的另一个实验常数．利用线性外推方法或最小二乘法，容易确定实验常数N、$\frac{P_0}{Z_0}$和第二维里系数$B(T)$[1]，从而通过公式（1）或（2），可以方便地求出在某一恒定温度T与不同平衡压力P_r下的实验气体的压缩因子值．

3 实验装置

本实验装置主要有膨胀本体、充气放气系统、测压系统、测温和恒温系统等部分组成．

该实验本体系自行设计，采用了自密封结构，并经受了150个压力的水压试验．所用材料为1Gr18Ni9Ti．

恒温系统采用了LB801-4型恒温水浴，恒温水平温度场与垂直温度场的最大温差分别为±0.2℃和±0.5℃，随时间变化为±0.5℃/24h．试验气体甲烷的纯度优于99.99%．其它实验部分与文献［1］所述相同，在此从略．

4 实验结果

本方法的可靠性早已有论证[3,4]，不再赘述．

表1给出了实验测定的装置常数N和甲烷的第二维里系数$B(T)$．

表2给出了甲烷在25℃和50℃时的压缩因子．

需要指出的是，表1和表2中的压力值均已计入当时当地的的大气压，第二维里系数$B(T)$是由最小二乘法，经计算机关联而得．$B'(T)$为文献给出的第二维里系数的最大值及最小值[4]，它是按公式$B'(T)=B'(T)_V/RT$换算得到的．式中R为通用气体常数．表2中Z'_r是按文献给出的维里系数而计算求得的压缩因子比较值．

表 1 实验装置常数和维里系数

温度 T℃	实验编号 No.	装置常数 N	维里系数 Pa^{-1} $B\times10^8$	$B'\times10^8$	误差 $\frac{B-B'}{B'}$%
25	1	1.5222	−1.779	−1.752	1.54
	2	1.5223	−1.773	−1.728	2.60
50	1	1.5211	−1.302	−1.294	0.62
	2	1.5216	−1.312	−1.246	0.53

应用统计误差理论分析可知，由公式

$$Z_r=N^rP_r\frac{Z_0}{P_0}$$

故其方差合成为

$$\sigma_{Z_r}^2=\left(\frac{\partial Z_r}{\partial N}\right)^2\sigma_N^2+\left(\frac{\partial Z_r}{\partial P}\right)^2\sigma_P^2+\left(\frac{\partial Z_r}{\partial\left(\frac{Z_0}{P_0}\right)}\right)^2\sigma\left(\frac{Z_0}{P_0}\right)^2 \tag{3}$$

系统误差合成有

$$\Delta Z_r=\left(\frac{\partial Z_r}{\partial N}\right)\Delta N+\left(\frac{\partial Z_r}{\partial P}\right)\Delta P+\left(\frac{\partial Z_r}{\partial\left(\frac{Z_0}{P_0}\right)}\right)\Delta\left(\frac{Z_0}{P_0}\right) \tag{4}$$

考虑到温度的波动，则总的合成误差限可以用下式表示：

$$\pm\Delta Z_r\pm3\sigma_{Z_r}\pm\frac{\Delta T}{T} \tag{5}$$

计算机运行结果表明，本实验条件下测得的压缩因子的相对百分误差不超过 1.6%[5].

表 2　不同温度下甲烷的压缩因子

P_r MPa	$Z_r=N^rP_r\frac{Z_0}{P_0}$	$Z'_r=1+BP_r$	$Z''_r=1+B'P_r$	$\frac{Z_r-Z''_r}{Z''_r}\%$
		$T=298.2$K		
8.349	0.8516	0.8515	0.8537	−0.25
5.771	0.8957	0.8973	0.8989	−0.36
3.940	0.9311	0.9299	0.9309	+0.02
2.651	0.9533	0.9528	0.9536	−0.03
1.768	0.9677	0.9686	0.9690	−0.14
8.339	0.8523	0.8521	0.8559	−0.42
5.760	0.8960	0.8979	0.9005	−0.50
3.926	0.9295	0.9304	0.9322	−0.29
2.650	0.9553	0.9530	0.9542	+0.12
1.764	0.9674	0.9687	0.9695	−0.22
		$T=323.2$K		
8.692	0.8839	0.8868	0.8875	−0.41
5.936	0.9187	0.9227	0.9232	−0.49
4.019	0.9467	0.9477	0.9480	−0.14
2.690	0.9644	0.9650	0.9652	−0.08
1.788	0.9756	0.9767	0.9769	−0.13
8.349	0.8859	0.8905	0.8960	−1.13
5.696	0.9199	0.9253	0.9290	−0.98
3.852	0.9468	0.9495	0.9520	−0.55
2.582	0.9659	0.9661	0.9678	−0.20
1.714	0.9760	0.9775	0.9786	−0.22

5 结语

目前所进行的实验，由于测压部分不完善，以及恒温浴的精度还不够，故所得实验结果尚不理想。当今国外所进行的同类测定，凭借先进的测试仪表，其维里系数的误差已不高于0.1%，压缩因子的精度更高[4,6,7]，故本实验还有不少方面有待今后改进提高。尽管如此，该实验仍显示了Burnett方法在研究PVT性质中的优点，理所当然地值得人们的重视。同时，本实验所得的甲烷在温度25℃、50℃、压力10MPa下的维里系数与压缩因子，也可以在工程上应用。

本实验在中国科学技术大学工程热物理系热力学实验室中进行，得到了该系有关师生的大力支持，在此谨致谢意。

参 考 文 献

[1] 唐德中等，中国科学技术大学学报，16 (1986)，295。
[2] Neindre, B. L. and Vodar, B., Experimental Thermodynamics, Vol.II, Butterworth & Co., London, 1975.
[3] Silberberg, I. H. et al., *J. Chem. Eng. Data*, 4 (1959), 314.
[4] Dymond, J. H. and Smith, E.B., The Viyial Coefficients of Pure Gases and Mixtures, Clarendon Press, Oxford, 1980.
[5] 吴小华，中国科技大学8113论文，1986.
[6] 谭顺德，煤气与热力，1985年，No. 1, 39.
[7] Jorgen, M., *J. Chem. Eng. Data*, 30 (1985), 21.

