

基于 DEA 的并联生产系统效率评价与资源分配

柴磊, 赵定涛

(中国科学技术大学管理学院, 安徽合肥 230026)

摘要: 为研究并联生产系统的效率评价与资源分配问题, 基于 DEA 模型测算了银行的服务部门和销售部门的效率, 并探索了传统的含有共享资源的 DEA 并联生产系统中分配系数的分配原理, 满足总体效率最大化的机制, 这是一种 DEA 方法对共享资源在并行生产系统间分配方式的透析与解释. 结果表明: 一、当最大化总体效率时, 总体的效率值是最优分配系数下两个子单元效率值的凸组合; 二、当最大化总体的效率时, 效率得分与最大化的总体效率得分相等的那个子单元, 它的效率恰好达到了自身的最大化效率. 此时 DEA 有效率的子单元分得了共享资源的全部, DEA 无效率的子单元一无所有.

关键词: 数据包络分析(DEA); 并联生产系统; 效率; 共享资源; 资源分配系数(RAP); 线性化

中图分类号: C931 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.11.009

引用格式: 柴磊, 赵定涛. 基于 DEA 的并联生产系统效率评价与资源分配[J]. 中国科学技术大学学报, 2016, 46(11):939-945.

CHAI Lei, ZHAO Dingtao. Efficiency evaluation and methods of resource allocation of parallel production system based on DEA[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016, 46(11):939-945.

Efficiency evaluation and methods of resource allocation of parallel production system based on DEA

CHAI Lei, ZHAO Dingtao

(School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: To study the efficiency evaluation and resource allocation of parallel production system, the efficiency of service departments was calculated and the principle of allocation about shared resources in DEA parallel system, or the mechanism satisfying the maximization of overall efficiency, was explored. This is an indepth analysis and explanation of how to allocate shared resources in parallel production system with the methods of DEA. The results indicate that; firstly, when maximizing overall efficiency, the overall efficiency score is a convex combination of efficiency scores of two sub units under the optimal allocation coefficient; secondly, when maximizing overall efficiency, the sub unit whose efficiency score is equal to the overall efficiency reaches its own maximum efficiency. At this time, the efficient sub unit by DEA is allocated all of the shared resources, while the inefficient one gets nothing.

Key words: data envelopment analysis (DEA); parallel production system; efficiency; shared resource; resource allocation parameters (RAP); linearize

收稿日期:2015-10-25;修回日期:2016-04-10

基金项目:国家自然科学基金(71522013)资助.

作者简介:柴磊,男,1991年生,硕士.研究方向:金融工程. E-mail: cl2009gy@mail.ustc.edu.cn

通讯作者:赵定涛,教授. E-mail: box@ustc.edu.cn

0 引言

数据包络分析 (data envelopment analysis, DEA) 是评价存在多个投入和多个产出的同质决策单元 (decision making units, DMUs) 效率值的一种有效方法, 它是一种线性规划方法. DEA 是目前构造最好的非参数效率度量方法, 它在管理科学中得到了大量的应用, 而且它本身也在不断发展.

任何制造和服务系统的运作目的都是以最小的成本代价获取最多的优质产品和服务, 提高各类系统的生产和运作性能, 需要加强对这些系统效率评价的研究. 现代制造和服务系统至少具有两大共性: 一是复杂的内部结构, 二是涉及众多的投入要素和产出要素. 因此, 效率评价必须依赖多属性决策工具. 在众多的多属性决策工具中, DEA 已经得到了普遍认可与广泛使用. 沿着 Farrell^[1] 提出的运用前沿生产函数测量技术效率的思路, Charnes 等于 1978 年提出了 CCR 模型, 这是第一个 DEA 模型^[2]. 自此以后, 作为一种评价决策单元之间相对效率的数学规划方法, DEA 得到了长足发展, 逐渐成为运筹学、管理科学、系统科学交叉研究的一个新领域. 近年来, 研究者开始关注具有复杂内部结构的生产系统的技术效率评价问题, 他们分别从并联结构生产过程与串联结构生产过程两方面展开了多项研究, 前一类代表性工作有文献^[3-6], 后一类代表性工作有文献^[7-10]. 然而, 现有的关于存在共享资源的并联结构生产系统的研究, 仅仅关注整体效率的评估, 却很少对评价模型中的资源分配系数 (resource allocation parameters, RAP) 做进一步地分析和解释.

