第46卷第11期 中国科学技术大学学报 Vol. 46, No. 11
2016年11月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Nov. 2016
文章编号:0253-2778(2016)11-0907-05

回归型理赔额相依复合更新风险模型精致大偏差

周之寒,陈 岑,何基娇,汪世界

(安徽大学数学科学学院,安徽合肥 230601)

摘要:首先引入回归型理赔额相依复合更新风险模型,在此基础上,假定理赔为 $\mathscr{D}$ 族重尾随机变量,在一定条件下得到了该风险模型的精致大偏差.

关键词:回归;相依;复合更新风险模型;重尾理赔;精致大偏差

中图分类号:O211.4 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.11.005

2010 Mathematics Subject Classification: 60F10

引用格式:周之寒,陈岑,何基娇,等. 回归型理赔额相依复合更新风险模型精致大偏差[J]. 中国科学技术大学学报,2016,46(11):907-911,962.
ZHOU Zhihan, CHEN Cen, HE Jijiao, et al. Precise large deviations of a compound renewal risk model with regression-type size-dependence structure[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016,46(11):907-911,962.

Precise large deviations of a compound renewal risk model with regression-type size-dependence structure

ZHOU Zhihan, CHEN Cen, HE Jijiao, WANG Shijie

(*School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei* 230601, *China*)

Abstract: A compound renewal risk model with a regression-type size-dependence structure was proposed, on the basis of which precise large deviations for such a risk model were derived under the condition that all the claims are assumed to be heavy-tailed random variables from $\mathscr{D}$ class.

Key words: regression; dependent; compound renewal risk model; heavy-tailed claims; precise large deviations

0 引言

在现代金融保险业中,一个核心研究问题就是风险度量. 考虑到极端风险(如地震、火灾、海啸等)对现代金融保险产品的冲击,研究重尾场合下(即假定理赔随机变量的指数阶矩不存在)风险模型的风险度量问题变得更具实际意义. 该研究领域的一个重要课题是研究重尾随机变量随机和的精致大偏差. 重尾随机变量随机和的精致大偏差最早由文献[1]引入,随后取得了重要进展,尤其是假定理赔变量序列满足一定的相依结构时,研究成果层出不穷. 如文献[2-4]等. 本文旨在研究 $\mathscr{D}$ 族回归型理赔额相依复合更新风险模型的精致大偏差.

为方便起见,假定理赔变量 $\{X_k, k\geqslant 1\}$ 为一列

收稿日期:2015-04-25;**修回日期**:2015-11-03
基金项目:安徽省高等学校自然科学研究基金(KJ2014A020),安徽大学大学生科研训练计划(KYXL2014008)资助.
作者简介:周之寒,男,1992年生,本科生. 研究方向:保险精算. E-mail: 2431333988@qq.com
通讯作者:汪世界,博士/副教授. E-mail: ahuwsj@126.com

与 X 独立同分布的随机变量，理赔时间间隔 $\{\theta_k,k\geqslant1\}$ 为一列与 θ 独立同分布的随机变量（X 与 θ 之间不一定独立），X 与 θ 均支撑于 $[0,\infty)$，分布函数分别为 F_X 和 G，数学期望分别为 μ_X 和 λ^{-1}；$\{Z_n,n\geqslant1\}$ 为一列取正整数值的随机变量，表示第 n 次理赔发生时实际理赔次数（直观上，每次理赔发生时，可能同时伴有多个理赔. 例如车辆保险，因为每次事故发生时可能不仅有车辆损失，而且可能伴有人身伤害），其分布函数与数学期望分别记作 F_Z 与 μ_Z；并且假定 $\{Z_n,n\geqslant1\}$ 与 $\{(X_k,\theta_k),k\geqslant1\}$ 相互独立. 于是，定义更新过程：

$$\Theta(t)=\sup\Big\{n\geqslant1,\sum_{i=1}^{n}\theta_i\leqslant t\Big\},\Lambda(t)=\sum_{k=1}^{\Theta(t)}Z_k.$$