Measurement of Methane Compressibilities

Tang Dezhong　Wang Yongtang　Wu Xiaohua

(Department of Engineering Thermophysics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87021

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

SnO_2 透明薄膜的研制和性能研究

陈树榆 葛新石 孙孝兰 王桂娟

(结构成分分析中心) (工程热物理系)

1 引言

尽可能多吸收太阳辐射热的同时，又最大限度地抑制所吸收热量的损失，是提高太阳热能利用效率的主要关键．为此，研究理想的光谱选择性透明薄膜具有重要的意义．近年来，国外已对1）金属膜；2）金属基底多层膜，即由一层贵金属和一层或多层界质膜组成的膜；3）微格膜，其孔隙允许可见光充分地透过，对红外热辐射反射率高；4）金属氧化物膜等[1]进行了研究．尤以研究金属氧化物薄膜，例如 SnO_2，In_2O_3 等为最多．这种金属氧化物薄膜具有良好的导电性，且能透过相当多的太阳辐射．将它涂在玻璃上可作工业炉的窗口，也可作汽车、飞机的防风罩（起扫雾作用）[2]．又因其在可见光及近红外光谱范围具有较高的透过率，在红外及远红外区域也有较高的透过率，所以，在太阳能热利用中，有着广泛的用途．制备 SnO_2 薄膜方法有1）真空沉积法；2）锡的反应射频溅法；3）化学蒸发沉积法；4）浸涂法；5）喷涂法．上述方法中以喷涂法工艺最简单，成本低廉，且易做到大面积成膜[1-5]．本文研究喷涂 SnO_2 薄膜的工艺及其光学、电学性质和结构特征．

2 实验部分

2.1 试剂和仪器

试剂：化学纯的 $SnCl_4 \cdot 5H_2O$ 和 NH_4F，工业乙醇．

1987年2月27日收到．

测试仪器：发射仪（Emissometer Model AE），TP—77 椭偏仪，标准四点探针，日本岛津公司 UV—365 紫外—可见—近红外分光光度计，日本理学公司 D/max—rA 转靶 X 射线衍射仪，美国尼高力公司 170—SX 付里叶变换红外光谱仪.

2.2 SnO_2 薄膜的研制

我们采用四氯化锡乙醇溶液水解法成膜. 用厚为 3mm，面积为 60×90mm 的平板玻璃作衬底，$SnCl_4 \cdot 5H_2O$ 作喷涂剂，NH_4F 作掺杂剂. 乙醇因具有高挥发性和低表面张力，所以扩散性很好，易与喷涂剂形成很细的气溶胶，喷到玻璃上时可大大减少高温冲击. 具体方法是：称取 50g $SnCl_4 \cdot 5H_2O$ 溶于 90ml 乙醇中，另称取 5g NH_4F 溶于 10ml 蒸馏水中，将这二种溶液均匀混合，移入喷雾器中（1756 玻璃喷雾器），并与空压机连接好待用. 然后将作衬底的玻璃放入马弗炉中，逐渐升温至 600～650℃，喷涂溶液由空气携带呈雾状喷涂在被加热的玻璃上，空气压力稳定为 1.5kg/cm²，喷涂 1 分钟. 溶液喷涂在高温玻璃上发生的综合化学反应如下：

$$SnCl_4 + 2H_2O \rightarrow SnO_2 + 4HCl\uparrow$$

3 结果与讨论

3.1 薄膜的结构分析

由 SnO_2 粉末和本工作研制的 SnO_2 薄膜的 X 射线衍射图可知，SnO_2 薄膜是一种四方晶体结构（参见图 1）. 从图 1(a) 可看出 SnO_2 多晶的粉末样品具有无规则的方位，相对强度最高峰为（110），其次是（101）. 从图 1(b) 可见，喷涂在玻璃上所形成的膜具有与 SnO_2 粉末类似的结构，只是峰的相对强度有些改变，(101) 峰的强度大大减弱，而 (200) 峰明显增强. 图 1(c) 因喷涂温度较低，结晶状态很差，有明显的非晶形本底，各峰的相对强度均较弱，峰形也不尖锐. 这是因为峰宽取决于晶粒的大小，图 1(b) 结晶好，峰宽小，峰形尖细.

3.2 温度的影响

在实验过程中发现，加热玻璃衬底温度对成膜质量起着关键作用. 在温度低于 600℃ 时，形成的膜较薄，薄层电阻较高，与普通玻璃相比其发射率 ε 降低很少. 这是因为温度较低时所形成的 SnO_2 晶体的晶粒小、膜薄，发射率值与衬底玻璃接近所致. 从图 1(b)、(c) 比较可看出，玻璃加热到 500℃ 所成的膜有较高的非晶形本底，峰形不锐，结晶状态明显比 600℃时所成的膜差，这与文献[3,4]结果吻合. 实验中还发现，喷涂时间一定时，温度越高，薄膜越厚，薄层电阻越小. 涂层厚度和电阻的变化关系见表 1.

表 1 膜厚度与薄层电阻的关系

薄膜厚度（Å）	1468	2825	3303	3907
薄层电阻（Ω/□）	36	25	23	16

必须控制加热温度，使其不超过所使用玻璃材料的软化和变形温度极限，也不因温度过高薄层厚度增加降低了光谱透过率. 在薄层电阻为 10～25(Ω/□)，薄膜厚度为 0.3～0.4μm 时，本工作得到的 SnO_2 膜各种性能较好. 玻璃加热温度为 600～650℃时容易获得上述结果.

3.3 掺杂剂浓度的影响

SnO_2 薄膜是一种宽带隙 (Wide band gap) 的 N 型半导体[1-5]. 在 SnO_2 薄膜结构中，掺入氟、锑、磷等杂质元素可改变其电学性能. 本工作选择 NH_4F 晶体作掺杂剂. 增加氟的浓度将增加自由电子的数目，从而降低了薄层电阻. 实验表明：掺杂剂的浓度有一最佳范围，浓度太高将产生不利影响. 这是因为掺杂剂浓度太高会使掺杂原子被分离在晶粒间界，影响晶体质量. 从图 2 X 射线衍射图可看出，高剂量的掺杂，会使 SnO_2 晶体产生高