1 并联生产系统的效率评价与资源分配

1.1 相关文献回顾

国内外很多学者都研究过基于 DEA 模型的资源分配问题. Golany 建立了多目标规划来设定产出目标^[11]. Athanassopoulos 分别利用 GoDEA 模型将资源和目标配置放在一个框架下研究并研究资源分配中的效率、效果和公平问题^[12-13]. Golany 等利用 DEA 模型来研究效率、效果和公平三者之间的替代关系^[14]. Beasley, Korhonen 等也使用 DEA 进行资源分配研究^[15-16], 其中, DEA 效率被用作唯一

的准则进行资源分配. 也有学者研究 DEA 模型分配资源的其他方面, 如 Pachkova 分析了资源分配的转移成本问题, 利用价格矩阵来建模从而达到最小化资源重新分配的成本问题^[17]. 李晓亚等研究了额外资源分配的算法^[18].

目前对于并联系统 DEA 效率评价的研究还比较少. 文献^[19]是第一篇对此展开研究的论文, 该文提出一种 YMK 模型, 将并联系统的整体效率定义为 YMK 效率, 并证明了 YMK 效率与子系统效率的关系. 文献^[4]依据规模收益假设、组内合作假设与组间合作假设, 提出了 3 种并联系统效率评价的 DEA 模型. 文献^[20]将并联系统整体效率分解为子系统效率的加权之和的形式. 这 3 篇文献均未探讨并联系统的前沿生产能力, 所提出的各种效率评价模型不是由 Farrell 技术效率测量公式自然延伸得到.

1.2 并联生产系统描述

考虑 n 个决策单元 (DMUs), 在图 1 描述的生产过程中, 每个决策单元 $DMU_j (j=1, \dots, n)$ 由两个子生产单元 (sub-decision making units, SDMUs) 组成. 假定决策单元的某些投入是 SDMU1 和 SDMU2 共享的. 除了共享资源之外, 其他的投入、产出是每个子单元特有的. 图 1 中的变量定义如下: $X_1 = (x_{1j}^1, \dots, x_{mj}^1)$ 表示 DMU_j 的第 1 个子单元特有的 m 种投入; $X_2 = (x_{1j}^2, \dots, x_{hj}^2)$ 表示 DMU_j 的第 2 个子单元特有的 h 种投入; $X_s = (x_{1j}^s, \dots, x_{lj}^s)$ 表示被 DMU_j 的两个子单元共享的 l 种共享投入; $Y_1 = (y_{1j}^1, \dots, y_{tj}^1)$ 表示 DMU_j 的第 1 个子单元的 t 种产出; $Y_2 = (y_{1j}^2, \dots, y_{sj}^2)$ 表示 DMU_j 的第 2 个子单元的 s 种产出.

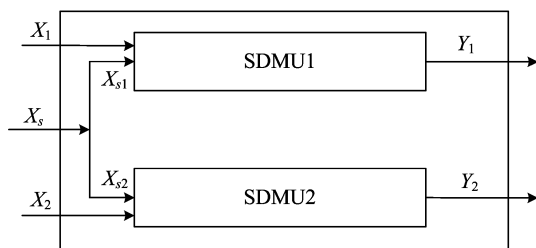


图 1 含有两个子系统的并联结构生产系统

Fig. 1 A parallel product system with two subsystem

1.3 并联结构 DEA 模型

通过引入资源分配系数 (RAP) $\beta_i (i=1, \dots, l)$, Beasley^[21] 构造了如下模型, 被称为 BMP 模型:

$$\begin{aligned}
 & \max \frac{\sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{ro}^1 + \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{ro}^2}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{io}^1 + \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{io}^2 + \sum_{i=1}^l \nu_i^s x_{io}^s} \\
 & \text{s. t. } \frac{\sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{rj}^1}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 + \sum_{i=1}^l \beta_i \nu_i^s x_{ij}^s} \leq 1, \\
 & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{rj}^2}{\sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{ij}^2 + \sum_{i=1}^l (1-\beta_i) \nu_i^s x_{ij}^s} \leq 1, \\
 & j = 1, \dots, n, \\
 & \beta_i \in [LU_i, UB_i], \nu_i^1, \nu_i^2, \nu_i^s, \mu_r^1, \mu_r^2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Cook 等^[22]构造了如下模型,称为 CMP 模型:

$$\begin{aligned}
 & \max \frac{\sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{ro}^1 + \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{ro}^2}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{io}^1 + \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{io}^2 + \sum_{i=1}^l \beta_i \nu_i^s x_{io}^s + \sum_{i=1}^l (1-\beta_i) \nu_i^s x_{io}^s} \\
 & \text{s. t. } \frac{\sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{rj}^1}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 + \sum_{i=1}^l \beta_i \nu_i^s x_{ij}^s} \leq 1, \\
 & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{rj}^2}{\sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{ij}^2 + \sum_{i=1}^l (1-\beta_i) \nu_i^s x_{ij}^s} \leq 1, \\
 & j = 1, \dots, n, \\
 & \beta_i \in [LU_i, UB_i], \nu_i^1, \nu_i^2, \nu_i^s, \mu_r^1, \mu_r^2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

这两个模型之间的区别在于共同权重准则 (common weighting scheme, CWS) 和独立权重准则 (independent weighting scheme, IWS). BMP 对两个子单元用同样的权重 (ν_i^s) 加总 1 种共享资源, 而 CMP 用不同的权重 (ν_i^s, ν_i^s) 分别为 SDMU1 和 SDMU2 加总共享资源.