则 $\Theta(t)$ 与 $\Lambda(t)$ 分别表示到 t 时刻为止一共发生理赔次数与实际累积理赔次数. 记 $\theta(t)=E[\Theta(t)]$，$\lambda(t)=E[\Lambda(t)]$. 注意到 $\{\theta_k,k\geqslant1\}$ 的相互独立性，由基本更新定理可知，当 $t\to\infty$ 时，$\theta(t)\sim\lambda t$. 因此，到 t 时刻为止公司的累积理赔额可表示为

$$S_{\Lambda(t)}=\sum_{k=1}^{\Lambda(t)}X_k,t\geqslant0 \qquad (1)$$

模型(1)称为复合更新风险模型. 易见，如果假定 $Z_n\equiv1,n\geqslant1$，则模型(1)退化为经典的更新风险模型. 复合更新风险模型已被文献[5-6]等研究过. 其中文献[6]假定 $\{X_k,k\geqslant1\}$，$\{\theta_k,k\geqslant1\}$ 以及 $\{Z_n,n\geqslant1\}$ 均为 END(extended negatively dependent)随机变量序列，且它们相互独立，得到了该非标准复合更新风险模型的精致大偏差. 然而，上述假定 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 与 $\{\theta_k,k\geqslant1\}$ 独立显然与客观保险实际不符，只是为了数学处理上的方便. 为此，文献[7]首次假定 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 与 $\{\theta_k,k\geqslant1\}$ 之间有如下假设1中的相依结构，并称相应的更新风险模型为理赔额相依模型，得到了该模型的精致大偏差.

假设1 假设存在 $x_0>0$ 以及非负随机变量 θ^* 使得对所有的 $x>x_0$ 以及 $t\in[0,\infty)$，有

$$P(\theta>t\mid X>x)\leqslant P(\theta^*>t).$$

注意到 $\{(X_k,\theta_k),k\geqslant1\}$ 的相互独立性，假设1表明大的理赔到来的随机时刻仅与上一次理赔额大小相关. 然而，直观上，大的理赔到来的时刻不仅与上一次理赔额有关，而且可能与上上次所产生的理赔额相关. 为此，文献[8]给出了如下新的相依结构，推广了假设1. 假定 (X',θ,X) 为与 (X_{n-1},θ_n,X_n)，$n\geqslant2$，独立同分布的随机变量，其中，X' 是 X 独立版本.

假设2 对任意的 $n\geqslant2$，θ_n 与 X_{n-1}，X_n 有关，而与 $X_1,\cdots,X_{n-2},X_{n+1},\cdots$ 独立. 存在 $x_0>0$ 以及非负随机变量 θ^* 使得对所有的 $x>x_0$ 以及 $t\in[0,\infty)$，有

$$\left.\begin{aligned}&P(\theta>t\mid X'>x,X>x)\leqslant P(\theta^*>t),\\&P(\theta>t\mid X>x)\leqslant P(\theta^*>t)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

在经典的更新风险模型中加入了假设2，文献[8]将其称为回归型理赔额相依风险模型. 假设2表明：θ_n 与 $\theta_1,\cdots,\theta_{n-2},\theta_{n+2},\cdots$，独立，但 θ_n 与 $\theta_{n-1},\theta_{n+1}$ 均相关. 文献[8，注2.2]表明，当 $t\to\infty$ 时，在假设2下仍有 $\theta(t)\sim\lambda t$，从而，$\lambda(t)=\mu_Z\theta(t)\sim\mu_Z\lambda t$.

以下，总假定模型(1)满足相依结构(2)，称为回归型理赔额相依复合更新风险模型，本文旨在研究该风险模型的精致大偏差. 基于假设2，与文献[8]类似，令 θ_1^* 为一个与 θ 条件在 $\{X'>x,X>x\}$ 上同分布且与其他随机源独立的非负随机变量，θ_2^* 为另一个与 θ 条件在 $\{X>x\}$ 同分布且与其他随机源独立的非负随机变量，即对任意的 $t>0$，

$$\left.\begin{aligned}&P(\theta_1^*\leqslant t)=P(\theta\leqslant t\mid X'>x,X>x),\\&P(\theta_2^*\leqslant t)=P(\theta\leqslant t\mid X>x)\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

易见，θ_1^*,θ_2^* 并不独立（它们均依赖与 X',X）. 再建立如下广义双延迟更新计数过程，令

$$\tau_n^*=\theta_1^*+\theta_2^*+\sum_{k=3}^{n}\theta_k,n>1,$$

以及

$$\Theta^*(t)=\sup\{n\geqslant1,\tau_k{}^*\leqslant t\},\ \Lambda^*(t)=\sum_{k=1}^{\Theta^*(t)}Z_k \qquad (4)$$