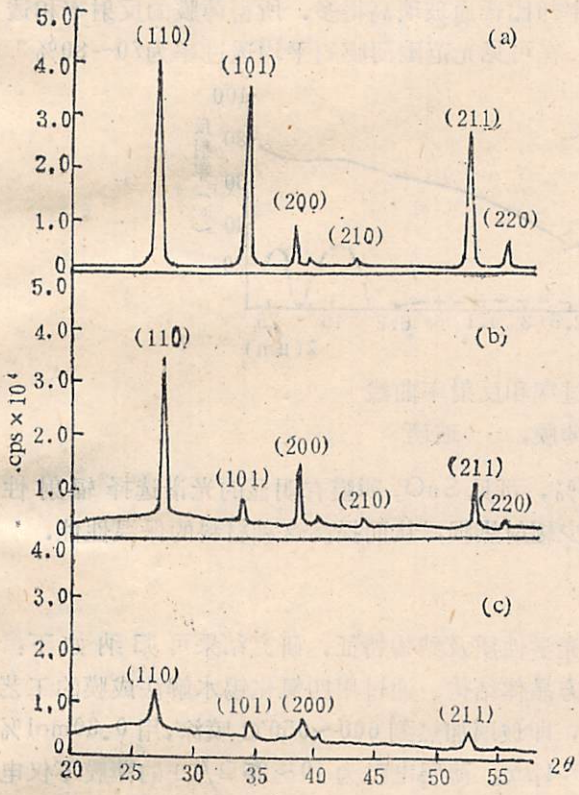


图 1 SnO_2 的 X 射线衍射图
(a) SnO_2 粉末； (b) 喷涂 SnO_2 膜，底衬温度 600℃； (c) 喷涂 SnO_2 膜底衬温度 500℃.

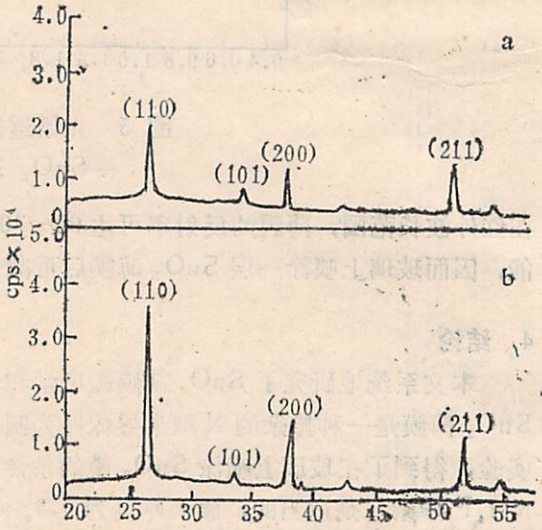


图 2 SnO_2 薄膜掺杂 NH_4F 不同剂量的 X 射线衍射图 (a) 掺杂 NH_4F 0.61mol%； (b) 掺杂 NH_4F 0.3mol%.

的非晶形本底. 这样使得薄膜的电阻增加，降低了膜的电学性能. 而且掺杂过多也会影响薄膜的透明度. 掺杂剂的浓度要通过实验确定，实验结果见表 2.

表 2 NH_4F 浓度对薄层电阻、常温发射率的影响

NH_4F 浓度 (mol%)	薄层电阻 ($R/\square$)	常温发射率 (ε)
0.61	36	0.43
0.46	22	0.38
0.30	16	0.35
0.15	23	0.41

本实验选掺杂剂浓度为 0.30mol%.

3.4 薄膜的光学性质

由 X 射线衍射图可知，SnO_2 薄膜是一种多晶结构，具有较高导电性的半导体. 薄膜电阻与其表面的光学性质有密切关系，薄层电阻越小，红外波段的反射率越大. 由于膜很薄(一般小于 0.5μm)，所以是透明的，其透过率在可见和近红外波段 (0.4～2.5μm) 稍有降低. 但是在红外波段 (2.5～25μm) 的反射率却比普通玻璃高得多. 所得薄膜的反射率和透过率随波长的变化曲线见图 3. 从图 3 可见：在可见光范围薄膜的平均透过率为70～80%

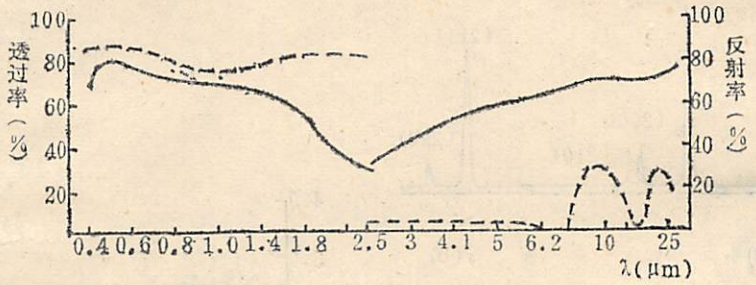


图 3 光谱透过率和反射率曲线

—SnO_2 薄膜，-----玻璃

在红外波长范围，薄膜的反射率可达 60～70%，可见 SnO_2 薄膜有明显的光谱选择辐射性能，因而玻璃上喷涂一层 SnO_2 薄膜后可减少辐射热损，从而提高这种材料的保温性能.

4 结论

本文系统地研究了 SnO_2 薄膜的电学和光学性质及结构特征. 研究结果可归纳如下：SnO_2 薄膜是一种掺杂的 N 型半导体，为四方晶体结构. 通过用四氯化锡水解法成膜的工艺实验，得到了在玻璃上喷涂 SnO_2 膜的条件，即玻璃加热到 600～650℃ 喷涂，用 0.30mol% NH_4F 掺杂，是适当的，膜的厚度为 0.3～0.4μm，薄层电阻为 10～25Ω/□ 的薄膜不仅电学性能好，光谱选择性也好.

参 考 文 献

[1] Karlsson, B. et al., *Thin Solid Film*, 86 (1981), 91--98.

[2] Gracin, D. and Desnica, U., *Energy Research*, 8 (1983), 53—60.

[3] Pommier, R., Gril, C., Marucchi, J., *Thin Solid Film*, 77 (1981), 91—97.

[4] Lou J. C. and Lin M. S., *Thin Solid Film*, 110 (1983), 21—28.

[5] Mammana, A. P. and Braga, E. S., *Thin Solid Film*, 85 (1981), 355—359.

Research on Technological Process and Characteristic of SnO_2 Transparence Film

Chen Shuyu

(Centre of Structure Analysis)

Ge Xinshi Sun Xiaolan Wang Quijuan

(Dept. of Engineering Thermophysics)

中国科学技术大学学报 JCUST 87022

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGH

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

二阶线性常微分方程 $y''+A(t)y=0$ 解的有界性推广

蒋 璧

(大连海运学院)

本文讨论了二阶线性常微分方程 $y''+A(t)y=0$ 解的有界性，并改进了 Sansone 的结果[1].