由于 β_i 是一个决策变量, 这个规划问题很显然 是非线性的. 文献[22]作变量代换 $\bar{\nu}_i^s = \beta_i \nu_i^s, \bar{\nu}_i^s = (1-\beta_i) \nu_i^s$, 因此 CMP 模型可以等价转化为如下形式:

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{ro}^1 + \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{ro}^2 \\
 & \text{s. t. } \sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{rj}^1 - \sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 - \sum_{i=1}^l \bar{\nu}_i^s x_{ij}^s \leq 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{rj}^2 - \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^l \bar{\nu}_i^s x_{ij}^s \leq 0, \\
 & \sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{io}^1 + \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{io}^2 + \sum_{i=1}^l \bar{\nu}_i^s x_{io}^s + \sum_{i=1}^l \bar{\nu}_i^s x_{io}^s = 1, \\
 & j = 1, \dots, n, 0 \leq \beta_i \leq 1, \\
 & \nu_i^1, \nu_i^2, \mu_r^1, \mu_r^2 \geq \delta, \\
 & \bar{\nu}_i^s \geq \beta_i \delta, \bar{\nu}_i^s \geq (1-\beta_i) \delta \tag{3}
 \end{aligned}$$

式(3)是一个线性规划问题, 我们可以通过解式(3) 立即产生一个与式(2)对应的解.

同理, 对 BMP 模型, 我们采用同样的线性化处理 方法, 令 $\beta_i \nu_i^s = \alpha_i^s$, 得到线性模型:

$$\begin{aligned}
 & \theta_o^* = \max \sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{ro}^1 + \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{ro}^2 \\
 & \text{s. t. } \sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{rj}^1 - \sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 - \sum_{i=1}^l \alpha_i^s x_{ij}^s \leq 0, \\
 & \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{rj}^2 - \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^l (\nu_i^s - \alpha_i^s) x_{ij}^s \leq 0, \\
 & \sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{io}^1 + \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{io}^2 + \sum_{i=1}^l \nu_i^s x_{io}^s = 1 \\
 & j = 1, \dots, n, LU_i \nu_i^s \leq \alpha_i^s \leq UB_i \nu_i^s, \\
 & \nu_i^1, \nu_i^2, \nu_i^s, \alpha_i^s, \mu_r^1, \mu_r^2 \geq 0 \tag{4}
 \end{aligned}$$

由于 $\beta_i = \alpha_i^s / \nu_i^s$, 我们可以通过求解模型(4)计算 出对应于每个决策单元的资源分配系数 β_i .

1.4 并联生产系统的相对效率评价及效率分解

模型(3)和(4)可以用来评价并联生产系统的相 对效率值, 并给出总体效率最大化时共享资源在两 个子系统之间的分配关系. 为简单起见, 我们只考虑 共同权重准则(CWS)下的含有两个子单元的并联 系统的效率评价, 且对资源分配系数(RAP)我们不 做过多的限制, 除了它在 0 和 1 之间, 即 $LU_i = 0, UB_i = 1$.

当总体效率最大化时两个子单元的相对效率值 可以通过模型(5)求得:

$$\begin{aligned}
 & \max \frac{\sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{ro}^1 + \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{ro}^2}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{io}^1 + \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{io}^2 + \sum_{i=1}^l \nu_i^s x_{io}^s} \\
 & \text{s. t. } \frac{\sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{rj}^1}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 + \sum_{i=1}^l \beta_i \nu_i^s x_{ij}^s} \leq 1,
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{rj}^2}{\sum_{i=1}^h v_i^2 x_{ij}^2 + \sum_{i=1}^l (1 - \beta_i) v_i^s x_{ij}^s} \leq 1,$$

$$\theta_o^1 = \frac{\sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{ro}^1}{\sum_{i=1}^m v_i^1 x_{io}^1 + \sum_{i=1}^l \beta_i v_i^s x_{io}^s}$$