在式(1)中用 $\Lambda^*(t)$ 代替 $\Lambda(t)$ 可得

$$S_{\Lambda^*(t)}=\sum_{k=1}^{\Lambda^*(t)}X_k,\ t\geqslant0 \qquad (5)$$

1 若干定义与引理

在下文中，如不做特殊说明，所有的极限过程均指 $t\to\infty$ 对 $x>\gamma\lambda(t)$ 一致. 对于两个正无穷小量 $f(\cdot)$ 与 $g(\cdot)$ 满足

$$a\leqslant\liminf\frac{f(\cdot)}{g(\cdot)}\leqslant\limsup\frac{f(\cdot)}{g(\cdot)}\leqslant b.$$

若 $b<\infty$，记 $f(\cdot)=O(g(\cdot))$；若 $b=0$，记 $f(\cdot)=o(g(\cdot))$. 若 $b=1$，记 $f(\cdot)\lesssim g(\cdot)$；若 $a=1$，记 $f(\cdot)\gtrsim g(\cdot)$；若 $a=b=1$，记 $f(\cdot)\sim g(\cdot)$；若 $0<a\leqslant b<\infty$，则记 $f(\cdot)\asymp g(\cdot)$. 对两个正值双变量函数 $f(t,x)$ 与 $g(t,x)$，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\in$

$\Delta(t)\neq\emptyset$ 一致有 $f(t,x)\sim g(t,x)$ 意指

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in\Delta(t)}\left|\frac{f(t,x)}{g(t,x)}-1\right|=0.$$

定义 1.1[3]　称随机变量 X 或其相应的分布 F_X 具有控制变化尾，记作 $F_X\in\mathscr{D}$. 如果对任意的 $0<y<1$，

$$\lim_{x\to\infty}\sup\frac{\overline{F_X}(xy)}{\overline{F_X}(x)}<\infty.$$

再定义

$$J_{F_X}^{+}=\inf\left\{-\frac{\ln\overline{F_{X*}}(y)}{\ln y},y>1\right\},$$

$$L_{F_X}=\lim_{y\downarrow 1}\overline{F_{X*}}(y),$$

其中，$\overline{F_{X*}}(y)=\lim\limits_{x\to\infty}\inf\dfrac{\overline{F_X}(xy)}{\overline{F_X}(x)}$. 沿用文献[6]的术语，$J_{F_X}^{+}$ 称为分布 F_X 的上 Matuszewska 指数. 且当 $F_X\in\mathscr{D}$ 时，$J_{F_X}^{+}<\infty$；对任意的 $p>J_{F_X}^{+}$，当 $x\to\infty$ 时，

$$x^{-p}=o(\overline{F_X}(x))\tag{6}$$

引理 1.1　在假设 2 下，$\Lambda(t)$ 条件在 $\{X'>x,X>x\}$ 或 $\{X>x\}$ 上与 $\Lambda^*(t)$ 同分布，此即

$$\left.\begin{aligned}&P(\Lambda(t)=n\mid X'>x,X>x)=P(\Lambda^*(t)=n),\\&P(\Lambda(t)=n\mid X>x)=P(\Lambda^*(t)=n)\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

证明　这里只证式(7)第一式，第二式类似可证. 事实上，在假设 2 下，文献[8]已得到 $\Theta(t)$ 条件在 $\{X'>x,X>x\}$ 与 $\Theta^*(t)$ 同分布，此即，对任意的 n 有 $P(\Theta(t)=n|X'>x,X>x)=P(\Theta^*(t)=n)$. 注意到 $\{Z_n,n\geqslant 1\}$ 与 $\{(X_k,\theta_k),k\geqslant 1\}$ 相互独立，于是，

$$\begin{aligned}&P(\Lambda(t)=n\mid X'>x,X>x)=\\&\sum_{k=1}^{\infty}P\Big(\sum_{i=1}^{k}Z_i=n\mid X'>x,X>x,\Theta(t)=k\Big)\cdot\\&P(\Theta(t)=k\mid X'>x,X>x)=\\&\sum_{k=1}^{\infty}P\Big(\sum_{i=1}^{k}Z_i=n\Big)P(\Theta^*(t)=k)=\\&\sum_{k=1}^{\infty}P\Big(\sum_{i=1}^{k}Z_i=n\mid\Theta^*(t)=k\Big)P(\Theta^*(t)=k)=\\&P(\Lambda^*(t)=n).\end{aligned}$$

□

下面的引理 1.2 是 Anscombe 定理的一种特殊形式，标准的 Anscombe 定理给出的是随机变量随机和情形下的中心极限定理，这里仅给出其强大数定律.