定义 1 设 $A(t)$ 在 $t\in[a,n]$ 上连续，又设 $m_n=\min\{A(x)\}$，$M_n=\max\{A(x)\}$，今于 $[m_n,M_n]$ 上定义如下的函数 $N_n(y)$. 设 $m_n\leqslant y\leqslant M_n$，$N_n,(y)$ 为方程 $A(t)=y$ 在 $t\in[a,n]$ 上根的个数，如果对于某个 y，根有无限多个，则定义 $N_n(y)=+\infty$，且称 $N_n(y)$ 为 $A(t)$ 在 $[a,n]$ 上的巴拿哈指示函数.

定义 2 定义在 $[a,\infty)$ 上的巴拿哈指示函数 $N(y)=\lim\limits_{n\to\infty}N_n(y)$，$m\leqslant y\leqslant M$，其中：$M=\lim\limits_{n\to\infty}M_n$，$m=\lim\limits_{n\to\infty}m_n$.

引理 巴拿哈指示函数满足关系式

$$\bigvee_a^\infty A(t)=\int_m^M N(y)dy$$

定理 1 今有 $y''+A(t)y=0$，其中：$A(t)=f(t)+g(t)$. 设：1) $f(t)\in C$，$f(t)$ 单调趋于 $+\infty$；2) $g(t)\geqslant a^2>0$；3) $g(\cdot)$ 在 $[0,\infty]$ 上是有界变差的，则 $y''+[f(t)+g(t)]y=0$ 之解有界.

1986 年 9 月 15 日收到.

证 由于$A(t)\geqslant a^2>0$，故

$$y''+[f(t)+g(t)]y=0 \tag{1}$$

之解振荡，所以存在点列$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$，其中：$t_0<t_2<t_4<\cdots$为零点，$t_1<t_3<t_5<\cdots$为极值点（其中：$t_1$，$t_5$，$t_9\cdots$为极大点，$t_3,t_7,t_{11}\cdots$为极小点）．由中值定理，有

$$\frac{y'^2(t_1)-y'^2(t_0)}{y^2(t_1)-y^2(t_0)}=\frac{\partial y'(\xi_0)y''(\xi_0)}{\partial y'(\xi_0)y(\xi_0)}=\frac{y''(\xi_0)}{y(\xi_0)}=-A(\xi_0),$$

$$t_0<\xi_0<t_1.$$

由于$y'(t_1)=0$，$y(t_0)=0$，所以有$y'^2(t_0)=y^2(t_1)A(\xi_0)$．继续讨论区间$[t_3,t_2]$，$[t_2,t_3]\cdots$上的情形，则有$y'(t_2)=A(\eta_0)y^2(t_1)$，于是得到

$$y'^2(t_{2n})=y'^2(t_0)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{A(\eta_k)}{A(\xi_k)}$$

$$t_k<\xi_k<t_{k+1}<\eta_k<t_{k+2}$$

$$y^2(t_{2n+1})=y^2(t_1)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{A(\eta_k)}{A(\xi_{k+1})} \tag{2}$$

由于$y'(t_{2n+1})=0$，知$y(t_{2n+1})$为y的极值点．为了估计$\lim\limits_{n\to\infty}[\max\limits_{t_{2n}\leqslant t\leqslant t_{2n+1}}y(t)]$，首先要证明$\prod\frac{A(\eta_k)}{A(\xi_{k+1})}\in C$，才能证得$y$之极值所成之序列有界．因$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+P_n)$的收敛，完全决定于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_k$的收敛：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{A(\eta_k)-A(\xi_{k+1})}{A(\xi_{k+1})}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(\eta_k)-f(\xi_{k+1})}{f(\xi_k+1)+g(\xi_k+1)}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{g(\eta_k)-g(\xi_k+1)}{f(\xi_{k+1})+g(\xi_k+1)}=S_n+S'_n$$

$$S_n=\sum\frac{f(\eta_k)-f(\xi_{k+1})}{f(\xi_{k+1})+g(\xi_{k+1})}\leqslant\frac{\sum\frac{f(\eta_k)}{f(\xi_{k+1})}-1}{1+\frac{g}{f(\xi_{k+1})}}$$

$$-\infty<S_n\leqslant 0,$$

$$S'_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|g(\eta_k)-g(\xi_{k+1})|}{f(\xi_{k+1})+g(\xi_{k+1})}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|g(\eta_k)-g(\xi_{k-1})|}{f(t_0)-\tau}$$

由于$f(t)\to\infty$，当$t>t_0$后必有$f(t)>\tau$，不妨设$f(t_0)>\tau$，而$\sum|g(\eta_k)-g(\xi_{k+1})|\leqslant\bigvee\limits_0^{\infty}g(\cdot)<+\infty$，由于$g\in B.V.$，故$S'_n<\infty$，所以式（2）右端之无穷乘积收敛，因而$\lim\limits_{n\to\infty}y(t)$

有界。

定理 2 今有

$$y''+A(t)y=0 \tag{3}$$

当 $t\to\infty$ 时，$A(t)$不单调$\to+\infty$，设 $A(t)\in C$，$A(t)\geqslant a^2>0$，又设

$$\int^{\infty}\left|\frac{A'(t)}{A(t)}\right|\mathrm{d}t<\infty$$

则式（3）之解有界。

证 以 $2y'$ 乘以（3）得 $2y'y''+2A(t)yy'=0$，积分之，得

$$y'^2+A(t)y^2=C+\int^t A'(t)y^2\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}A(t)y^2&\leqslant C+\int^t A'(t)y^2\mathrm{d}t\\&\leqslant|C|+\int^t\left|\frac{A'(t)}{A(t)}\right|A(t)y^2\mathrm{d}t\\&\leqslant|C|\exp\int^t\left|\frac{A'(t)}{A(t)}\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^2&\leqslant\frac{|C|\exp\int^{\infty}\left|\frac{A'(t)}{A(t)}\right|\mathrm{d}t}{A(t)}\\&\leqslant\frac{1}{a^2}|C|\exp\int^{\infty}\left|\frac{A'(t)}{A(t)}\mathrm{d}t\right|<\infty\end{aligned}$$

故 y 有界。

推论 今有

$$y''+A(t)y=0 \tag{4}$$

设 $0<a^2\leqslant A(t)$在$[\alpha,\infty]$上连续可微，且$\int^{\infty}|A'(t)|\mathrm{d}t<\infty$，则式（4）之解有界。