$$\theta_o^2 = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{ro}^2}{\sum_{i=1}^h v_i^2 x_{io}^2 + \sum_{i=1}^l (1 - \beta_i) v_i^s x_{io}^s}$$

$$j = 1, \dots, n, \beta_i \in [LU_i, UB_i],$$

$$v_i^1, v_i^2, v_i^s, \mu_r^1, \mu_r^2 \geq 0 \quad (5)$$

本文的实证采用文献[22]中的数据:一个拥有 1 300 个分支行的加拿大银行,原始数据及其说明如表 1,2 所列。

表 1 投入和产出指标

Tab. 1 Indexes of input and output

投入	产出
FSE 服务类职工	MDP 柜台存款
FSA 销售类职工	MTR 转账
FSU 支持类职工	RSP 养老金计划
FOT 其他职工	MOR 抵押账户

表 2 20 个分支行的数据

Tab. 2 Data of 20 bank branches

单元	服务产出		销售产出		投入		共享投入	
	Y_1^1	Y_2^1	Y_1^2	Y_2^2	X_1^1	X_1^2	X_1^s	X_2^s
1	2.873	1.498	3.6	4.2	0.455	0.492	0.17	0.73
2	3.093	1.226	5.9	9.7	0.942	0.661	1.88	1
3	1.857	0.865	3.7	4.9	0.51	0.293	0.47	1.01
4	8.532	3.29	4.8	12.2	1.239	0.916	1.13	0.1
5	4.304	1.777	7.9	16.8	1.015	0.724	4.48	0.12
6	4.34	0.11	0.5	0.9	0.883	1.474	3.61	0.33
7	4.64	1.493	8.7	5.2	0.594	0.32	2.86	0.21
8	6.821	3.243	7.4	11	0.815	0.669	2.99	0.16
9	4.709	2.599	6.5	6.3	0.862	0.67	0.92	1.21
10	0.015	0.037	0.6	2.9	0	0.06	5.45	1.55
11	8.532	4.332	9.7	7.2	0.972	1.216	0.12	0.14
12	5.312	2.718	3.5	3.5	0.035	1.007	0.42	0.31
13	3.643	2.115	8.4	6.4	1.317	0.55	2.59	0.17
14	4.878	3.01	5.9	6	0.61	0.939	0.54	0.12
15	4.109	1.993	6	6.2	0.511	0.659	1.96	0.01
16	4.95	2.95	5.3	4.7	0.719	0.602	1.17	0.49
17	6.389	2.415	12.3	7.8	1.485	0.689	5.03	0.26
18	2.939	1.377	9	4.3	0.528	0.436	0.39	0.13
19	6.184	1.975	2.7	4.3	0.743	0.546	0.83	0.56
20	3.053	0.951	1	3.2	0.508	0.395	1.44	1.25

在这里,银行作为一个决策单元 DMU,包含两个子单元,即服务部门和销售部门.服务部门有一种特有投入 FSE(X_1^1),两种产出 MDP(Y_1^1)和 MTR(Y_2^1);销售部门有一种特有投入 FSA(X_1^2),两种产出 RSP(Y_1^2)和 MOR(Y_2^2);两个部门的共享投入有两种,FSU(X_1^s)和 FOT(X_2^s).

根据式(5),效率评价结果如表 3 所列。

由表 3 可见,DMU1、3、4、5、7、10、11、12、15、18 是有效率的.对于 DMU1、2、3、5、7、8、9、16、18、19、20,它们的第二个子单元 DMU2 的效率得分比较高,且他们的资源分配系数 $\beta_1 = \beta_2 = 0$,也就是说共享资源全部分给了 SDM U2,即效率得分较高的那个子单元. DMU13、17、20,求得的最优权重 $v_i^s = 0$,所以不能根据公式 $\beta_i = \alpha_i^s / v_i^s$ 求出 β_i .

表 3 效率评价结果

Tab. 3 Results of efficiency evaluation

DMU	效率			共享职工	
	总体 θ_o^*	服务 θ_o^1	销售 θ_o^2	支持 β_1	其他 β_2
1	1.000 0	0.522 9	1.000 0	0.000 0	0.000 0
2	0.838 0	0.063 2	0.838 0	0.000 0	0.000 0
3	1.000 0	0.140 3	1.000 0	0.000 0	0.000 0
4	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.498 1	0.642 0
5	1.000 0	0.334 5	1.000 0	0.000 0	0.000 0
6	0.356 8	0.356 8	0.006 8	1.000 0	1.000 0
7	1.000 0	0.464 0	1.000 0	0.000 0	0.000 0
8	0.859 2	0.750 0	0.859 2	0.000 0	0.000 0
9	0.675 5	0.235 1	0.675 5	0.000 0	0.000 0
10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.645 7	0.732 3
11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.523 3	0.887 2
12	1.000 0	1.000 0	0.228 2	1.000 0	1.000 0
13	0.810 6	0.209 9	0.810 6	—	0.000 0
14	0.989 6	0.989 6	0.673 2	1.000 0	1.000 0
15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.742 8	0.523 5
16	0.567 2	0.316 4	0.567 2	0.000 0	0.000 0
17	0.845 8	0.202 4	0.845 8	—	0.000 0
18	1.000 0	0.142 9	1.000 0	0.000 0	0.000 0
19	0.549 6	0.371 3	0.549 6	0.000 0	0.000 0
20	0.434 1	0.067 2	0.413 1	0.000 0	—