引理 1.2[9]（Anscombe 定理）　设 $\{Z_k,k\geqslant 1\}$ 为一列独立同分布随机变量序列，期望 $\mu_Z<\infty$，$\nu(t)$ 为任一取正整数值随机过程，与 $\{Z_k,k\geqslant 1\}$ 独立，且当 $t\to\infty$ 时，$\nu(t)\xrightarrow{P}\infty$，则当 $t\to\infty$ 时，

$$\frac{1}{\nu(t)}\sum_{n=1}^{\nu(t)}Z_n\to\mu_Z,\ \text{a.s.}.$$

引理 1.3　设 $\Lambda^*(t)$ 为式(4)定义的双延迟更新计数过程，其中 $E[\theta]=1/\lambda\in(0,\infty)$，$\mathrm{Var}[\theta]<\infty$，则对任意的 $0<\delta<\lambda$ 及任意的函数 $\zeta(\cdot)$：$[0,\infty)\mapsto(0,\infty)$ 满足 $\zeta(t)\uparrow\infty$，有

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\zeta(t)}P\left(\left|\frac{\Lambda^*(t)}{\lambda(t)}-1\right|>\delta\right)=0\tag{8}$$

证明　由于

$$\frac{\Lambda^*(t)}{\lambda(t)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\Theta^*(t)}Z_k}{\Theta^*(t)}\cdot\frac{\Theta^*(t)}{\mu_Z\lambda t}\cdot\frac{\lambda t}{\theta(t)}\tag{9}$$

显然对于双延迟更新过程 $\Theta^*(t)$ 有，当 $t\to\infty$ 时，仍有 $\Theta^*(t)\to\infty$. 由于 $\Theta(t)$ 的分布与 x 有关，而 $\{Z_k,k\geqslant 1\}$ 的分布与 x 无关，故由引理 1.2 知，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\zeta(t)$ 一致地有

$$\frac{1}{\Theta^*(t)}\sum_{k=1}^{\Theta^*(t)}Z_k\xrightarrow{\text{a.s.}}\mu_Z\tag{10}$$

文献[7，引理 3.4]已证当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\zeta(t)$ 一致地有

$$\frac{\Theta^*(t)}{t}\xrightarrow{P}\lambda\tag{11}$$

于是联合式(9)～(11)并注意到 $\theta(t)\sim\lambda t$，故当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\zeta(t)$ 一致地有

$$\frac{\Lambda^*(t)}{\lambda(t)}\xrightarrow{P}\mu_Z\cdot\frac{1}{\mu_Z}=1.$$

此即引理 1.3 成立.　□

引理 1.4[10]　设 $\{X_k,k\in\mathbb{N}\}$ 为一列独立同分布随机变量序列，其共同分布 $F_X\in\mathscr{D}$，数学期望 $\mu_X\in(0,\infty)$，则对任意给定的 $\gamma>0$，当 $n\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma n$ 一致地有

$$L_{F_X}n\,\overline{F_X}(x)\lesssim P(S_n-n\mu_X>x)\lesssim L_{F_X}^{-1}n\,\overline{F_X}(x)\tag{12}$$

引理 1.5[7]　设 X 为一正值随机变量，分布函数 $F_X\in\mathscr{D}$，则对任意给定的正整数 $n\geqslant 1$ 以及 $p>J_{F_X}^{+}$，存在充分大的常数 C，使得对所有的 $x>0$ 有

$$P\Big(X>\frac{x}{n}\Big)\leqslant C\,n^{p}\,\overline{F_X}(x)\tag{13}$$

引理 1.6[8]　设 $\{\theta_k,k\in N\}$ 为一列同分布非负随机变量，θ_n 与 $\theta_1,\cdots,\theta_{n-2},\theta_{n+2},\cdots$ 独立. 如果 $E[\theta]=1/\lambda\in(0,\infty)$，$\mathrm{Var}[\theta]<\infty$，则对任意的 $a>$