下面讨论 $y''+A(t)y=0$，$\varepsilon<a^2\leqslant A(t)\leqslant b^2$ 解的有界性问题。

定理 3 今有

$$y''+[1+\phi(t)]y=0 \tag{5}$$

当 $t\to\infty$ 时，$\phi(t)\to0$，设 $\phi'(t)$的巴拿哈指示函数$N(y)$是(L)可积的，则式（5）之解有界。

证 由引理知 $\phi'\in B.V.$，所以 $A'(t)=[1+\phi(t)]'=\phi'(t)$，应用 Гусаров 定理[2]，可知式（5）之解 $y(t)$有界。

定理 4 今有

$$y''+[A(t)+B(t,\lambda)]y=0 \tag{6}$$

式中：$t\in[a,\infty)$，$\lambda\in[a,b]$，λ为参数。设：i）$A(t)$为巴拿哈指示函数，且是可积的，$0<m\leqslant A(t)\leqslant M$，$A(t)\in C$；ii）$B(\lambda,t)$为$t$的连续函数，$\lambda\in[a,b]$；iii）$|B(\lambda,t)|<M(t)$；iv）$\int^{\infty}M(t)\mathrm{d}t<\infty$，则式（6）之解有界。

证 考虑方程

$$y''+A(t)y=0 \tag{7}$$

由于 $A(t)\geqslant m>0$，所以式（7）之解振荡．设其零点为 $t_1<t_2<\cdots$，由积分中值定理，有

$$y'^2(t_{2n})=y'^2(t_0)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{A(\eta_k)}{A(\xi_k)} \tag{8}$$

$$y^2(t_{2n+1})=y^2(t_0)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{A(\eta_k)}{A(\xi_{k+1})} \tag{9}$$

式中：$t_k<\xi_k<t_{k+1}<\eta_k<t_{k+2}$，$\prod(1+P_n)\in C$ 的充要条件为 $\sum P_n\in C$．又

$$\sum\frac{A(\eta_k)-A(\xi_k)}{A(\xi_k)}\leqslant\sum\frac{|A(\eta_k)-A(\xi_k)|}{A(\xi_k)}$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\sum|A(\eta_k)-A(\xi_k)|<\infty$$

所以

$$\bigvee_a^{\infty}A=\int_m^M N(y)\,\mathrm{d}y<\infty$$

$$A(t)\in B.V.$$

同理

$$\frac{\sum A(\eta_k)-A(\xi_{k+1})}{A(\xi_{k+1})}\leqslant\frac{1}{m}\sum|A(\eta_k)-A(\xi_{k+1})|<\infty$$

所以式（8），（9）之右端的无穷乘积是收敛的，因而 $\lim\limits_{t\to\infty}y'(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)$ 是有界的．

再证 $\int^{\infty}B(\lambda,t)\,\mathrm{d}t<\infty$，$B(\lambda,t)\in C$，$\int_a^T B(\lambda,t)\,\mathrm{d}t$ 是存在的，其中 T 可任意大．由条件 iv）知当 T 足够大时，

$$\int_T^{\infty}M(t)\,\mathrm{d}t<\varepsilon$$

$$\int_T^{T'}|B(t,\lambda)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_T^{T'}M(t)\,\mathrm{d}t<\int_T^{\infty}M(t)\,\mathrm{d}t<\varepsilon$$

由 Bellman 定理[3]，知 y,y' 有界，且 $\int^{\infty}|B(\lambda,t)|\,\mathrm{d}t<\infty$，则式（6）之解有界．

定理 5 今有

$$y''+P(t)y=0 \tag{10}$$

设 i）$0<a^2\leqslant P(t)\leqslant b^2$，$a>0$；ii）$P'(t)\in C$，且 $P'(t)$ 的巴拿哈指示函数 $\int_m^M N(y)\,\mathrm{d}y<\infty$ 是 (L) 可积的，则式（10）之解有界．

证

$$\bigvee_a^{\infty}P'=\int_m^M N(y)\,\mathrm{d}y<\infty,\quad P'\in B.V.$$

利用 Гусаров 定理便可得结果．

下面给出更一般的定理.

定理 6 今有

$$y'' + q(t)y = 0 \tag{11}$$

设 $q(t) \in C$，则式 (11) 之解存在，且设：i) $0 < a^2 \leqslant P(t) \leqslant b^2$；ii) $P'(t) \in C$，且 $\int_m^M N(y) < \infty$；iii) $\int_x^\infty |q(t) - P(t)| dt < \infty$，则式 (11) 之解有界.

证 由前面所证，知 $y'' + P(t)y = 0$ 的解 $y(t)$ 也有界，且由 Гусаров 定理在证明过程中已证得 y' 也有界. 式 (11) 即

$$y'' + [P(t) + q(t) - P(t)]y = 0 \tag{12}$$

由条件iii)，再应用 Bellman 定理就可证得 y 有界.

参 考 文 献

[1] Sansone, G., Обыкновенные Дифференц Иальные Уравнения, 2(1954), 24-25.

[2] Гусаров, Л. А., ДАН СССР, 68(1949), 217-220.

[3] Bullman, R., *Stability Theory of Differential Equations*, 1953, New York, Toronto, 131-136.

On Boundedness of Solutions for Differential Equation $y'' + A(t)y = 0$

Jiang Bi

(Dalian Marine College)

中国科学技术大学学报 JCUST 87023

增 刊

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

SUPPLEMENT

《中国科学技术大学学报》编辑部 1987年12月

整数规划的一种新解法

—平行目标函数平面族上的局部枚举法

马 琛

(北京经济学院)

1 引言

在整数规划及混合整数规划的求解方法中，最常见的是分枝定界法(Branch and Bound Method) 和 Gomory 割平面法。本文将提出一种全新的解法——平行目标函数平面族上的局部枚举法。

2 准备工作

下面介绍几条显见的引理：

引理 1 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是整数，且不全为 0，又若 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)=1$，$k$ 也是整数，则超平面族：

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

经过 E_n 中的任何一个整数格点。这里 E_n 是 n 维欧氏空间。

引理 2 $c_1, c_2, \cdots c_n$ 是整数，且不全为 0，又若 $(c_1, c_2, \cdots c_n)=1$，k 为任一整数，则在区域 N_k 中不包含 E_n 中的任何整数格点。

$$N_k=\{\xi=\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) \mid k<c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_n\xi_n<k+1\}$$

1987年5月16日收到。

引理 3 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2\cdots c_n)\neq\boldsymbol{O}$，$M$ 为任一 E 数，$k_0=\left\{\boldsymbol{X}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant M,x_j\geqslant 0\ \ j=1,2\cdots n\right.\right\}$ $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 一定有一个整数 g，使得对任何 $\boldsymbol{X}\in K_0$ 有