1.5 并联生产系统的资源分配系数

在 DEA 的研究领域,许多学者研究了含有共享资源的生产系统的效率评价,他们采用了多种含有 RAP 的复杂模型求解 DMU 的效率得分.但是很少有人对 RAP 作进一步地分析解释.当用来做多组分的系统的效率评价的,这些模型被线性化处理之后,资源分配系数的现实意义就被遗忘了.在大多数

情况下,资源分配系数对多元生产系统的运营应该是有着现实中的指导意义的.在下文中,我们尝试着找出了一种途径给资源分配系数一个合理的解释.通过分别求解两个子单元的最大效率得分,并观察他们与总体效率值以及资源分配系数的关系,我们发现,为了使总体达到最大效率,决策单元总是将所有共享资源全部分配给最大效率得分比较高的那个子单元.

首先,用模型(6)计算第 1 个子单元的最大效率得分 θ^1 :

$$\begin{aligned} \max & \frac{\sum_{r=1}^l \mu_r^1 y_{r0}^1}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{i0}^1 + \sum_{i=1}^l \beta_i \nu_i^s x_{i0}^s} \\ \text{s. t.} & \frac{\sum_{r=1}^l \mu_r^1 y_{rj}^1}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 + \sum_{i=1}^l \beta_i \nu_i^s x_{ij}^s} \leq 1, \\ & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{rj}^2}{\sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{ij}^2 + \sum_{i=1}^l (1 - \beta_i) \nu_i^s x_{ij}^s} \leq 1, \\ & j = 1, \dots, n, \\ & \beta_i \in [LU_i, UB_i], \nu_i^1, \nu_i^2, \nu_i^s, \mu_r^1, \mu_r^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

同样的方法线性化处理:

$$\begin{aligned} \theta_o^{1*} &= \max \sum_{r=1}^l \mu_r^1 y_{r0}^1 \\ \text{s. t.} & \sum_{r=1}^l \mu_r^1 y_{rj}^1 - \sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 - \sum_{i=1}^l \alpha_i^s x_{ij}^s \leq 0, \\ & \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{rj}^2 - \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^l (\nu_i^s - \alpha_i^s) x_{ij}^s \leq 0, \\ & \sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{i0}^1 + \sum_{i=1}^l \alpha_i^s x_{i0}^s = 1 \\ & j = 1, \dots, n, LU_i \nu_i^s \leq \alpha_i^s \leq UB_i \nu_i^s, \\ & \nu_i^1, \nu_i^2, \nu_i^s, \alpha_i^s, \mu_r^1, \mu_r^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

然后最大化第 2 个子单元的效率:

$$\begin{aligned} \max & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{r0}^2}{\sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{i0}^2 + \sum_{i=1}^l (1 - \beta_i) \nu_i^s x_{i0}^s} \\ \text{s. t.} & \frac{\sum_{r=1}^l \mu_r^1 y_{rj}^1}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 + \sum_{i=1}^l \beta_i \nu_i^s x_{ij}^s} \leq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{rj}^2}{\sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{ij}^2 + \sum_{i=1}^l (1 - \beta_i) \nu_i^s x_{ij}^s} \leq 1, \\ & j = 1, \dots, n, \beta_i \in [LU_i, UB_i], \\ & \nu_i^1, \nu_i^2, \nu_i^s, \mu_r^1, \mu_r^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \theta_o^{2*} &= \max \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{r0}^2 \\ \text{s. t.} & \sum_{r=1}^l \mu_r^1 y_{rj}^1 - \sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 - \sum_{i=1}^l \alpha_i^s x_{ij}^s \leq 0, \\ & \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{rj}^2 - \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^l (\nu_i^s - \alpha_i^s) x_{ij}^s \leq 0, \\ & \sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{i0}^1 + \sum_{i=1}^l (\nu_i^s - \alpha_i^s) x_{i0}^s = 1 \\ & j = 1, \dots, n, LU_i \nu_i^s \leq \alpha_i^s \leq UB_i \nu_i^s, \\ & \nu_i^1, \nu_i^2, \nu_i^s, \alpha_i^s, \mu_r^1, \mu_r^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