3λ,存在 $b>1$ 使得

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{n>at} b^n P\Big(\sum_{j=1}^{n}\theta_j \leqslant t\Big)=0 \tag{14}$$

2 主要结果及其证明

定理 2.1 考虑回归型理赔额相依复合更新风险模型．如果 $F_X\in\mathscr{D}$, $\mu_X\in(0,\infty)$; $E[\theta]=1/\lambda\in(0,\infty)$, $\mathrm{Var}[\theta]<\infty$;且存在常数 $\alpha_Z\in(3+J_{F_X}^{+},\infty)$ 使得 $EZ^{\alpha_Z}<\infty$．则对任意的 $\gamma>0$,对 $x>\gamma\lambda(t)$ 一致地有

$$L_{F_X}\lambda(t)\,\overline{F_X}(x)\lesssim P(S_{\Lambda(t)}-\mu_X\lambda(t)>x)\lesssim L_{F_X}^{-2}\lambda(t)\,\overline{F_X}(x) \tag{15}$$

证明 首先给定任意的 $0<\delta<1$ 以及 $\nu>1$,有

$$P(S_{\Lambda(t)}-\mu_X\lambda(t)>x)\geqslant \sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)} P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu_X\lambda(t)>x,\Lambda(t)=n\Big)\geqslant$$
$$\sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)} P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu_X\lambda(t)>x, \Lambda(t)=n,\ \bigvee_{i=1}^{n}X_i>\nu x\Big).$$

于是,由 Bonferroni 不等式可得

$$P(S_{\Lambda(t)}-\mu_X\lambda(t)>x)\geqslant \sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)} (I_1(x,t;n)-I_2(x,t;n)) \tag{16}$$

式中,

$$I_1(x,t;n)=\sum_{i=1}^{n}P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu_X\lambda(t)>x,\Lambda(t)=n,X_i>\nu x\Big),$$
$$I_2(x,t;n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(\Lambda(t)=n,X_i>\nu x,X_j>\nu x).$$

下面先估计 $I_1(x,t;n)$,类似于式(4),令 $\Theta_1^{*}(t)$ 为另一复合双延迟更新计数过程($\Theta(t)$ 条件在($X>\nu x$)上与 $\Theta_1^{*}(t)$ 同分布),并令 $\Lambda_1^{*}(t)=\sum_{i=1}^{\Theta_1^{*}(t)}Z_i$．由引理 1.1,则对充分大的 t,易知

$$I_1(x,t;n)\geqslant \sum_{i=1}^{n}P\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}X_k-\mu_X\lambda(t)>(1-\nu)x, \Lambda(t)=n,X_i>\nu x\Big)\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}P\Big(\sum_{k=1,k\neq i,i-1,i+1}^{n}X_k-\mu_X\lambda(t)>(1-\nu)x, \Lambda(t)=n\mid X_i>\nu x\Big)\overline{F_X}(\nu x)=$$
$$n\overline{F_X}(\nu x)P\Big(\sum_{i=4}^{n}X_k-\mu\lambda(t)>(1-\nu)x,\Lambda_1^{*}(t)=n\Big).$$

因此,由上式可得,$\sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)} I_1(x,t;n)$ 不小于

$$(1-\delta)\lambda(t)\,\overline{F_X}(\nu x)\cdot \Big[P\Big(\sum_{k=4}^{n}X_k-\mu_X\lambda(t)>(1-\nu)x\Big)- P\Big(\Big|\frac{\Lambda_1^{*}(t)}{\lambda(t)}-1\Big|>\delta\Big)\Big] \tag{17}$$

选取充分小的 δ 使得 $(1-\nu)\gamma<-\delta\mu_X$,由大数定律,式(17)中第一部分的概率应该不小于

$$P\Big(\frac{1}{\lambda(t)}\sum_{4\leqslant k\leqslant(1-\delta)\lambda(t)}X_k-\mu_X>(1-\nu)\gamma\Big)\to 1.$$