$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{X})>g$，也就是 $\{\boldsymbol{X}\mid(\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{X})\leqslant g\}\cap K_0=\phi$

证 令 $\xi_0=\boldsymbol{O}$，$\xi_i=(0,0,\cdots 0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 } i \text{ 位}}}{M},0,\cdots 0)$

$\min\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\{(\boldsymbol{C},\xi_i)\}=Q$，取 $g=[Q]-1$ 即为所求。

引理 4 $c_1,c_2\cdots c_n$ 不全为 0，$D=\{\boldsymbol{X}\mid A\boldsymbol{X}\leqslant b,\boldsymbol{X}\geqslant 0\}$ 为一有界区域，则必有一整数 g，使得

$$\{\boldsymbol{X}\mid(\boldsymbol{C},\boldsymbol{X})\leqslant g\}\cap D=\phi$$

证 取足够大的 M，使 $K_0\supset D$，由引理 3 显见。

引理 5 m 为一不为 0 的正数，则下述两个线性规划问题有相同的最优解集

$$\max z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\qquad A\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X}\geqslant 0$$

$$\max w=\sum_{i=1}^{n}mc_ix_i\qquad A\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X}\geqslant 0$$

对于整数规划，上述结论也同样成立。

3 简化了的整数规划问题

我们先来研究简化了的整数规划问题：

$$\begin{aligned}
&\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n\\
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n\leqslant b_n\\
&x_i\geqslant 0,\ x_i\text{ 是整数 }(i=1,2\cdots n)
\end{aligned}\qquad(1)_*$$

假定 $c_1,c_2,\cdots c_n$ 都是整数，（当然不能全为 0），又假定 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)=1$，同时又假定（1）所对应的线性规划问题有唯一的最优解 $\boldsymbol{X}^*$，而且 $\boldsymbol{X}^*$ 就是方程组：$(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{X})=b_i$，$i=1,2\cdots n$ 之解。这里，$\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots a_{in})$。此外还假定区域，$\{X\mid(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{X})\leqslant b_i$，$(i=1,2\cdots n)$，$\boldsymbol{X}\geqslant 0\}$ 是一个有界区域。上述问题就称为简化了的整数规划问题。$\boldsymbol{X}^*$ 不是整数格点，下面我们来讨论整数规划问题（1）的解法。

计算 $(\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}^*)\equiv d$，此时 d 可能有下述两种情况：

（i） $d=[d]$

（ii） $d>[d]$

---

* 在（1）中的某个约集，例如第 i 个约束：$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$ 很可能是 $-x_k\leqslant 0$，即与第 k 个非负性条件相重合。这一点并不排除在外。

$$令\ k=\begin{cases}[d]-1 & 当\ d=[d]\ 时\\ [d] & 当\ d>[d]\ 时\end{cases}$$

基本定理 令 $G_l=\{\boldsymbol{X}\mid(\boldsymbol{C},\boldsymbol{X})=k-l,\boldsymbol{AX}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant 0\}$，$l$ 为整数，l 依次取值为0,1,…直到 $l=k-g$（引理4中的 g） 先研究 G_0 中的整数格点集，记为 $[G_0]$。若 $G_0\neq\phi$，则 $[G_0]$ 就是整数规划（1）的最优解集。若 $[G_0]=\phi$，转而研究 $[G_1]$，若 $[G_1]\neq\phi$，则 $[G_1]$ 是整数规划（1）的最优解集。若 $[G_1]=\phi$，继而研究 $[G_2]$，依次类推，若 $[G_g]=\phi$，则该整数规划问题无解。

下面依照上述基本定理来讨论求解整数规划问题（1）的具体措施，引进下述符号：

$$H_l=\{\boldsymbol{X}\mid(\boldsymbol{C},\boldsymbol{X})=k-l\quad \boldsymbol{AX}\leqslant b\}$$

令 $\boldsymbol{A}_i^{(l)}=(\sigma_{i1}^{(l)},\ \sigma_{i2}^{(l)},\ \cdots,\sigma_{in}^{(l)})$ 为下述方程组之解：

$$\begin{aligned}
&c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n=k-l\\
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{i-1\,i}x_1+a_{i-1,2}x_2+\cdots\cdots+a_{i-1\,n}x_n=b_{i-1}\\
&a_{n+1\,1}x_1+a_{i+1\,2}x_2+\cdots\cdots+a_{i+1\,n}x_n=b_{i+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n
\end{aligned}$$

这里 $i=1,2,\cdots\cdots n$，此时，显见有：

$$H_l=\left\{\boldsymbol{X}\,\middle|\,\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iA_i^{(l)}\quad 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\right\}$$

再令

$$\tilde{h}_j^{(l)}=\min\{\sigma_{1j}^{(l)},\sigma_{2j}^{(l)},\cdots,\sigma_{nj}^{(l)}\}$$
$$h_j^{(l)}=\max\{0,\tilde{h}_j^{l}\}$$
$$g_j^{(l)}=\max\{\sigma_{1j}^{(l)},\sigma_{2j}^{(l)},\cdots,\sigma_{nj}^{(l)}\}$$

又令 $K_l=[h_1^{(l)},g_1^{(l)}]\times[h_2^{(l)},g_2^{(l)}]\times\cdots\times[h_2^{(l)},g_n^{(l)}]$，$K_l$ 构成了 E_n 中的一个 n 维长方体，当然不排除 $K_l=\phi$。K_l 中的整数格点集记为 $[K_l]$，

当 $[K_l]$ 非定时，$[K_l]$ 中的点可以按下述方式分成三类：

$$\mathrm{I}_l=\{\xi\mid\xi\in[K_l],\ (\boldsymbol{C},\xi)>K-l\}$$
$$\mathrm{II}_l=\{\xi\mid\xi\in[K_l],\ (\boldsymbol{C},\xi)=K-l\}$$
$$\mathrm{III}_l=\{\xi\mid\xi\in[K_l],\ (\boldsymbol{C},\xi)<K-l\}$$

其中 II_l 是我们重点观察的对象，若 $\mathrm{II}_l\cap H_l\neq\phi$，则对任何一个 $\xi\in\mathrm{II}_l\cap H_l$ 都是整数规划问题（1）的最优解，而集合 $\mathrm{II}_l\cap H_l$ 就是（1）的最优解集。

例1

$$\begin{aligned}
&\max z=3x_1+2x_2\\
&2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\
&4x_1+x_2\leqslant 16.5\\
&x_1,x_2\geqslant 0,x_1,x_2\text{为整数。}
\end{aligned}$$