为了阐释对 RAP 的解释方法,我们提出了以下两个性质:

性质 1 总体的效率值 θ_j^* (β^*) 是两个子单元效率值 $\theta_j^1(\beta^*)$ 和 $\theta_j^2(\beta^*)$ 的凸组合,且当 $\theta_j^1(\beta^*) = \theta_j^2(\beta^*)$ 时,分配给单元 1 的部分 $\beta_i = 0$,反之 $\beta_i = 1$.

特别的, $\theta_j^*(\beta^*) = \gamma_j \theta_j^1(\beta^*) + (1 - \gamma_j) \theta_j^2(\beta^*)$, $0 \leq \gamma_j \leq 1$. 这里, γ_j 是 SDMU1 使用的资源占有所有投入的比例,文献[21]作了详细的论述.我们可以很容易地得到这样一个结论:

$$\min(\theta_j^1(\beta^*), \theta_j^2(\beta^*)) \leq \theta_j^*(\beta^*) \leq \max(\theta_j^1(\beta^*), \theta_j^2(\beta^*)).$$

问题是在什么情况下整体的效率值等于两个子单元效率值中的较大者,我们依然采用文献[21]对 γ_j 的表示方法:

$$\gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 + \sum_{i=1}^l \alpha_i^s x_{ij}^s}{\sum_{i=1}^m \nu_i^1 x_{ij}^1 + \sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{ij}^2 + \sum_{i=1}^l \nu_i^s x_{ij}^s}.$$

假设 $\theta_j^{1*}(\beta) < \theta_j^{2*}(\beta)$, 当且仅当 $\gamma_j = 0$ 时, $\theta_j^*(\beta) = \theta_j^2(\beta)$. 由于所有投入产出及其权重都是非负值,为了使 $\gamma_j = 0$, 必须 $\nu_i^1 = 0$ 并且 $\alpha_i^s = \beta_i \nu_i^s = 0$. 所以,如果 $\nu_i^s \neq 0$, 则 $\beta_i = 0$.

性质 2 当最大化总体的效率时,效率得分与最大化的总体效率得分相等的那个子单元,即效率得分较大的那个子单元,它的效率恰好达到了自身的最大化效率,即 $\theta_j^*(\beta^*) = \theta_o^2(\beta^*) = \theta_o^{2*}(\beta)$.

如上所述,当最大化总体效率时, $\nu_i^1 = 0$ 并且

$\alpha_i^s = \beta_i \nu_i^s = 0$. 由规划(4)的第一个约束条件可知 $\mu_r^1 = 0 (r=1, \dots, t)$, (4)的等式约束可化为

$$\sum_{i=1}^h \nu_i^2 x_{io}^2 + \sum_{i=1}^l (\nu_i^1 - \alpha_i^s) x_{io}^1 = 1$$

至此,式(4)和式(9)两个线性规划的约束条件完全等价,它们的目标函数也满足相等.

$$\theta_o^* = \max \sum_{r=1}^t \mu_r^1 y_{ro}^1 + \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{ro}^2 = \max \sum_{r=1}^s \mu_r^2 y_{ro}^2 = \theta_o^{2*} = \theta_o^2$$

所以,性质 2 得以证明.

现在回到我们一开始的假设条件 $\theta_j^*(\beta) < \theta_j^{2*}(\beta)$, 这个假设下 $\theta_j^*(\beta) \leq \theta_j^1(\beta) < \theta_j^{2*}(\beta) = \theta_j^2(\beta^*)$, 故 $\theta_j^*(\beta^*) = \theta_j^2(\beta^*)$ 取到了最大. 如果在假设条件下 $\theta_j^*(\beta^*) \neq \theta_j^2(\beta^*)$, 那么 $\theta_j^*(\beta^*) = \theta_j^1(\beta)$ 或者 $\theta_j^*(\beta^*) = \theta_j^1(\beta)$, 但是 $\theta_j^1(\beta) \leq \theta_j^{2*}(\beta) = \theta_j^2(\beta^*)$, 且 $\theta_j^1(\beta) \leq \theta_j^{1*}(\beta) < \theta_j^{2*}(\beta)$, 这与 $\theta_j^*(\beta^*)$ 是最大化的总体效率相矛盾, 因为总体效率本可以取到更大值 $\theta_j^2(\beta^*)$.