另一方面,引理 1.3 表明,式(17)中第二项当 $t\to\infty$ 时趋于 0．因而可得

$$\sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)} I_1(x,t;n)\gtrsim(1-\delta)\lambda(t)\,\overline{F_X}(\nu x) \tag{18}$$

再估计 $I_2(x,t;n)$,交换下式的求和次序可得

$$\sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)} I_2(x,t;n)=(\overline{F_X}(\nu x))^2 \sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)}\ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(\Lambda(t)=n\mid X_i>\nu x,X_j>\nu x)\leqslant$$
$$(\overline{F_X}(\nu x))^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant(1+\delta)\lambda(t)}\ \sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)}P(\Lambda(t)=n\mid X_i>\nu x,X_j>\nu x)\leqslant$$
$$(\overline{F_X}(\nu x))^2((1+\delta)\lambda(t))^2= o(1)(\lambda(t)\,\overline{F_X}(x)) \tag{19}$$

将式(18)和(19)带入式(17),并令 $\delta\downarrow 0$, $\nu\downarrow 1$,由 L_{F_X} 的定义知,式(15)左边的渐近不等式成立.

下证式(15)右边的渐近不等式．首先,对任意给定的 $0<\delta<1$,将概率 $P(S_{\Lambda(t)}-\mu_X\lambda(t)>x)$ 分解成 $J_1(x,t)$ 与 $J_2(x,t)$ 两部分之和,其中,

$$J_1(x,t)=P(S_{\Lambda(t)}-\mu_X\lambda(t)>x,\Lambda(t)\leqslant(1+\delta)\lambda(t)),$$
$$J_2(x,t)=$$

$$P(S_{\Lambda(t)}-\mu_X\lambda(t)>x,\Lambda(t)\geqslant(1+\delta)\lambda(t)).$$

现取充分小的 δ 使得 $\gamma-\delta\mu_X>0$，由引理 1.4，可得

$$J_1(x,t)\leqslant P\Big(\sum_{k=1}^{\lfloor(1+\delta)\lambda(t)\rfloor}X_k-\mu_X\lfloor(1+\delta)\lambda(t)\rfloor>x+\mu_X\lambda(t)-\mu_X\lfloor(1+\delta)\lambda(t)\rfloor\Big)\lesssim$$
$$L_{F_X}^{-1}\lfloor(1+\delta)\lambda(t)\rfloor\overline{F_X}(x+\mu_X\lambda(t)-\mu_X\lfloor(1+\delta)\lambda(t)\rfloor)\leqslant$$
$$L_{F_X}^{-1}(1+\delta)\lambda(t)\,\overline{F_X}\Big(x\Big(1-\frac{\delta\mu_X}{\gamma}\Big)\Big)\tag{20}$$

再估计 $J_2(x,t)$，选取任意的 $0<\varepsilon<\delta\mu_Z$，将 $J_2(x,t)$ 分解如下：

$$J_2(x,t)=\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu_X\lambda(t)>x,\Lambda(t)=n\Big)=$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\Big[P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu_X\lambda(t)>x,\sum_{j=1}^{\Theta(t)}Z_j=n,\Theta(t)>\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}\Big)+$$
$$P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu_X\lambda(t)>x,\sum_{j=1}^{\Theta(t)}Z_j=n,\Theta(t)\leqslant\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}\Big)\Big]=$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}(K_1(x,t)+K_2(x,t))\tag{21}$$

对于 $\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}K_1(x,t)$. 任取 $p\in(J_{F_X}^+,\alpha_Z-3)$，由引理 1.5 可得，

$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}K_1(x,t)\leqslant$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\sum_{m>\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}}P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k>x,\Theta(t)=m\Big)\leqslant$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\sum_{m>\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}}\sum_{k=1}^{n}P\Big(X_k>\frac{x}{n},\sum_{j=1}^{m}\theta_j\leqslant t\Big)\leqslant$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\sum_{m>\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}}\sum_{k=1}^{n}P\Big(X_k>\frac{x}{n},\sum_{j=1,j\neq k,k+1}^{m}\theta_j\leqslant t\Big)\leqslant$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\sum_{m>\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}}Cn^{p+1}\,\overline{F_X}(x)P\Big(\sum_{j=1}^{m-2}\theta_j\leqslant t\Big).$$