解 相应的线性规划问题的最优解$X^*=(3.5,2.5)^\tau$，X^*是方程组$\begin{cases}2x_1+3x_2=14.5\\4x_1+x_2=16.5\end{cases}$之解，且$(c_1,c_2=(3,2)=1$，此问题是一个简化了的整数规划问题，$(C,X^*)=15.5$，$k=15$，

由方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2=15-l\\2x_1+3x_2=14.5\end{cases}\text{求出 } A_1^{(l)}=\left(3.2-\frac{3}{5}l,2.7+\frac{2}{5}l\right)^\tau$$

由方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2=15-l\\4x_1+x_2=16.5\end{cases}\text{求出 } A_2^{(l)}=\left(3.6+\frac{1}{5}l,\ 2.1-\frac{4}{5}l\right)^\tau$$

$$H_l=\{X\mid X=\lambda_1A_1^{(l)}+\lambda_2A_2^{(l)},\lambda_1,\lambda_2\geqslant0,\ \lambda_1+\lambda_2=1\}$$

当 $l=0$ 时，$A_1^{(0)}=(3.2,2.7)^\tau$，$A_2^{(0)}=(3.6,2.1)^\tau$

$$K_0=[3.2,3.6]\times[2.1,2.7]\quad[K_0]=\phi$$

$l=1$：　$A_1^{(1)}=(2.6,3.1)^\tau$，$A_2^{(1)}=(3.8,1.3)^\tau$，$K_1=[2.6,3.8]\times[1.3,3.1]$，$[K_1]=\{(3,2),(3,3)\}$，$\mathrm{II}_1=\phi$.

$l=2$：　$A_1^{(2)}=(2.0,3.5)^\tau$，$A_2^{(2)}=(4,0.5)^\tau$，$K_2=[2,4]\times[0.5,3.5]$，$[K_2]=\{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$，$\mathrm{II}_2=\{(3,2)\}$，且$\xi^*=(3,2)^\tau\in H_2\cap\mathrm{II}_2$.

所以 ξ^* 就是该整数规划问题的最优解.

4 一般整数规划问题的研究

一般的整数规划问题为

$$\left.\begin{array}{l}\max z=c_1x_1+c_2x_2\cdots\cdots+c_nx_n\\a_{11}x_1+a_nx_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m\end{array}\right\}$$

其中　　$x_i\geqslant0$，x_i 为整数，$i=1,2\cdots n$.

从中可以分离出一个简化了的整数规划问题，其步骤如下：

4.1 对目标函数的处理

1° 若 $c_1,c_2\cdots\cdots c_n$ 中有无理数，将其有理化，用有理数来近似，所以不失一般性，可以假定 $c_1,c_2\cdots\cdots c_n$ 是有理数.

2° 用一个大整数 $M>0$，乘 c_i，使 Mc_i，$i=1,2\cdots\cdots n$ 都是整数.

3° 令 $\tilde{c}_i=\dfrac{Mc_i}{q}$ 这里 $q=(Mc_1,Mc_2,\cdots\cdots,Mc_n)$，此时$(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\ \cdots,c_n)=1$. 当然 $\tilde{c}_1$，$\tilde{c}_2,\cdots\tilde{c}_n$ 是整数.

用目标函数 $\max\tilde{z}=\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{c}_ix_i$ 取代 $\max z=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ix_i$.

4.2 对约束条件的处理

一般整数规划问题（2）所对应的线性规划问题：

$$\left.\begin{array}{l}\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n\\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m\end{array}\right\}\quad(3)$$

其中 $x_i\geqslant 0\quad i=1,2\cdots\cdots n$

(3)有最优解 $\boldsymbol{X}^*$. $\boldsymbol{X}^*$ 是方程组

$$\begin{array}{l}\tilde{a}_{11}x_1+\tilde{a}_{12}x_2+\cdots\cdots+\tilde{a}_{1n}x_n=\tilde{b}_1\\ \tilde{a}_{21}x_1+\tilde{a}_{22}x_2+\cdots\cdots+\tilde{a}_{2n}x_n=\tilde{b}_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tilde{a}_{n1}x_1+\tilde{a}_{n2}x_2+\cdots\cdots\tilde{a}_{nn}x_n=\tilde{b}_n\end{array}$$

之解，简化为$(\tilde{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{X})=\tilde{b}_i$，$\tilde{\boldsymbol{a}}_i=(\tilde{a}_{i1},\tilde{a}_{i2}\cdots\cdots\tilde{a}_{in})$，$i=1,2\cdots n$. 这里$(\tilde{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{X})=\tilde{b}_i$可以是（3）中的约束条件，也可能是（3）中的非负性条件，于是从一般整数规划问题（2）中就分离出了一个简化了的整数规划问题

$$\left.\begin{array}{l}\max\tilde{z}=\tilde{c}_1x_1+\tilde{c}_2x_2+\cdots\cdots+\tilde{c}_nx_n\\ \tilde{a}_{11}x_1+\tilde{a}_{12}x_2+\cdots\cdots+\tilde{a}_{1n}x_n\leqslant\tilde{b}_1\\ \tilde{a}_{21}x_1+\tilde{a}_{22}x_2+\cdots\cdots+\tilde{a}_{2n}x_n\leqslant\tilde{b}_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tilde{a}_{n1}x_1+\tilde{a}_{n2}x_2+\cdots\cdots+\tilde{a}_{nn}x_n\leqslant\tilde{b}_n\end{array}\right\}\quad(4)$$

$x_i\geqslant 0$，x_i 为整数，$i=1,2\cdots n$.

5 求解一般整数规划的方法及计算步骤

第一步：计算一般整数规划问题（2）所对应的线性规划问题（3），（3）有最优解为 $\boldsymbol{X}^*$（唯一解），若 $\boldsymbol{X}^*$ 是整数格点，则 $\boldsymbol{X}^*$ 就是一般整数规划问题（2）的最优解，停止. 若 $\boldsymbol{X}^*$ 不是整数格点，则由（2）分离出一个简化了的整数规划问题（4），转入第二步.

第二步：计算出$(\tilde{c}\boldsymbol{X}^*)=d$，这里$\tilde{c}=(\tilde{c}_1\tilde{c}_2,\cdots\cdots\tilde{c}_n)$.

$$令\ k=\begin{cases}[d]-1 & 当\ d=[d]\ 时\\ [d] & 当\ d>[d]\ 时\end{cases}$$

若 $k>g$（g 为引理 4 中的g）则转向第三步. 若 $k=g$，停止，此时整数规划（2）无解.