综上所述,一个决策单元会把所有的共享资源分配给拥有更高最大效率得分的那个单元以最大化自身效率. 在评估中表现较差的那个单元得不到任何共享资源. 所以,在我们资源分配系数 RAP 可以取到 0 至 1 的任何数的假定下,现存的含有共

享资源的 DEA 模型不能给出有意义的 RAP. 因此模型指导共享资源完全分配给一个并联子单元,同时另外一个子单元一无所有. 真正的差别是分配与否,而不是分配多少.

依然用上面的实例,根据模型(5),(7),(9)求解,结果如表 4 所列. 从第 3 列到第 6 列可以看出性质 2 达到了验证. 结果显示 DMU1、2、3、5、7、8、9、16、18、19、20,它们的第二个子单元 DMU2 的效率得分比第一个子单元高,且他们的资源分配系数 $\beta_1 = \beta_2 = 0$,也就是说共享资源全部分给了 SDM U2; DMU 13、17、20 也是同样的情况,除了它们的第一种或第二种共享资源的权重是 0, β_i 无法求出. 对于这些决策单元,它们第一个子单元的各投入和产出的权重全部为 0,如性质 1 里所说的一样. 而 DMU 6、12、14 的情况完全相反. 至于 DMU 10、11 和 15,它们的两个子单元都是有效率的,也就是效率得分相等,所以两个子单元都分摊到了共享资源.

2 结论

本文首先回顾了数据包络分析的基本理论,然后简单说明含有两个子系统的并联生产系统的效率评价模型和方法,并给出了并联系统效率评价的实证. 然后文章针对目前并联系统的研究领域缺乏对

表 4 模型实证结果

Tab. 4 Empirical of the model results

DMU	θ_o^*	θ_o^{1*}	θ_o^{2*}	θ_o^1	θ_o^2	ν_1^1	ν_2^2	α_1^1	α_2^2	(β_1, β_2)
1	1.000 0	0.548 8	1.000 0	0.522 9	1.000 0	2.099 2	0.034 4	0.000 0	0.000 0	(0,0)
2	0.838 0	0.136 6	0.838 0	0.063 2	0.838 0	0.170 3	0.092 7	0.000 0	0.000 0	(0,0)
3	1.000 0	0.198 0	1.000 0	0.140 3	1.000 0	0.909 0	0.084 4	0.000 0	0.000 0	(0,0)
4	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.252 5	6.774 8	0.125 7	4.349 3	(0.498 1, 0.642 0)
5	1.000 0	0.439 6	1.000 0	0.334 5	1.000 0	0.017 3	4.575 2	0.000 0	0.000 0	(0,0)
6	0.356 8	0.356 8	0.039 4	0.356 8	0.006 8	0.027 7	1.311 5	0.027 7	1.311 5	(1,1)
7	1.000 0	0.579 8	1.000 0	0.464 0	1.000 0	0.019 7	1.415 7	0.000 0	0.000 0	(0,0)
8	0.859 2	0.774 6	0.859 2	0.750 0	0.859 2	0.152 3	0.082 9	0.000 0	0.000 0	(0,0)
9	0.675 5	0.293 5	0.675 5	0.235 1	0.675 5	0.197 1	0.107 3	0.000 0	0.000 0	(0,0)
10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.014 9	0.074 3	0.009 6	0.054 4	(0.645 7, 0.732 3)
11	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	7.380 5	0.482 6	3.862 1	0.428 2	(0.523 3, 0.887 2)
12	1.000 0	1.000 0	0.431 3	1.000 0	0.228 2	0.260 7	0.402 9	0.260 7	0.402 9	(1,1)
13	0.810 6	0.351 7	0.810 6	0.209 9	0.810 6	0.000 0	1.893 6	0.000 0	0.000 0	(-,0)
14	0.989 6	0.989 6	0.749 6	0.989 6	0.673 2	0.041 4	2.705 6	0.041 4	2.705 6	(1,1)
15	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.083 9	76.465 1	0.062 3	40.032 4	(0.7428, 0.5235)
16	0.567 2	0.452 4	0.567 2	0.316 4	0.567 2	0.218 5	0.119 0	0.000 0	0.000 0	(0,0)
17	0.845 8	0.414 8	0.845 8	0.202 4	0.845 8	0.000 0	1.411 2	0.000 0	0.000 0	(-,0)
18	1.000 0	0.524 4	1.000 0	0.142 9	1.000 0	0.782 6	2.239 8	0.000 0	0.000 0	(0,0)
19	0.549 6	0.441 8	0.549 6	0.371 3	0.549 6	0.251 1	0.136 7	0.000 0	0.000 0	(0,0)
20	0.434 1	0.145 1	0.434 1	0.067 2	0.413 1	0.182 5	0.000 0	0.000 0	0.000 0	(0,-)