交换上式的求和次序，并利用引理 1.6 结论可得

$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}K_1(x,t)\leqslant$$
$$\sum_{m>\frac{(1+\delta)\lambda(t)}{\varepsilon+\mu_Z}}\ \sum_{(1+\delta)\lambda(t)<n<(\varepsilon+\mu_Z)m}Cn^{p+1}\,\overline{F_X}(x)P\Big(\sum_{j=1}^{m-2}\theta_j\leqslant t\Big)\leqslant$$
$$C(\varepsilon+\mu_Z)^{p+2}\,\overline{F_X}(x)\sum_{m>\frac{(1+\delta)\lambda(t)}{\varepsilon+\mu_Z}}m^{p+2}P\Big(\sum_{j=1}^{m-2}\theta_j\leqslant t\Big)=$$
$$o(\overline{F_X}(x))\tag{22}$$

最后再估计 $\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}K_2(x,t)$. 由引理 1.5 可得，

$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}K_2(x,t)\leqslant$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k>x,\sum_{j=1}^{\Theta(t)}Z_j=n,\Theta(t)\leqslant\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}\Big)\leqslant$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\sum_{k=1}^{n}P\Big(X_k>\frac{x}{n},\sum_{j\leqslant\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}}Z_j\geqslant n\Big)\leqslant$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}nP\Big(X>\frac{x}{n}\Big)P\Big(\sum_{j\leqslant\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}}Z_j\geqslant n\Big)\leqslant$$
$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}Cn^{p+1}\,\overline{F_X}(x)P\Big(\sum_{j\leqslant\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}}(Z_j-\mu_Z)\geqslant\frac{\varepsilon n}{\varepsilon+\mu_Z}\Big)\tag{23}$$

注意到存在 $\alpha_Z>J_{F_X}^++3$ 使得 $EZ^{\alpha_Z}<\infty$，由文献[3，引理 2.2]，对任意事先给定的 $\tilde{\gamma}>0$ 以及 $\tilde{p}>0$，存在正常数 ν 以及 C_2 使得对所有的 $m=1,2,\cdots$ 以及 $y\geqslant\tilde{\gamma}m$，成立

$$P\Big(\sum_{i=1}^{m}(Z_i-\mu_Z)>y\Big)\leqslant m\,\overline{F_Z}(\nu y)+C_2y^{-\tilde{p}}\tag{24}$$

在式(23)中取 $\tilde{\gamma}=\varepsilon$ 以及 $\tilde{p}>p+2$，利用式(24)以及 Markov 不等式 $\overline{F_Z}\Big(\frac{\varepsilon\nu n}{\varepsilon+\mu_Z}\Big)\leqslant\Big(\frac{\varepsilon+\mu_Z}{\varepsilon\nu n}\Big)^{\alpha_Z}EZ_1^{\alpha_Z}$，可得

$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}K_2(x,t)\leqslant\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}Cn^{p+1}\,\overline{F_X}(x)\cdot\Big[\frac{n}{\varepsilon+\mu_Z}\overline{F_Z}\Big(\frac{\varepsilon\nu n}{\varepsilon+\mu_Z}\Big)+C_2\Big(\frac{\varepsilon n}{\varepsilon+\mu_Z}\Big)^{-\tilde{p}}\Big]\leqslant$$
$$C\,\overline{F_X}(x)\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\Big[\frac{(\varepsilon+\mu_Z)^{\alpha_Z-1}EZ_1^{\alpha_Z}}{(\varepsilon\nu)^{\alpha_Z}}n^{-(\alpha_Z-p-2)}+\frac{C_2(\varepsilon+\mu_Z)^{\tilde{p}}}{\varepsilon^{\tilde{p}}}n^{-(\tilde{p}-p-1)}\Big]=o(\overline{F_X}(x))\tag{25}$$

式中，最后一步是由于 $\alpha_Z-p-2>1$ 及 $\tilde{p}-p-1>1$. 因此，将式(22)和(25)代入式(21)可得，$J_2(x,t)=o(\overline{F_X}(x))$. 于是，最后联合式(20)，并令 $\delta\downarrow0$，结合 L_{F_X} 的定义，易得式(15)右边的渐近不等式成立. 证毕. □

（下转第 962 页）