第三步：求解 n 个 n 元一次方程组：

$$\begin{cases}(\tilde{c},\boldsymbol{X})=k\\ (\tilde{\boldsymbol{a}}_j,\boldsymbol{X})=\tilde{b}_j\quad j=1,2,\cdots i-1,i+1,\cdots n\end{cases}$$

这里$\tilde{c}=(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\cdots,\tilde{c}_n)$　　$\tilde{\boldsymbol{a}}_j=(\tilde{a}_{j1},\tilde{a}_{j2}\cdots\tilde{a}_{jn})$

方程组之解 $\boldsymbol{A}_i\equiv(\sigma_{i1},\sigma_{i2},\cdots,\sigma_{in})$.

转入第四步.

第四步：求出 h_j 及 g_j.

令 $\tilde{h}_j=\min\{\sigma_{1j},\sigma_{2j},\cdots\cdots\sigma_{nj}\}$

$h_j=\max\{0,\tilde{h}_j\}$

$g_j=\max\{\sigma_{1j},\sigma_{2j},\cdots\cdots,\sigma_{nj}\}$

求 n 维长方体 $K=[h,g_1]\times[h_2,g_2]\times\cdots\cdots\times[h_n,g_n]$ 中的整数格点集 $[K]$。

若 $[K]=\phi$，则令 $k=k-1$，转入第三步。

若 $[K]\neq\phi$，则转入第五步。

第五步：在 $[K]$ 中求出Ⅱ类点集，若 $\mathrm{II}=\phi$，则令 $k=k-1$，转入第三步。若 $\mathrm{II}\neq\phi$ 则转入第六步。

第六步：求集合 $\mathrm{II}\cap H\cap D=\mathrm{II}\cap D$

这里 $H=\left\{X\middle|X=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\quad \lambda_i\geqslant 0\quad i=1,2\cdots n\right\}$

$D=\{X\mid AX\leqslant b,X\geqslant 0\}=\{X\mid(a_i,X)\leqslant b_i,\ i=1,2\cdots m,X\geqslant 0\}$

若 $\mathrm{II}\cap H\cap D=\phi$，则令 $k=k-1$ 转入第三步。

若 $\mathrm{II}\cap H\cap D\neq\phi$，则集合 $\mathrm{II}\cap H\cap D$ 就是一般整数规划问题（2）的最优解集，停止。

例 2 $\max z=30x_1-10x_2$

$3x_1-2x_2\leqslant 3$

$2x_1+x_2\leqslant 5$

$-5x_1-4x_2\leqslant -10$

$x_1,x_2\geqslant 0$，x_1,x_2 为整数。

解 其相应的线性规划的最优解 $X^*=\left(\frac{13}{7},\ \frac{9}{7}\right)^\tau$ 是方程组 $\begin{cases}3x_1-2x_2=3\\2x_1+x_2=5\end{cases}$ 之解。相应的简化了的整数规划为

$\max\tilde{z}=3x_1-x_2$

$3x_1-2x_2\leqslant 3$

$2x_1+x_2\leqslant 5$

$x_1,x_2\geqslant 0$，x_1,x_2 为整数

转入对整数规划问题的求解。

$(\tilde{c},X^*)=4\frac{2}{7}\qquad \tilde{c}=(3,-1)\quad k=4$

由 $\begin{cases}3x_1-x_2=4-l\\3x_1-2x_2=3\end{cases}$ 求出 $A_1^{(l)}=\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}l,1-l\right)^\tau$

由 $\begin{cases}3x_1-x_2=4-l\\2x_1+x_2=5\end{cases}$ 求出 $A_2^{(l)}=\left(\frac{9}{5}-\frac{l}{5},\ \frac{7}{5}+\frac{2}{5}l\right)^\tau$

$l=0$：$K_0=[5/3,9/5]\times[1,7/5]$，$[K_0]=\phi$

$l=1$：$K_1=[1,8/5]\times[0,9/5]$，$[K_1]=\{(1,0),\ (1,1)\}$

$\mathrm{II}_1=\{(1,0)\}$，$\mathrm{II}_1\cap H_1=\mathrm{II}_1$，$\mathrm{II}_1\cap H_1\cap D=\phi$

$l=2$：$K_2=[1/3,7/5]\times[0,11/5]$，$[K_2]=\{(1,0),(1,1),(1,2)\}$

$\mathrm{II}_2=\{(1,1)\}$, $\mathrm{II}_2\cap H_2=\mathrm{II}_2$, $\mathrm{II}_2\cap H_2\cap D=\phi$

$l=3$: $K_3=[0,6/5]\times[0,13/5]$, $[K_3]=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$.

$\mathrm{II}_3=\{(1,2)\}$, $\mathrm{II}_3\cap H_3=\mathrm{II}_3$, $\mathrm{II}_3\cap H_3\cap D=\mathrm{II}_3$

所以 $\xi^*=(1,2)^\tau$ 是该整数规划的最优解.

6 比较和对照

分枝定界法每切割一次，由一个线性规划问题，变为二个线性规划问题，同时增加了约束条件，一个较复杂的整数规划问题，要经过若干次切割，一般而言若变量数为 n，则有至少 2^n 个线性规划问题要求解. 工作量很大.

Gomory 割平面法也非容易，割平面要切割很多次，约束每次都增加一个，工作量也很大.

同时必须指出上述二种方法只求出最优解集（若存在且非定）中的一个点.

本文提出的新方法，是在相应线性规划最优解 X^* 附近的与目标函数平面平行的切割面上寻求，一般情况下，要搜索的区域不会很大，而且找到的是最优解集，而不是其中的一个点. 所以具有很大的优点. 同时必须指出，当确信整数规划问题有解时，§5 中计算步骤第二步中的 g 根本不用去寻求，所以本方法有实用价值.

A New-Solution to Integer Programming

——A Local Enumeration on the Family of Planes Parallel to One of the Objective Functiou

Ma Chen

(Beijing College of Economics)

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
(Supplement)
Vol.17 Sum No. 57 1987

Hefei, Anhui
The People'e Republic of China

中国科学技术大学学报
第 17 卷
（增 刊） （总第 57 期）

编 辑 出 版：《中国科学技术大学学报》编辑部
（安徽省合肥市金寨路 24 号）
印 刷：中 国 科 学 技 术 大 学 印 刷 厂

安徽省报刊登记证 055 1987年12月出版