资源分配系数的意义的进一步研究这一问题,利用分配系数取值范围是 0 到 1,并且对其他权重不作附加约束的假定,创新地分析了现有 DEA 模型最大化并联子单元共享资源这类系统的总体效率的内在机制,即分全部资源给被评价有效率的子单元,但同时也是对现有的模型指导共享资源在并联生产系统两个子单元之间的分配系数的一种批判。

参考文献(References)

- [1] FARRELL M J. The measurement of productive efficiency[J]. *Journal of Royal Statistical Society, Series A (General)*, 1957, 120(3): 253-281.
- [2] CHARNES A, COOPER W W, RHODES E. Measuring the efficiency of decision making units[J]. *European Journal of Operational Research*, 1978, 2(6): 429-444.
- [3] YANG Y, MA B, KOIKE M. Efficiency-measuring DEA model for production system with k independent subsystems[J]. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 2000, 43(3): 343-354.
- [4] 杨锋,梁樑,凌六一,等. 并联结构决策单元的 DEA 效率评价研究[J]. *中国管理科学*, 2009, 17(6): 157-162.
YANG Feng, LIANG Liang, LING Liuyi, et al. DEA efficiency evaluating models for DMUs with parallel structure[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2009, 17(6): 157-162.
- [5] KAO C. Efficiency measurement for parallel production systems [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 196(3): 1107-1112.
- [6] 段永瑞,田澎,张卫平. 具有独立子系统的 DEA 模型及其应用[J]. *管理工程学报*, 2006, 20(1): 27-31.
DUAN Yongrui, TIAN Peng, ZHANG Weiping. DEA models with independent subsystems and their application[J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2006, 20(1): 27-31.
- [7] CHEN Y, LIANG L, YANG F. A DEA game model approach to supply chain efficiency[J]. *Annals of Operations Research*, 2006, 145(1): 5-13.
- [8] LIANG L, YANG F, COOK W D, et al. DEA models for supply chain efficiency evaluation [J]. *Annals of Operations Research*, 2006, 145(1): 35-49.
- [9] CHEN Y, LIANG L, ZHU J. Equivalence in two-stage DEA approaches [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 193(2): 600-604.
- [10] CHEN Y, COOK W D, LI N, et al. Additive efficiency decomposition in two-stage DEA [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 196(3): 1170-1176.
- [11] GOLANY B. An interactive MOLP procedure for the extension of DEA to effectiveness analysis[J]. *Journal of Operational Research Society*, 1988, 39(8): 725-734.
- [12] ATHANASSOPOULOS A D. Goal programming & data envelopment analysis (GoDEA) for target-based multi-level planning: Allocating central grants to the Greek local authorities [J]. *European Journal of Operational Research*, 1995, 87: 535-550.
- [13] ATHANASSOPOULOS A D. Decision support for target-based resource allocation of public services in multiunit and multilevel systems [J]. *Management Science*, 1998, 44(2): 173-187.
- [14] GOLANY B, TAMIR E. Evaluating efficiency-effectiveness-equality trade-offs: A data envelopment analysis approach [J]. *Management Science*, 1995, 41(7): 1172-1184.
- [15] BEASLEY J E. Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, 147: 198-216.
- [16] KORHONEN P, SYRJANEN M. Resource allocation based on efficiency analysis[J]. *Management Science*, 2004, 50(8): 1134-1144.
- [17] PACHKOVA E V. Restricted reallocation of resources [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 196: 1049-1057.
- [18] 李晓亚,崔晋川. 基于 DEA 方法的额外资源分配算法[J]. *系统工程学报*, 2007, 22(1): 57-61.
LI Xiaoya, CUI Jinchuan. Arithmetic of extra resource allocation based on DEA method [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2007, 22(1): 57-61.
- [19] YANG Y S, MA B J, MASAYUKI K. Efficiency-measuring DEA model for production system with k independent subsystems[J]. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 2000, 43(3): 343-354.
- [20] 段永瑞,田澎,张卫平. 具有独立子系统的 DEA 模型及其应用[J]. *管理工程学报*, 2006, 20(1): 27-31.
DUAN Yongrui, TIAN Peng, ZHANG Weiping. DEA models with independent subsystems and their application[J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2006, 20(1): 27-31.
- [21] BEASLEY J E. Determining teaching and research efficiencies[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1995, 46(4): 441-452.
- [22] COOK W D, HABABOU M, TUENTER H J H. Multicomponent efficiency measurement and shared inputs in data envelopment analysis: An application to sales and service performance in bank branches[J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2000, 14(3): 209-224.